

2020 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

参考答案评分标准

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. A ; 2. B ; 3. B ; 4. B ; 5. C ; 6. D .

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. $-3a+4b$; 8. $\frac{32}{5}$; 9. 6 ; 10. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

11. 答案不唯一 (如 $y=x^2-2x$) ; 12. $2\sqrt{5}$; 13. $\frac{7}{9}$;

14. $y=-\frac{3}{2}x^2+12x$; 15. 9.6 ; 16. 8 或 $\frac{9}{2}$; 17. $\frac{9}{2}$; 18. $\frac{13\sqrt{3}}{18}-1$.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (本题满分 10 分)

解：原式 $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1$ (2+2+2+2 分)

$= 0$ (2 分)

20. (本题满分 10 分)

(1) $\frac{1}{3}a+b$; (5 分)

(2) 图略. (画图 4 分，结论 1 分)

21. (本题满分 10 分)

解：(1) 如图，过点 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为点 H (1 分)

$\therefore \angle CBA = 45^\circ$,

$\therefore BH = CH$ (1 分)

设 $CH = x$, 则 $BH = x$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACH$ 中, $\angle CAB = 30^\circ$,

$$\therefore AH = \sqrt{3}CH = \sqrt{3}x . \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore x + \sqrt{3}x = 50 . \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{解得: } x = \frac{50}{\sqrt{3}+1} \approx 18 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore 18+1=19 .$$

答: 计算得到的无人机的高约为 $19m$. $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

(2) 过点 F 作 $FG \perp AB$, 垂足为点 G . $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

在 $Rt\triangle AGF$ 中, $\tan \angle FAG = \frac{FG}{AG}$. $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$\therefore AG = \frac{FG}{\tan 40} \approx \frac{18}{0.84} \approx 21.4 . \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } AH = \sqrt{3}CH \approx 31.14 .$$

$$\therefore \frac{31.14-21.4}{2} \approx 5, \text{ 或 } \frac{31.14+21.4}{2} \approx 26$$

答: 计算得到的无人机的平均速度约为 5 米/秒或 26 米/秒. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

22. (本题满分 10 分)

(1) 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$ 的开口方向向下, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

顶点 A 的坐标是 $(-2, 3)$, $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

抛物线的变化情况是: 在对称轴直线 $x = -2$ 左侧部分是上升的, 右侧部分是下降的. (2 分)

(2) 设直线 BC 与对称轴交于点 D , 则 $AD \perp BD$.

设线段 AD 的长为 m , 则 $BD = AD \cdot \cot \angle ABC = 2m$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$\therefore$ 点 B 的坐标可表示为 $(-2m-2, 3-m)$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

代入 $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$, 得

$$3-m = -\frac{1}{4}(-2m-2)^2 - (-2m-2) + 2.$$

解得 $m_1 = 0$ (舍), $m_2 = 1$ (1 分)

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-4, 2)$ (1 分)

23. (本题满分 12 分)

(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CD \parallel AB, AD \parallel BC,$

$\therefore \angle CDE = \angle DAB, \angle CBF = \angle DAB.$

$\therefore \angle CDE = \angle CBF$ (2 分)

$\because CE \perp AE, CF \perp AF,$

$\therefore \angle CED = \angle CFB = 90^\circ$ (1 分)

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBF$ (1 分)

$\therefore \frac{BC}{BF} = \frac{CD}{DE}$ (1 分)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BC = AD, CD = AB. \therefore \frac{AD}{BF} = \frac{AB}{DE}.$

$\therefore AD \cdot DE = AB \cdot BF$ (1 分)

(2) $\because \frac{CF}{DE} = \frac{AC}{CD}, \angle CED = \angle CFB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle CDE$ (2 分)

又 $\because \triangle CDE \sim \triangle CBF,$

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle CBF$ (1 分)

$\therefore \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AC^2}{BC^2}$ (1 分)

$\therefore \triangle ACF$ 与 $\triangle CBF$ 等高,

$$\therefore \frac{S_{ACF}}{S_{CBF}} = \frac{AF}{BF} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AF}{BF} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

24. (本题满分 12 分)

(1) 由题意, 可知原抛物线顶点是 $(1, 4)$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

设影子抛物线表达式是 $y = x^2 + n$, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

将 $(1, 4)$ 代入 $y = x^2 + n$, 解得 $n = 3$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

所以“影子抛物线”的表达式是 $y = x^2 + 3$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

(2) 设原抛物线表达式是 $y = -(x + m)^2 + k$,

则原抛物线顶点是 $(-m, k)$.

将 $(-m, k)$ 代入 $y = -x^2 + 5$, 得 $-(-m)^2 + 5 = k$ ① $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

将 $(1, 0)$ 代入 $y = -(x + m)^2 + k$, $0 = -(1 + m)^2 + k$ ② $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{由①、②解得 } \begin{cases} m_1 = 1 \\ k_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} m_2 = -2 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

所以, 原抛物线表达式是 $y = -(x + 1)^2 + 4$ 或 $y = -(x - 2)^2 + 1$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

(3) 结论成立. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

设影子抛物线表达式是 $y = ax^2 + n$. 原抛物线于 y 轴交点坐标为 $(0, c)$

则两条原抛物线可表示为 $y_1 = ax^2 + b_1x + c$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + b_2x + c$ (其中 a 、 b_1 、 b_2 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$, $b_1 \neq b_2$)

由题意, 可知两个抛物线的顶点分别是 $P_1(-\frac{b_1}{2a}, \frac{4ac - b_1^2}{4a})$ 、 $P_2(-\frac{b_2}{2a}, \frac{4ac - b_2^2}{4a})$

将 P_1 、 P_2 分别代入 $y = ax^2 + n$,

$$\text{得 } \begin{cases} a(-\frac{b_1}{2a})^2 + n = \frac{4ac - b_1^2}{4a} \\ a(-\frac{b_2}{2a})^2 + n = \frac{4ac - b_2^2}{4a} \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

消去 n 得 $b_1^2 = b_2^2$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$\therefore b_1 \neq b_2$, $\therefore b_1 = -b_2$

$\therefore P_1(\frac{b_2}{2a}, \frac{4ac - b_2^2}{4a})$, $P_2(-\frac{b_2}{2a}, \frac{4ac - b_2^2}{4a})$, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$\therefore P_1$ 、 P_2 关于 y 轴对称.

25. (本题满分 14 分)

(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB=BC-AC=2, \quad \angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ.$$

$$\because AD=AC, \therefore AD=AB. \therefore \angle ABD=\angle ADB.$$

$$\because \angle ABD+\angle ADB+\angle BAC+\angle CAD=180^\circ, \quad \angle CAD=90^\circ,$$

$$\angle ABD=15^\circ. \therefore \angle EBC=45^\circ. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{过点 } E \text{ 作 } EG \perp BC, \text{ 垂足为点 } G. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{设 } AE=x, \text{ 则 } EC=2-x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CGE \text{ 中, } \angle ACB=60^\circ,$$

$$\therefore EG=EC \cdot \sin \angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x), \quad CG=EC \cdot \cos \angle ACB=1-\frac{1}{2}x \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore BG=2-EG=1+\frac{1}{2}x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BGE \text{ 中, } \angle EBC=45^\circ,$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x). \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } x=4-2\sqrt{3}.$$

$$\text{所以线段 } AE \text{ 的长是 } 4-2\sqrt{3} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ ①设 } \angle ABD=\alpha, \text{ 则 } \angle BDA=\alpha, \quad \angle DAC=\angle BAD-\angle BAC=120^\circ-2\alpha$$

$$\because AD=AC, AH \perp CD,$$

$$\therefore \angle CAF=\frac{1}{2}\angle DAC=60^\circ-\alpha \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \because \angle AEF=60^\circ+\alpha, \therefore \angle AFE=60^\circ \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle AFE=\angle ACB.$$

$$\text{又 } \because \angle AEF=\angle BEC, \therefore \triangle AEF \sim \triangle BEC. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{BE^2}{AE^2} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{由 (1) 得在 Rt}\triangle CGE \text{ 中, } BG=1+\frac{1}{2}x, \quad EG=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)$$

$$\therefore BE^2=BG^2+EG^2=x^2-2x+4.$$

$$\therefore y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2} \quad (0 < x < 2) \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \angle CAD < 120^\circ \text{ 时, } AE = \frac{2}{3}; \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } 120^\circ < \angle CAD < 180^\circ \text{ 时, } AE = 1 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$