

2020 年上海市奉贤区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列计算中，结果等于 a^{2m} 的是 ()
 A. $a^m + a^m$ B. $a^m \cdot a^2$ C. $(a^m)^m$ D. $(a^m)^2$
2. (4 分) 下列等式成立的是 ()
 A. $(\sqrt{3})^2 = 3$ B. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ C. $\sqrt{3^3} = 3$ D. $(-\sqrt{3})^2 = -3$
3. (4 分) 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，那么实数 m 的值可以是 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
4. (4 分) 甲、乙、丙、丁四位同学本学期 5 次 50 米短跑成绩的平均数 $\bar{x}$ (秒) 及方差 S^2 (秒²) 如表所示. 如果从这四位同学中选出一位成绩较好且状态稳定的同学参加学校比赛，那么应该选的同学是 ()

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	7	7	7.5	7.5
S^2	2.1	1.9	2	1.8

 A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁
5. (4 分) 四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 互相平分. 添加下列条件，一定能判定四边形 $ABCD$ 为菱形的是 ()
 A. $\angle ABD = \angle BDC$ B. $\angle ABD = \angle BAC$ C. $\angle ABD = \angle CBD$ D. $\angle ABD = \angle BCA$
6. (4 分) 如果线段 AM 和线段 AN 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中线和高，那么下列判断正确的是 ()
 A. $AM > AN$ B. $AM \geq AN$ C. $AM < AN$ D. $AM \leq AN$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 计算: $9a^3b \div 3a^2 =$ _____.
8. (4 分) 如果代数式 $\frac{2}{3-x}$ 在实数范围内有意义，那么实数 x 的取值范围是_____.
9. (4 分) 方程 $\sqrt{x+1} = 4$ 的解是_____.
10. (4 分) 二元一次方程 $x+2y=3$ 的正整数解是_____.
11. (4 分) 从分别写有数字 1, 2, 4 的三张相同卡片中任取两张，如果把所抽取卡片上的

两个数字分别作为点 M 的横坐标和纵坐标,那么点 M 在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上的概率是_____.

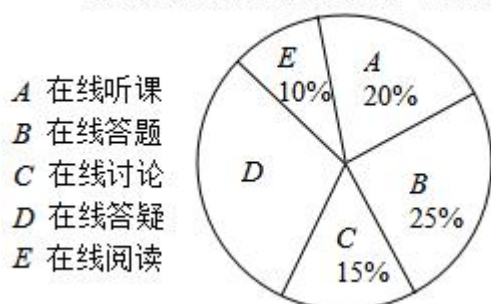
12. (4 分) 如果函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限,那么 y 的值随 x 的值增大而_____. (填“增大”或“减小”)

13. (4 分) 据国家统计局数据,2019 年全年国内生产总值接近 100 万亿,比 2018 年增长 6.1%. 假设 2020 年全年国内生产总值的年增长率保持不变,那么 2020 年的全年国内生产总值将达到_____万亿.

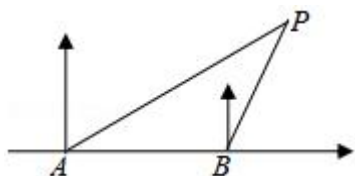
14. (4 分) 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 AB 的中点. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{DE} =$ _____. (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

15. (4 分) 某校计划为全体 1200 名学生提供以下五种在线学习的方式: 在线听课、在线答题、在线讨论、在线答疑和在线阅读. 为了解学生需求,该校随机对部分学生进行了“你对哪类在线学习方式最感兴趣”的调查,并根据调查结果绘制成扇形统计图(如图). 由这个统计图可知,全校学生中最喜欢“在线答疑”的学生人数约为_____人.

抽取的学生最感兴趣的学习方式的扇形图



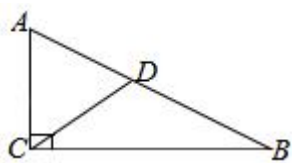
16. (4 分) 如图,一艘轮船由西向东航行,在 A 处测得灯塔 P 在北偏东 60° 的方向,继续向东航行 40 海里后到 B 处,测得灯塔 P 在北偏东 30° 的方向,此时轮船与灯塔之间的距离是_____海里.



17. (4 分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $BC = 12$. 如果分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切,且圆 A 与直线 BC 相交,点 D 在圆 A 外,那么圆 C 的半径长 r 的取值范围是_____.

18. (4 分) 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, CD 是斜边 AB 上的中线,如果将 $\triangle BCD$ 沿 CD 所在直线翻折,点 B 落在点 E 处,联结 AE ,那么 $\angle CAE$ 的度数是_____.

度.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

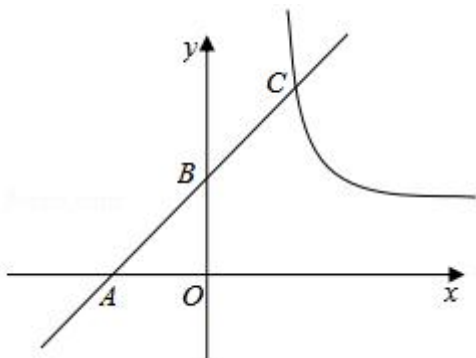
19. (10 分) 计算: $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{-2} - |\sqrt{2} - 2| + 2020^0$.

20. (10 分) 先化简, 再求值: $\frac{x-3}{x^2+6x+9} \div (1 - \frac{6}{x+3})$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

21. (10 分) 已知: 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 AB 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$, 与 y 轴的正半轴交于点 B , 与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 C , 且 $AB = BC$, 点 C 的纵坐标为 4.

(1) 求直线 AB 的表达式;

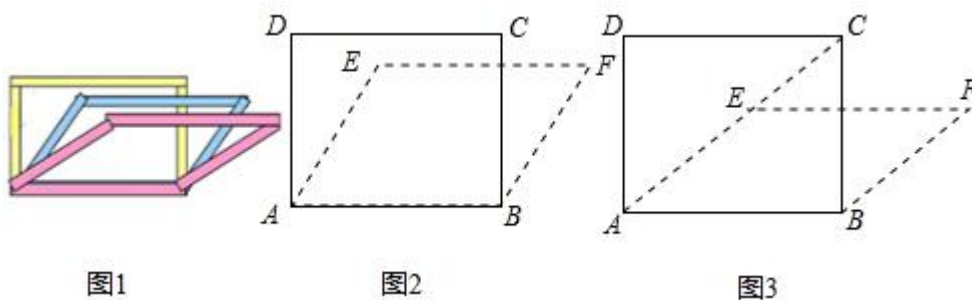
(2) 过点 B 作 $BD \parallel x$ 轴, 交反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象于点 D , 求线段 CD 的长度.



22. (10 分) 如图 1, 由于四边形具有不稳定性, 因此在同一平面推矩形的边可以改变它的形状 (推移过程中边的长度保持不变). 已知矩形 $ABCD$, $AB = 4\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$, 固定边 AB , 推边 AD , 使得点 D 落在点 E 处, 点 C 落在点 F 处.

(1) 如图 2, 如果 $\angle DAE = 30^\circ$, 求点 E 到边 AB 的距离;

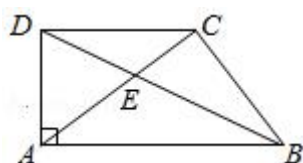
(2) 如图 3, 如果点 A 、 E 、 C 三点在同一直线上, 求四边形 $ABFE$ 的面积.



23. (12 分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB$, $\angle DAB = 90^\circ$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 E , $AC \perp BC$, 垂足为点 C , 且 $BC^2 = CE \cdot CA$.

(1) 求证: $AD = DE$;

(2) 过点 D 作 AC 的垂线, 交 AC 于点 F , 求证: $CE^2 = AE \cdot AF$.

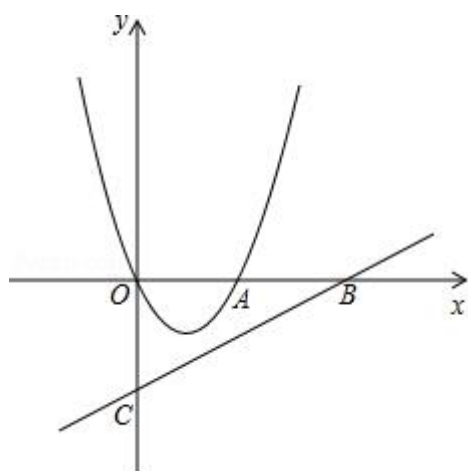


24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$. 直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C .

(1) 求这条抛物线的表达式和顶点的坐标;

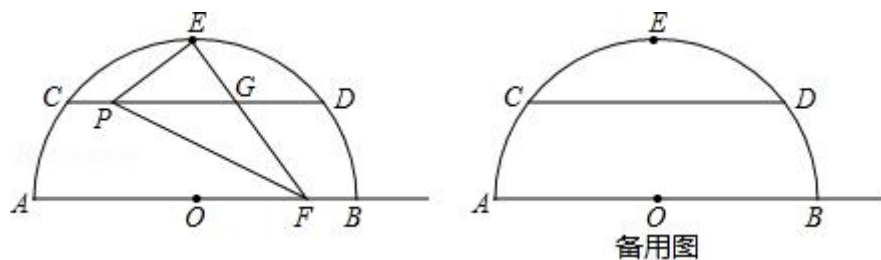
(2) 将抛物线 $y = x^2 + bx$ 向右平移, 使平移后的抛物线经过点 B , 求平移后抛物线的表达式;

(3) 将抛物线 $y = x^2 + bx$ 向下平移, 使平移后的抛物线交 y 轴于点 D , 交线段 BC 于点 P 、 Q , (点 P 在点 Q 右侧), 平移后抛物线的顶点为 M , 如果 $DP \parallel x$ 轴, 求 $\angle MCP$ 的正弦值.



25. (14 分) 如图, 已知半圆 $\odot O$ 的直径 $AB = 10$, 弦 $CD \parallel AB$, 且 $CD = 8$, E 为弧 CD 的中点, 点 P 在弦 CD 上, 联结 PE , 过点 E 作 PE 的垂线交弦 CD 于点 G , 交射线 OB 于点 F .

- (1) 当点 F 与点 B 重合时, 求 CP 的长;
- (2) 设 $CP = x$, $OF = y$, 求 y 与 x 的函数关系式及定义域;
- (3) 如果 $GP = GF$, 求 $\triangle EPF$ 的面积.



2020 年上海市奉贤区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列计算中，结果等于 a^{2m} 的是 ()

A. $a^m + a^m$

B. $a^m \cdot a^2$

C. $(a^m)^m$

D. $(a^m)^2$

【分析】直接利用合并同类项法则、同底数幂的乘法运算法则、幂的乘方运算法则分别计算得出答案.

【解答】解：A、 $a^m + a^m = 2a^m$ ，故此选项不合题意；

B、 $a^m \cdot a^2 = a^{m+2}$ ，故此选项不合题意；

C、 $(a^m)^m = a^{m^2}$ ，故此选项不合题意；

D、 $(a^m)^2 = a^{2m}$ ，故此选项符合题意.

故选：D.

【点评】此题主要考查了合并同类项、同底数幂的乘法运算、幂的乘方运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

2. (4 分) 下列等式成立的是 ()

A. $(\sqrt{3})^2 = 3$

B. $\sqrt{(-3)^2} = -3$

C. $\sqrt{3^3} = 3$

D. $(-\sqrt{3})^2 = -3$

【分析】根据二次根式的性质把各个二次根式化简，判断即可.

【解答】解： $(\sqrt{3})^2 = 3$ ，A 正确；

$\sqrt{(-3)^2} = 3$ ，B 错误；

$\sqrt{3^3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ，C 错误；

$(-\sqrt{3})^2 = 3$ ，D 错误；

故选：A.

【点评】本题考查的是二次根式的化简，掌握二次根式的性质： $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

3. (4 分) 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，那么实数 m 的值可以是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【分析】利用判别式的意义得到 $\Delta = (-2)^2 - 4m > 0$ ，解不等式得到 m 的范围，然后

对各选项进行判断.

【解答】解: 根据题意得 $\Delta = (-2)^2 - 4m > 0$,

解得 $m < 1$,

所以 m 可以取 0.

故选: A.

【点评】本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

4. (4 分) 甲、乙、丙、丁四位同学本学期 5 次 50 米短跑成绩的平均数 $\bar{x}$ (秒) 及方差 S^2 (秒²) 如表所示. 如果从这四位同学中选出一位成绩较好且状态稳定的同学参加学校比赛, 那么应该选的同学是 ()

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	7	7	7.5	7.5
S^2	2.1	1.9	2	1.8

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【分析】方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大, 则平均值的离散程度越大, 稳定性也越小; 反之, 则它与其平均值的离散程度越小, 稳定性越好.

【解答】解: $\because$ 乙的平均分最好, 方差最小, 最稳定,

$\therefore$ 应选乙.

故选: B.

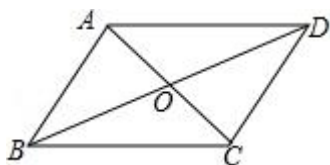
【点评】本题考查了方差, 正确理解方差的意义是解题的关键.

5. (4 分) 四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 互相平分. 添加下列条件, 一定能判定四边形 $ABCD$ 为菱形的是 ()

- A. $\angle ABD = \angle BDC$ B. $\angle ABD = \angle BAC$ C. $\angle ABD = \angle CBD$ D. $\angle ABD = \angle BCA$

【分析】先由对角线 AC 、 BD 互相平分得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 再按照平行四边形基础上菱形的判定方法: ①一组邻边相等的平行四边形是菱形; ②对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 逐个选项分析即可.

【解答】解: 如图所示, 设四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 交于点 O ,



$\because AC$ 、 BD 互相平分，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

选项 A ，由平行四边形的性质可知 $AB \parallel DC$ ，则 $\angle ABD = \angle BDC$ ，从而 A 不符合题意；

选项 B ， $\angle ABD = \angle BAC$ ，则 $AO = BO$ ，再结合对角线 AC 、 BD 互相平分，可知 $AC = BD$ ，

从而平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故 B 不符合题意；

选项 C ，由平行四边形的性质可知 $AD \parallel BC$ ，从而 $\angle ADB = \angle CBD$ ，

当 $\angle ABD = \angle CBD$ 时， $\angle ADB = \angle ABD$ ，故 $AB = AD$ ，

由一组邻边相等的平行四边形的菱形可知， C 符合题意；

选项 D ， $\angle ABD = \angle BCA$ ，得不出可以判定四边形 $ABCD$ 为菱形的条件，故 D 不符合题意．

综上，只有选项 C 一定能判定四边形 $ABCD$ 为菱形．

故选： C ．

【点评】 本题考查了菱形的判定、平行四边形的判定等知识点，熟练掌握菱形的判定方法是解题的关键．

6. (4 分) 如果线段 AM 和线段 AN 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中线和高的，那么下列判断正确的是 ()

A. $AM > AN$

B. $AM \geq AN$

C. $AM < AN$

D. $AM \leq AN$

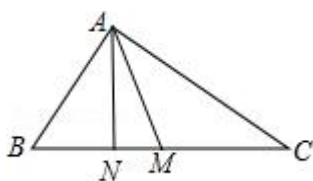
【分析】 根据三角形的高的概念得到 $AD \perp BC$ ，根据垂线段最短判断．

【解答】 解： $\because$ 线段 AN 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高，

$\therefore AD \perp BC$ ，

由垂线段最短可知， $AM \geq AN$ ，

故选： B ．



【点评】 本题考查的是三角形的角平分线、中线和高的概念，掌握垂线段最短是解题的关键．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $9a^3b \div 3a^2 = \underline{3ab}$.

【分析】直接利用整式的除法运算法则计算得出答案.

【解答】解：原式 $= 3ab$.

故答案为： $3ab$.

【点评】此题主要考查了整式的除法运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

8.（4 分）如果代数式 $\frac{2}{3-x}$ 在实数范围内有意义，那么实数 x 的取值范围是 $\underline{x \neq 3}$.

【分析】根据分式有意义的条件是分母不为 0 求解可得.

【解答】解：根据题意知 $3 - x \neq 0$,

解得 $x \neq 3$,

故答案为： $x \neq 3$.

【点评】本题主要考查分式有意义的条件，解题的关键是掌握分式有意义的条件是分母不等于零.

9.（4 分）方程 $\sqrt{x+1} = 4$ 的解是 $\underline{x = 15}$.

【分析】将无理方程化为一元一次方程，然后求解即可.

【解答】解：原方程变形为： $x+1 = 16$,

$\therefore x = 15$,

$x = 15$ 时，被开方数 $x+1 = 16 > 0$ ‘

$\therefore$ 方程的解为 $x = 15$.

故答案为 $x = 15$.’

【点评】本题考查了无理方程，将无理方程化为一元一次方程是解题的关键.

10.（4 分）二元一次方程 $x+2y = 3$ 的正整数解是 $\underline{\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}}$.

【分析】把 y 看做已知数求出 x ，即可确定出正整数解.

【解答】解：方程 $x+2y = 3$,

变形得： $x = -2y+3$,

当 $y = 1$ 时， $x = 1$,

则方程的正整数解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

【点评】此题考查了解二元一次方程, 解题的关键是将 y 看做已知数求出 x .

11. (4分) 从分别写有数字 1, 2, 4 的三张相同卡片中任取两张, 如果把所抽取卡片上的两个数字分别作为点 M 的横坐标和纵坐标, 那么点 M 在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上的概率是 $\frac{1}{3}$.

【分析】列表得出所有等可能的情况, 然后判断落在双曲线上点的情况数, 即可求出点 M 在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上的概率.

【解答】解: 列表如下:

	1	2	4
1		(2, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)		(4, 2)
4	(1, 4)	(2, 4)	

所有可能的情况有 6 种;

落在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上的点有: (1, 4), (4, 1) 共 2 个,

$$\text{则 } P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

【点评】此题考查了列表法与树状图法, 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

12. (4分) 如果函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限, 那么 y 的值随 x 的值增大而减小. (填“增大”或“减小”)

【分析】根据正比例函数的性质进行解答即可.

【解答】解: 函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限, 那么 y 的值随 x 的值增大而减小,

故答案为: 减小.

【点评】此题主要考查了正比例函数的性质, 关键是掌握正比例函数的性质: 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线, 当 $k > 0$ 时, 该直线经过第一、三象限, 且 y 的值随 x 的值增大而增大; 当 $k < 0$ 时, 该直线经过第二、四象限, 且 y 的值随 x 的值增大而减小.

13. (4分) 据国家统计局数据, 2019 年全年国内生产总值接近 100 万亿, 比 2018 年增长

6.1%. 假设 2020 年全年国内生产总值的年增长率保持不变, 那么 2020 年的全年国内生产总值将达到 106.1 万亿.

【分析】利用增长率的意义得到 2020 年全年国内生产总值 $100 \times (1+6.1\%)$, 然后进行计算即可.

【解答】解: 根据题意得:

$$100 \times (1+6.1\%) = 106.1 \text{ (万亿)},$$

答: 2020 年的全年国内生产总值将达到 106.1 万亿;

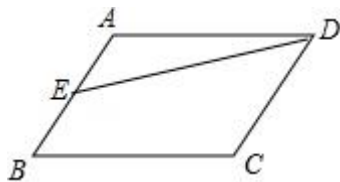
故答案为: 106.1.

【点评】本题考查的是有理数的混合运算, 掌握有理数的混合运算法则、正确列出算式是解题的关键.

14. (4 分) 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 AB 的中点. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{DE} =$ $-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$. (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

【分析】由三角形法则可知: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$, 只要求出 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AE}$ 即可解决问题.

【解答】解: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$\because E$ 是 AB 的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE},$$

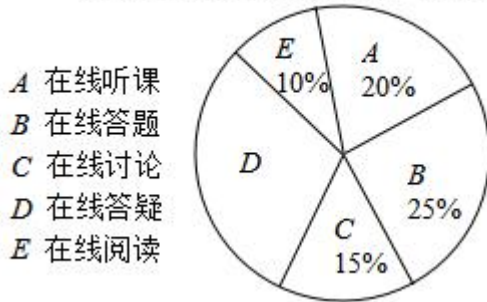
$$\therefore \overrightarrow{DE} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\text{故答案为: } -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

【点评】本题考查平面向量, 三角形法则, 平行四边形的性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

15. (4分) 某校计划为全体 1200 名学生提供以下五种在线学习的方式：在线听课、在线答题、在线讨论、在线答疑和在线阅读. 为了解学生需求, 该校随机对部分学生进行了“你对哪类在线学习方式最感兴趣”的调查, 并根据调查结果绘制成扇形统计图(如图). 由这个统计图可知, 全校学生中最喜欢“在线答疑”的学生人数约为 360 人.

抽取的学生最感兴趣的学习方式的扇形图



【分析】先根据各部分所占百分比之和为 1 求出 D 类型人数所占百分比, 再乘以总人数即可得.

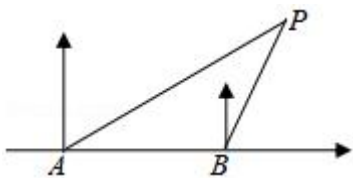
【解答】解: $\because$ 最喜欢“在线答疑”的学生人数占被调查人数的百分比为 $1 - (20\% + 25\% + 15\% + 10\%) = 30\%$,

$\therefore$ 全校学生中最喜欢“在线答疑”的学生人数约为 $1200 \times 30\% = 360$ (人),

故答案为: 360.

【点评】本题主要考查扇形统计图, 解题的关键是掌握扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分数. 通过扇形统计图可以很清楚地表示出各部分数量同总数之间的关系. 用整个圆的面积表示总数 (单位 1), 用圆的扇形面积表示各部分占总数的百分数.

16. (4分) 如图, 一艘轮船由西向东航行, 在 A 处测得灯塔 P 在北偏东 60° 的方向, 继续向东航行 40 海里后到 B 处, 测得灯塔 P 在北偏东 30° 的方向, 此时轮船与灯塔之间的距离是 40 海里.



【分析】根据已知方向角得出 $\angle P = \angle PAB = 30^\circ$, 进而得出对应边关系即可得出答案.

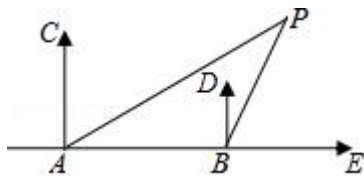
【解答】解: 如图所示: 由题意可得, $\angle PAB = 30^\circ$, $\angle DBP = 30^\circ$,

故 $\angle PBE = 60^\circ$,

则 $\angle P = \angle PAB = 30^\circ$,

可得: $AB = BP = 40$ 海里.

故答案为: 40.

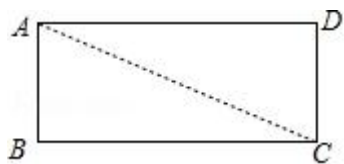


【点评】此题主要考查了方向角, 正确得出 $\angle P = \angle PAB = 30^\circ$ 是解题关键.

17. (4分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $BC = 12$. 如果分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切, 且圆 A 与直线 BC 相交, 点 D 在圆 A 外, 那么圆 C 的半径长 r 的取值范围是 $1 < r < 8$.

【分析】四边形 $ABCD$ 是矩形, 可得 $\angle B = 90^\circ$, $AD = BC = 12$, $AB = 5$, 根据勾股定理, 得 $AC = 13$, 分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切, 且圆 A 与直线 BC 相交, 点 D 在圆 A 外, 根据圆与圆相切的性质即可求出 r 的取值范围.

【解答】解: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle B = 90^\circ$, $AD = BC = 12$, $AB = 5$,

根据勾股定理, 得

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13,$$

$\because$ 分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切, 且圆 A 与直线 BC 相交,

$$\therefore 13 - 5 = 8,$$

$\because$ 点 D 在圆 A 外,

$$\therefore 13 - 12 = 1,$$

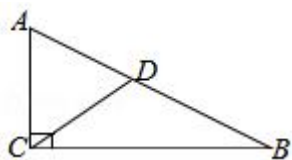
$$\therefore 1 < r < 8,$$

所以圆 C 的半径长 r 的取值范围是 $1 < r < 8$.

故答案为: $1 < r < 8$.

【点评】本题考查了相切两圆的性质、切线的性质、点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系, 解决本题的关键是综合运用以上知识.

18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, CD 是斜边 AB 上的中线, 如果将 $\triangle BCD$ 沿 CD 所在直线翻折, 点 B 落在点 E 处, 联结 AE , 那么 $\angle CAE$ 的度数是 125 度.



【分析】依据折叠的性质即可得到 $\angle DAE$ 的度数, 再根据三角形内角和定理即可得到 $\angle BAC$ 的度数, 进而得出 $\angle CAE$ 的度数.

【解答】解: 如图所示, $\because CD$ 是斜边 AB 上的中线,

$$\therefore CD = BD = AD,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle B = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 110^\circ,$$

由折叠可得, $\angle CDE = \angle CDB = 110^\circ$, $DE = DB = AD$,

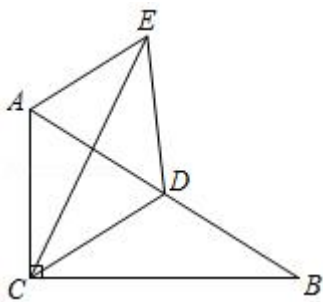
$$\therefore \angle BDE = 360^\circ - 110^\circ \times 2 = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BDE = 70^\circ,$$

又 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$,

$$\therefore \angle CAE = 55^\circ + 70^\circ = 125^\circ,$$

故答案为: 125.



【点评】本题主要考查了折叠问题以及直角三角形斜边上中线的性质, 在直角三角形中, 斜边上的中线等于斜边的一半.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $8^2 \times 2^{-2} - |\sqrt{2} - 2| + 2020^0$.

【分析】直接利用二次根式的性质和零指数幂的性质、绝对值的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式 $= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} - (2 - \sqrt{2}) + 1$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + \sqrt{2} + 1$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

20. (10分) 先化简，再求值： $\frac{x-3}{x^2+6x+9} \div (1 - \frac{6}{x+3})$ ，其中 $x = \sqrt{3}$.

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 x 的值代入计算可得.

【解答】解：原式 $= \frac{x-3}{(x+3)^2} \div \frac{x+3-6}{x+3}$

$$= \frac{x-3}{(x+3)^2} \cdot \frac{x+3}{x-3} = \frac{1}{x+3},$$

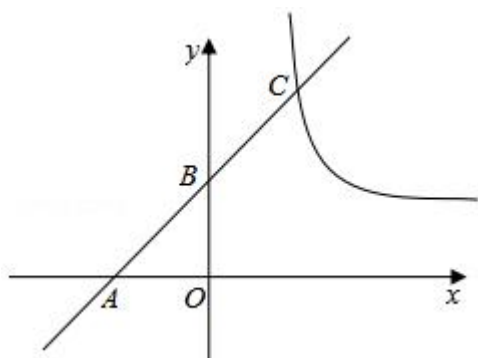
当 $x = \sqrt{3}$ 时，原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}+3} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

21. (10分) 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ ，与 y 轴的正半轴交于点 B ，与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 C ，且 $AB = BC$ ，点 C 的纵坐标为 4.

(1) 求直线 AB 的表达式；

(2) 过点 B 作 $BD \parallel x$ 轴，交反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象于点 D ，求线段 CD 的长度.



【分析】(1) 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴，垂足为 H ，如图，利用平行线分线段成比例得到 $\frac{AO}{OH} = \frac{AB}{BC} = 1$ ，则 $OH = OA = 2$ ，则点 C 的坐标为 $(2, 4)$ ，然后利用待定系数法求直线 AB 的解析式；

(2) 把 C 点坐标代入 $y = \frac{m}{x}$ 中求出 $m = 8$, 再利用直线解析式确定点 B 的坐标为 $(0, 2)$, 接着利用 $BD \parallel x$ 轴得到点 D 纵坐标为 2, 根据反比例解析式确定点 D 坐标, 然后根据两点间的距离公式计算 CD 的长.

【解答】解: (1) 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 如图,

$$\therefore \frac{AO}{OH} = \frac{AB}{BC} = 1,$$

$$\because A(-2, 0),$$

$$\therefore AO = 2,$$

$$\therefore OH = OA = 2,$$

$$\because \text{点 } C \text{ 的纵坐标为 } 4,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (2, 4),$$

设直线 AB 的表达式 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

$$\text{把 } A(-2, 0), C(2, 4) \text{ 代入得 } \begin{cases} -2k + b = 0 \\ 2k + b = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的表达式 } y = x + 2;$$

(2) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象过点 $C(2, 4)$,

$$\therefore m = 2 \times 4 = 8,$$

$\because$ 直线 $y = x + 2$ 与 y 轴的正半轴交于点 B ,

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (0, 2),$$

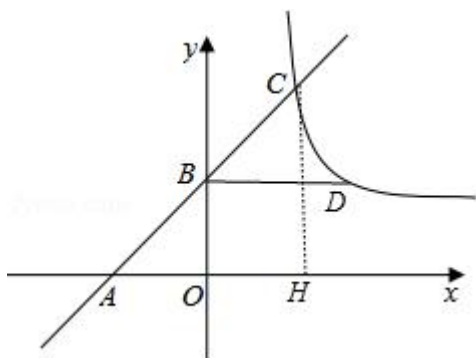
$\because BD \parallel x$ 轴,

$$\therefore \text{点 } D \text{ 纵坐标为 } 2,$$

$$\text{当 } y = 2 \text{ 时, } \frac{8}{x} = 2, \text{ 解得 } x = 4,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 坐标为 } (4, 2),$$

$$\therefore CD = \sqrt{(2-4)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$



【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：求反比例函数与一次函数的交点坐标，把两个函数关系式联立成方程组求解，若方程组有解则两者有交点，方程组无解，则两者无交点．也考查了待定系数法求函数解析式．

22. (10 分) 如图 1，由于四边形具有不稳定性，因此在同一平面推矩形的边可以改变它的形状（推移过程中边的长度保持不变）. 已知矩形 $ABCD$ ， $AB = 4\text{cm}$ ， $AD = 3\text{cm}$ ，固定边 AB ，推边 AD ，使得点 D 落在点 E 处，点 C 落在点 F 处.

(1) 如图 2，如果 $\angle DAE = 30^\circ$ ，求点 E 到边 AB 的距离；

(2) 如图 3，如果点 A 、 E 、 C 三点在同一直线上，求四边形 $ABFE$ 的面积.

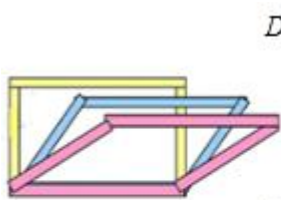


图1

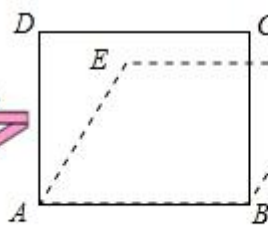


图2

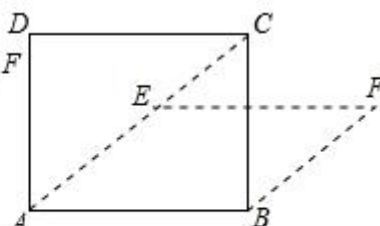


图3

【分析】 (1) 过点 E 作 $EH \perp AB$ 轴，垂足为 H ，根据矩形的性质得到 $\angle DAB = 90^\circ$ ， $AD \parallel EH$ ，根据平行线的性质得到 $\angle DAE = \angle AEH$ ，求得 $\angle AEH = 30^\circ$ ，解直角三角形即可得到结论；

(2) 过点 E 作 $EH \perp AB$ ，垂足为 H ．根据矩形的性质得到 $AD = BC$ ．得到 $BC = 3\text{cm}$ ．根据勾股定理得到 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\text{cm}$ ，根据平行线分线段成比例定理得到 $EH = \frac{9}{5}\text{cm}$ ，根据四边形的性质得到 $AD = AE = BF$ ， $AB = DC = EF$ ．求得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，于是得到结论．

【解答】 解：(1) 如图 2，过点 E 作 $EH \perp AB$ 轴，垂足为 H ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle DAB = 90^\circ$ ，

$$\therefore AD \parallel EH,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEH,$$

$$\because \angle DAE = 30^\circ, \therefore \angle AEH = 30^\circ.$$

在直角 $\triangle AEH$ 中, $\angle AHE = 90^\circ$,

$$\therefore EH = AE \cdot \cos \angle AEH,$$

$$\because AD = AE = 3\text{cm},$$

$$\therefore EH = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm},$$

即点 E 到边 AB 的距离是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$;

(2) 如图3, 过点 E 作 $EH \perp AB$, 垂足为 H .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC,$$

$$\because AD = 3\text{cm},$$

$$\therefore BC = 3\text{cm},$$

在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\text{cm},$$

$$\because EH \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{EH}{BC},$$

$$\because AE = AD = 3\text{cm},$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{EH}{4},$$

$$\therefore EH = \frac{9}{5}\text{cm},$$

$\because$ 推移过程中边的长度保持不变,

$$\therefore AD = AE = BF, AB = DC = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore S_{\text{平行四边形}ABFE} = AB \cdot EH = 4 \times \frac{9}{5} = \frac{36}{5}\text{cm}^2.$$

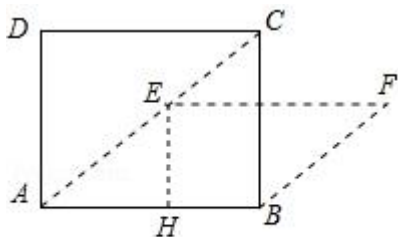


图3

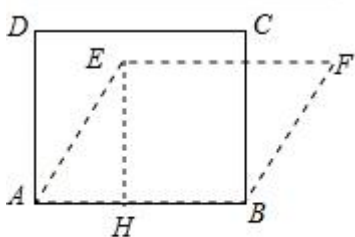


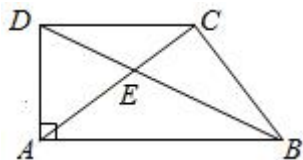
图2

【点评】 本题考查了平行四边形的判定和性质，解直角三角形，矩形的性质，正确的理解题意是解题的关键．

23. (12分) 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $CD \parallel AB$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 E ， $AC \perp BC$ ，垂足为点 C ，且 $BC^2 = CE \cdot CA$ ．

(1) 求证： $AD = DE$ ；

(2) 过点 D 作 AC 的垂线，交 AC 于点 F ，求证： $CE^2 = AE \cdot AF$ ．



【分析】 (1) 根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle BCE \sim \triangle ACB$ ，根据相似三角形的性质得到 $\angle CBE = \angle CAB$ ，根据等角的余角相等得到 $\angle BEC = \angle DAE$ ，根据等腰三角形的判定定理证明；

(2) 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{CE}{EF} = \frac{BE}{DE}$ ， $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$ ，得到 $\frac{CE}{EF} = \frac{AE}{CE}$ ，整理得到 $CE^2 = AE \cdot EF$ ，根据等腰三角形的三线合一得到 $AF = EF$ ，证明结论．

【解答】 证明：(1) $\because BC^2 = CE \cdot CA$ ，

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{CA}{BC}, \text{ 又 } \angle ECB = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CAB,$$

$$\because AC \perp BC, \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC + \angle CBE = 90^\circ, \quad \angle DAE + \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle DEA,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA,$$

$$\therefore AD = DE;$$

$$(2) \because DF \perp AC, \quad AC \perp BC,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore DF \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{CE}{EF} = \frac{BE}{DE},$$

$$\because DC \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE},$$

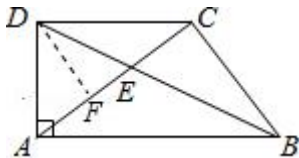
$$\therefore \frac{CE}{EF} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = AE \cdot EF,$$

$$\because AD = DE, \quad DF \perp AC,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore CE^2 = AE \cdot AF.$$



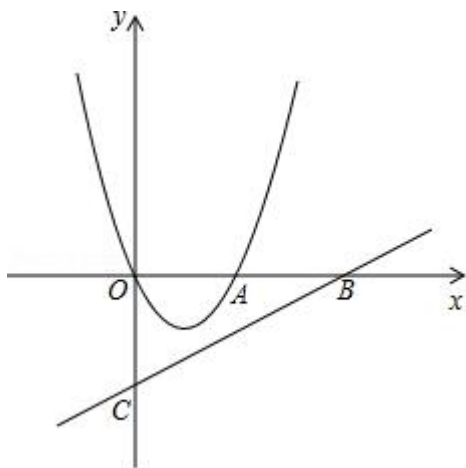
【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、直角梯形的概念，掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键。

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$. 直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 B ，与 y 轴交于点 C .

(1) 求这条抛物线的表达式和顶点的坐标；

(2) 将抛物线 $y = x^2 + bx$ 向右平移，使平移后的抛物线经过点 B ，求平移后抛物线的表达式；

(3) 将抛物线 $y = x^2 + bx$ 向下平移，使平移后的抛物线交 y 轴于点 D ，交线段 BC 于点 P 、 Q ，(点 P 在点 Q 右侧)，平移后抛物线的顶点为 M ，如果 $DP \parallel x$ 轴，求 $\angle MCP$ 的正弦值.



【分析】(1) 根据待定系数法即可求得抛物线的解析式，化成顶点式即可求得顶点坐标；

(2) 根据图象上点的坐标特征求得 $B(4, 0)$ ，然后分两种情况讨论求得即可；

(3) 设向下平移后的抛物线表达式是： $y = x^2 - 2x + n$ ，得点 $D(0, n)$ ，即可求得 $P(2, n)$ ，代入 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 求得 $n = -1$ ，即可求得平移后的解析式为 $y = x^2 - 2x - 1$ 。求得顶点坐标，然后解直角三角形即可求得结论。

【解答】解：(1) 由题意，抛物线 $y = x^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$ ，

得 $0 = 4 + 2b$ ，解得 $b = -2$ ，

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y = x^2 - 2x$ 。

$\because y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ ，

$\therefore$ 它的顶点 C 的坐标是 $(1, -1)$ 。

(2) $\because$ 直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 B ，

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(4, 0)$ 。

① 将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向右平移 2 个单位，使得点 A 与点 B 重合，

此时平移后的抛物线表达式是 $y = (x - 3)^2 - 1$ 。

② 将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向右平移 4 个单位，使得点 O 与点 B 重合，

此时平移后的抛物线表达式是 $y = (x - 5)^2 - 1$ 。

(3) 如图，设向下平移后的抛物线表达式是： $y = x^2 - 2x + n$ ，得点 $D(0, n)$ 。

$\because DP \parallel x$ 轴，

$\therefore$ 点 D 、 P 关于抛物线的对称轴直线 $x = 1$ 对称，

$\therefore P(2, n)$ 。

$\because$ 点 P 在直线 BC 上，

$$\therefore n = \frac{1}{2} \times 2 - 2 = -1.$$

$\therefore$ 平移后的抛物线表达式是: $y = x^2 - 2x - 1$.

$\therefore$ 新抛物线的顶点 M 的坐标是 $(1, -2)$.

$\therefore MC \parallel OB$,

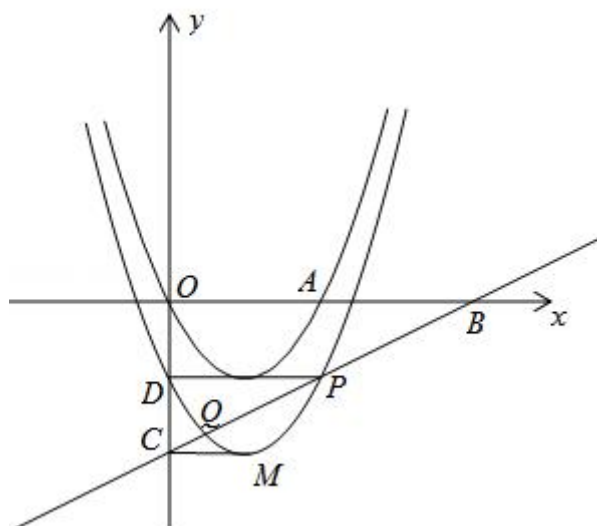
$\therefore \angle MCP = \angle OBC$.

在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, $\sin \angle OBC = \frac{OC}{BC}$,

由题意得: $OC = 2$, $BC = 2\sqrt{5}$,

$$\therefore \sin \angle MCP = \sin \angle OBC = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

即 $\angle MCP$ 的正弦值是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



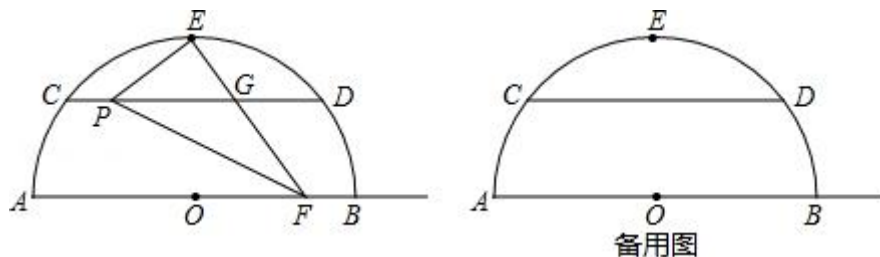
【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 二次函数的图象与几何变换, 待定系数法求二次函数的解析式以及二次函数的性质, 解直角三角形等, 正确求得平移后的解析式是解题的关键.

25. (14 分) 如图, 已知半圆 $\odot O$ 的直径 $AB = 10$, 弦 $CD \parallel AB$, 且 $CD = 8$, E 为弧 CD 的中点, 点 P 在弦 CD 上, 联结 PE , 过点 E 作 PE 的垂线交弦 CD 于点 G , 交射线 OB 于点 F .

(1) 当点 F 与点 B 重合时, 求 CP 的长;

(2) 设 $CP = x$, $OF = y$, 求 y 与 x 的函数关系式及定义域;

(3) 如果 $GP = GF$, 求 $\triangle EPF$ 的面积.



【分析】(1) 如图 1, 连接 EO , 交弦 CD 于点 H , 根据垂径定理得 $EO \perp AB$, 由勾股定理计算 $OH = \sqrt{CO^2 - CH^2} = 3$, 可得 EH 的长, 证明 $\angle HPE = \angle HGE = 45^\circ$, 则 $PE = GE$. 从而可得结论;

(2) 如图 2, 连接 OE , 证明 $\triangle PEH \sim \triangle EFO$, 列比例式可得结论;

(3) 如图 3, 作 $PQ \perp AB$, 分别计算 PE 和 EF 的长, 利用三角形面积公式可得结论.

【解答】解: (1) 连接 EO , 交弦 CD 于点 H ,

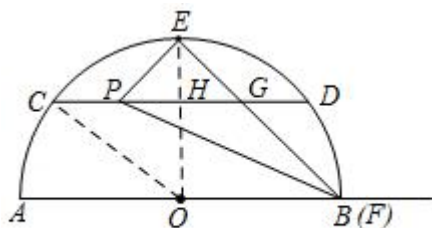


图1

$\because E$ 为弧 CD 的中点,

$\therefore EO \perp AB$,

$\because CD \parallel AB$,

$\therefore OH \perp CD$,

$\therefore CH = \frac{1}{2}CD$,

连接 CO ,

$\because AB = 10, CD = 8$,

$\therefore CO = 5, CH = 4$,

$\therefore OH = \sqrt{CO^2 - CH^2} = 3$,

$\therefore EH = EO - OH = 2$,

$\because$ 点 F 与点 B 重合,

$\therefore \angle OBE = \angle HGE = 45^\circ$,

$\therefore PE \perp BE$,

$$\therefore \angle HPE = \angle HGE = 45^\circ \quad ,$$

$$\therefore PE = GE,$$

$$\therefore PH = HG = 2,$$

$$\therefore CP = CH - PH = 4 - 2 = 2;$$

(2) 如图 2, 连接 OE , 交 CD 于 H ,

$$\because \angle PEH + \angle OEF = 90^\circ, \quad \angle OFE + \angle OEF = 90^\circ,$$

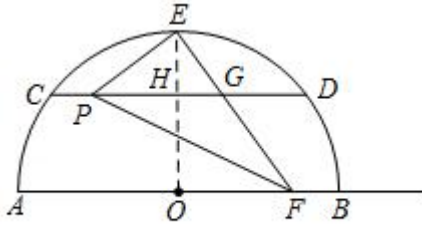


图2

$$\therefore \angle PEH = \angle OFE,$$

$$\because \angle PHE = \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PEH \sim \triangle EFO,$$

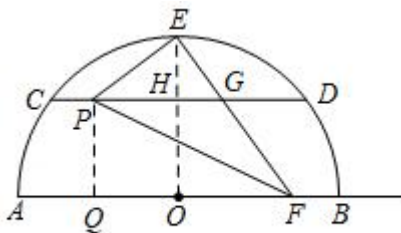
$$\therefore \frac{EH}{FO} = \frac{PH}{EO},$$

$$\because EH = 2, FO = y, PH = 4 - x, EO = 5,$$

$$\therefore \frac{2}{y} = \frac{4-x}{5},$$

$$\therefore y = \frac{10}{4-x} \quad (0 \leq x < 3).$$

(3) 如图 3, 过点 P 作 $PQ \perp AB$, 垂足为 Q ,



$$\because GP = GF,$$

$$\therefore \angle GPF = \angle GFP,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle GPF = \angle PFQ,$$

$$\because PE \perp EF,$$

$$\therefore PQ = PE,$$

由 (2) 可知, $\triangle PEH \sim \triangle EFO$,

$$\therefore \frac{PE}{EF} = \frac{PH}{EO},$$

$$\therefore PQ = OH = 3,$$

$$\therefore PE = 3,$$

$$\therefore EH = 2,$$

$$\therefore PH = \sqrt{PE^2 - EH^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{3}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EF = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle EPF} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot EF = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{5} = \frac{9\sqrt{5}}{2}.$$

【点评】 本题属于圆综合题, 考查了垂径定理, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造相似三角形列比例式解决问题, 属于中考压轴题.