

2020-2021 学年上海市静安区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. (4 分) 如果 $a \neq 0$ ，那么下列计算正确的是 ()
- A. $(-a)^0 = 0$ B. $(-a)^0 = -1$ C. $-a^0 = 1$ D. $-a^0 = -1$
2. (4 分) 下列多项式中，是完全平方式的为 ()
- A. $x^2 - x + \frac{1}{4}$ B. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ C. $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ D. $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
3. (4 分) 将抛物线 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 平移后与抛物线 $y = 2x^2$ 重合，那么平移的方法可以是 ()
- A. 向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位
- B. 向右平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位
- C. 向左平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位
- D. 向左平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位
4. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BA 、 CA 的延长线上，下列比例式中能判定 $DE \parallel BC$ 的为 ()
- A. $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ B. $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ C. $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$ D. $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{CE}$
5. (4 分) 锐角 α 的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么下列结论中正确的是 ()
- A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $30^\circ < \alpha < 45^\circ$ D. $45^\circ < \alpha < 60^\circ$
6. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， CD 是高，如果 $AB = m$ ， $\angle A = \alpha$ ，那么 CD 的长为 ()
- A. $m \cdot \sin \alpha \cdot \tan \alpha$ B. $m \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- C. $m \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha$ D. $m \cdot \cos \alpha \cdot \cot \alpha$

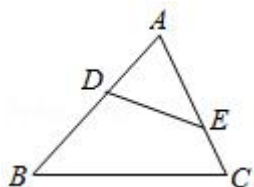
二、填空题（每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) $\frac{3}{2}$ 的相反数是_____.
8. (4 分) 函数 $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为_____.
9. (4 分) 方程 $\sqrt{3-2x} = 2-x$ 的根为_____.
10. (4 分) 二次函数 $y = 2x - 3x^2$ 图象的开口方向是_____.
11. (4 分) 抛物线 $y = 3x^2 - 6$ 的顶点坐标为_____.
12. (4 分) 如果一次函数 $y = (m-2)x + m - 1$ 的图象经过第一、二、四象限，那么常数 m

的取值范围为_____.

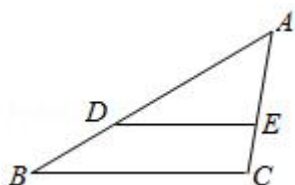
13. (4分) 在二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 图象的上升部分所对应的自变量 x 的取值范围是_____.

14. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $\angle AED = \angle B$, 如果 $AD = 2$, $AE = 3$, $CE = 1$, 那么 BD 长为_____.

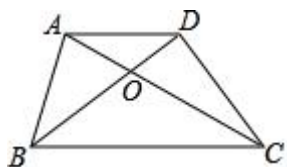


15. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 是重心, $\angle BGC = 90^\circ$, $BC = 8$, 那么 AG 的长为_____.

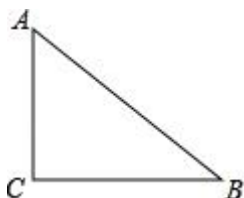
16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 如果 $AB = 12$, $BC = 9$, $AC = 6$, 四边形 $BCED$ 的周长为 21, 那么 DE 的长为_____.



17. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, BD 与 AC 相交于点 O , $OB = 2OD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AO} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的式子表示).



18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $\tan B = \frac{2}{3}$ (如图), 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转后, 点 A 落在斜边 AB 上的点 A' , 点 B 落在点 B' , $A'B'$ 与边 BC 相交于点 D , 那么 $\frac{CD}{A'D}$ 的值为_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

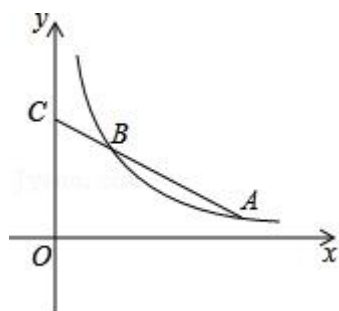
19. (10分) 计算: $\frac{\cot 30^\circ - \cos 45^\circ}{\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}$.

20. (10分) 已知线段 x, y 满足 $\frac{2x+y}{x-y} = \frac{x}{y}$, 求 $\frac{x}{y}$ 的值.

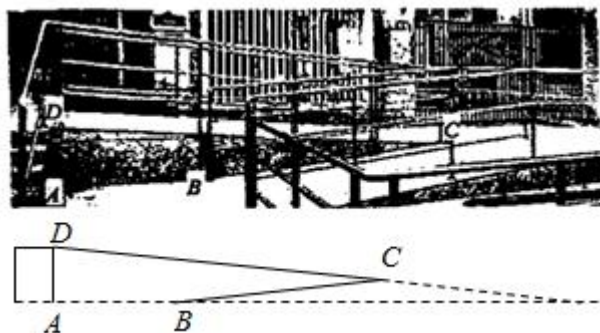
21. (10分) 如图, 点 AB 在第一象限的反比例函数图象上, AB 的延长线与 y 轴交于点 C , 已知点 A, B 的横坐标分别为 6、2, $AB = 2\sqrt{5}$.

(1) 求 $\angle ACO$ 的余弦值;

(2) 求这个反比例函数的解析式.



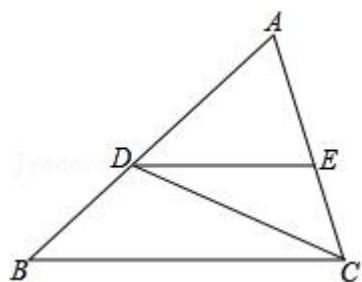
22. (10分) 如图, 一处地铁出入口无障碍通道是转折的斜坡, 沿着坡度相同的斜坡 BC 、 CD 共走 7 米可到出入口, 出入口点 D 距离地面的高 DA 为 0.8 米, 求无障碍通道斜坡的坡度与坡角 (角度精确到 1° , 其他近似数取四个有效数字).



23. (12分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, $AD^2 = AE \cdot AC$.

求证: (1) $\triangle BCD \sim \triangle CDE$;

(2) $\frac{CD^2}{BC^2} = \frac{AD}{AB}$.



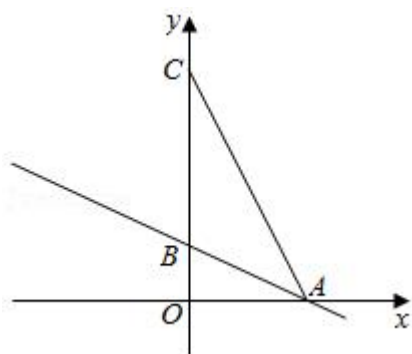
24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + m$ ($m > 0$) 与 x 轴、 y 轴分

别交于点 A , B , 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ ($a \neq 0$) 经过点 A , 且与 y 轴相交于点 C , $\angle OCA = \angle OAB$.

(1) 求直线 AB 的表达式;

(2) 如果点 D 在线段 AB 的延长线上, 且 $AD = AC$, 求经过点 D 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 的表达式;

(3) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 的对称轴与线段 AB 、 AC 分别相交于点 E , F , 且 $EF = 1$, 求此抛物线的顶点坐标.



25. (14分) 已知 $\angle MAN$ 是锐角, 点 B 、 C 在边 AM 上, 点 D 在边 AN 上, $\angle EBD = \angle MAN$, 且 $CE \parallel BD$, $\sin \angle MAN = \frac{3}{5}$, $AB = 5$, $AC = 9$.

(1) 如图 1, 当 CE 与边 AN 相交于点 F 时, 求证: $DF \cdot CE = BC \cdot BE$;

(2) 当点 E 在边 AN 上时, 求 AD 的长;

(3) 当点 E 在 $\angle MAN$ 外部时, 设 $AD = x$, $\triangle BCE$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出定义域.

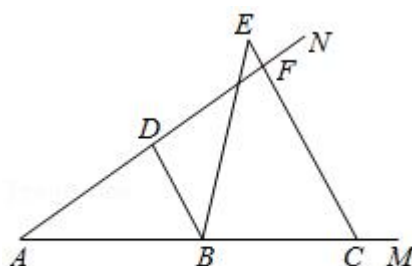
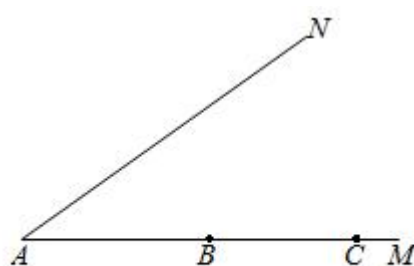


图1



备用图

2020-2021 学年上海市静安区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1.（4 分）如果 $a \neq 0$ ，那么下列计算正确的是（ ）

A. $(-a)^0 = 0$ B. $(-a)^0 = -1$ C. $-a^0 = 1$ D. $-a^0 = -1$

【分析】根据 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)， $0^0 \neq 1$ ，逐项判断即可．

【解答】解： $\because (-a)^0 = 1$ ，

$\therefore$ 选项 A 不符合题意；

$\because (-a)^0 = 1$ ，

$\therefore$ 选项 B 不符合题意；

$\because -a^0 = -1$ ，

$\therefore$ 选项 C 不符合题意；

$\because -a^0 = -1$ ，

$\therefore$ 选项 D 符合题意．

故选：D．

【点评】此题主要考查了零指数幂的运算，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①

$a^0 = 1$ ($a \neq 0$)；② $0^0 \neq 1$ ．

2.（4 分）下列多项式中，是完全平方式的为（ ）

A. $x^2 - x + \frac{1}{4}$ B. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ C. $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ D. $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

【分析】完全平方式： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ，据此判断即可．

【解答】解：A、 $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$ ，故原式是完全平方式，故本选项符合题意；

B、 $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ 不是完全平方式，故本选项不符合题意；

C、 $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ 不是完全平方式，故本选项不符合题意；

D、 $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ 不是完全平方式，故本选项不符合题意；

故选：A.

【点评】本题主要考查了完全平方式，完全平方式分两种，一种是完全平方和公式，就是两个整式的和的平方. 另一种是完全平方差公式，就是两个整式的差的平方，算时有一个口诀“首末两项算平方，首末项乘积的2倍中间放，符号随中央.”

3. (4分) 将抛物线 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 平移后与抛物线 $y = 2x^2$ 重合，那么平移的方法可以是 ()

- A. 向右平移1个单位，再向上平移3个单位
- B. 向右平移1个单位，再向下平移3个单位
- C. 向左平移1个单位，再向上平移3个单位
- D. 向左平移1个单位，再向下平移3个单位

【分析】根据平移前后的抛物线的顶点坐标确定平移方法即可得解.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 的顶点坐标为 $(-1, -3)$ ，抛物线 $y = 2x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，

$\therefore$ 顶点由 $(-1, -3)$ 到 $(0, 0)$ 需要向右平移1个单位再向上平移3个单位.

故选：A.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目，利用顶点的变化确定抛物线解析式更简便.

4. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 BA、CA 的延长线上，下列比例式中能判定 $DE \parallel BC$ 的为 ()

- A. $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ B. $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ C. $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$ D. $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{CE}$

【分析】根据平行线分线段成比例定理、平行线的判定定理判断即可.

【解答】解：如图：

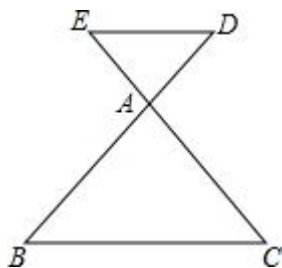
A、当 $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ 时，不能判定 $DE \parallel BC$ ，不符合题意；

B、当 $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ 时，不能判定 $DE \parallel BC$ ，不符合题意；

C、当 $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$ ，能判定 $DE \parallel BC$ ，符合题意；

D、当 $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$ 时，能判定 $DE \parallel BC$ ，而当 $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{CE}$ 时，不能判定 $DE \parallel BC$ ，不符合题意；

故选：C.



【点评】 本题考查的是平行线分线段成比例定理、平行线的判定定理，掌握相关的判定定理是解题的关键．

5. (4分) 锐角 α 的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么下列结论中正确的是()

- A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $30^\circ < \alpha < 45^\circ$ D. $45^\circ < \alpha < 60^\circ$

【分析】 根据特殊锐角的三角函数值进行解答即可．

【解答】 解： $\because \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 45^\circ = 1$,

$$\therefore \tan 30^\circ < \tan \alpha < \tan 45^\circ,$$

$$\therefore 30^\circ < \alpha < 45^\circ,$$

故选：C．

【点评】 本题考查锐角三角函数的意义以及锐角三角函数的增减性，掌握特殊锐角的三角函数值以及锐角三角函数的增减性是解决问题的关键．

6. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， CD 是高，如果 $AB = m$ ， $\angle A = \alpha$ ，那么 CD 的长为()

- A. $m \cdot \sin \alpha \cdot \tan \alpha$ B. $m \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
C. $m \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha$ D. $m \cdot \cos \alpha \cdot \cot \alpha$

【分析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由锐角三角函数的意义可求出 $AC = m \cdot \cos \alpha$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，由锐角三角函数的意义可求出 $CD = m \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ ，进而得出答案．

【解答】 解：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad AB = m, \quad \angle A = \alpha,$$

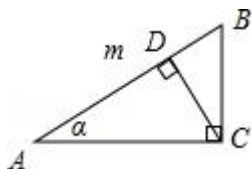
$$\therefore AC = m \cdot \cos \alpha,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$$\because \sin A = \frac{CD}{AC}, \quad AC = m \cdot \cos \alpha, \quad \angle A = \alpha,$$

$$\therefore CD = m \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha,$$

故选：B．



【点评】 本题考查解直角三角形，掌握锐角三角函数的意义是解决问题的前提．

二、填空题（每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分） $\frac{3}{2}$ 的相反数是 $-\frac{3}{2}$ ．

【分析】 根据相反数的定义可得出答案．

【解答】 解： $\frac{3}{2}$ 的相反数是 $-\frac{3}{2}$ ．

故答案为： $-\frac{3}{2}$ ．

【点评】 本题考查了相反数．解题的关键是明确相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号；一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0．

8.（4 分）函数 $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 $x < 2$ ．

【分析】 根据二次根式的被开方数是非负数、分式的分母不为 0 列出不等式，解不等式得到答案

【解答】 解：由题意得， $2-x > 0$ ，

解得， $x < 2$ ，

故答案为： $x < 2$ ．

【点评】 本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分式的分母不为 0 是解题的关键．

9.（4 分）方程 $\sqrt{3-2x} = 2-x$ 的根为 $x = 1$ ．

【分析】 首先把无理方程化成整式方程，再求出整式方程的解，然后检验即可．

【解答】 解： $\sqrt{3-2x} = 2-x$ ，

两边平方得： $3-2x = 4-4x+x^2$ ，

整理得： $x^2-2x+1 = 0$ ，

解得： $x_1 = x_2 = 1$ ，

经检验， $x = 1$ 是原方程的根，

$\therefore$ 方程 $\sqrt{3-2x} = 2-x$ 的根为 $x = 1$ ，

故答案为： $x = 1$ ．

【点评】 本题考查了无理方程的解法；熟练掌握无理方程的解法是解题的关键.

10. (4分) 二次函数 $y = 2x - 3x^2$ 图象的开口方向是 向下.

【分析】 根据二次函数二次项的系数的符号确定开口方向即可.

【解答】 解: $\because$ 二次函数 $y = 2x - 3x^2$ 的 $a = -3 < 0$,

$\therefore$ 开口向下,

故答案为: 向下.

【点评】 考查了二次函数的性质, 二次函数的二次项的系数决定了开口的方向, 难度较小.

11. (4分) 抛物线 $y = 3x^2 - 6$ 的顶点坐标为 $(0, -6)$.

【分析】 根据题目中的抛物线, 可以直接写出该抛物线的顶点坐标.

【解答】 解: $\because$ 抛物线 $y = 3x^2 - 6$,

$\therefore$ 该抛物线的顶点坐标为 $(0, -6)$,

故答案为 $(0, -6)$.

【点评】 本题考查二次函数的性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

12. (4分) 如果一次函数 $y = (m - 2)x + m - 1$ 的图象经过第一、二、四象限, 那么常数 m 的取值范围为 $1 < m < 2$.

【分析】 根据已知条件“一次函数 $y = (m - 2)x + m - 1$ 的图象不经过第三象限”可知 $m - 2 < 0$, 且 $m - 1 > 0$, 据此求得 k 的取值范围, 在该范围内可以找到满足条件的 k 的值.

【解答】 解: $\because$ 函数 $y = (m - 2)x + m - 1$ 的图象经过第一、二、四象限,

$$\therefore \begin{cases} m-2 < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases},$$

解得 $1 < m < 2$.

故答案为: $1 < m < 2$.

【点评】 本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解: 直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限. $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限. $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交. $b = 0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

13. (4分) 在二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 图象的上升部分所对应的自变量 x 的取值范围是 $x \geq 1$.

【分析】根据二次函数的性质解答即可.

【解答】解: $\because y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x = 1$,

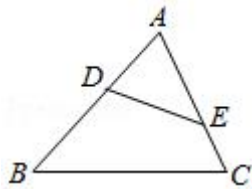
$\therefore$ 当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 在二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 图象的上升部分所对应的自变量 x 的取值范围是 $x \geq 1$,

故答案为: $x \geq 1$.

【点评】本题考查二次函数的性质、二次函数的图象, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

14. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $\angle AED = \angle B$, 如果 $AD = 2$, $AE = 3$, $CE = 1$, 那么 BD 长为 4.



【分析】根据 $\angle AED = \angle B$, $\angle DAE = \angle CAB$, 可得 $\triangle AED \sim \triangle ABC$, 对应边成比例即可求出 BD 的长.

【解答】解: $\because \angle AED = \angle B$, $\angle DAE = \angle CAB$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB},$$

$$\therefore \frac{2}{3+1} = \frac{3}{2+BD},$$

解得 $BD = 4$.

故答案为: 4.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质, 解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

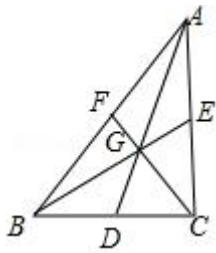
15. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 是重心, $\angle BGC = 90^\circ$, $BC = 8$, 那么 AG 的长为 8.

【分析】根据三角形的重心是三角形三边中线的交点. 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1. 进而可得 AG 的长.

【解答】解: 如图所示:

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 重心,

$\therefore$ 点 D 是 BC 的中点, $AG: DG = 2: 1$,



$\because \angle BGC = 90^\circ$, $BC = 8$,

$$\therefore DG = \frac{1}{2}BC = 4,$$

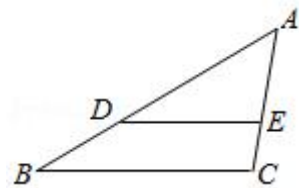
$$\therefore AG = 8,$$

答: AG 的长为 8.

故答案为: 8.

【点评】 本题考查了三角形的重心, 解决本题的关键是掌握三角形的重心定义和性质.

16. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 如果 $AB = 12$, $BC = 9$, $AC = 6$, 四边形 $BCED$ 的周长为 21, 那么 DE 的长为 6.



【分析】 根据 $DE \parallel BC$, 得到 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 对应边成比例, 设相似比为 k , 可得 $AD = 12k$, $AE = 6k$, $DE = 9k$, 然后根据四边形 $BCED$ 的周长为 21, 列方程即可得到结果.

【解答】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AD}{12} = \frac{AE}{6} = \frac{DE}{9} = k,$$

$$\therefore AD = 12k, AE = 6k, DE = 9k,$$

$\because$ 四边形 $BCED$ 的周长为 21,

$$\therefore BD + BC + CE + DE = 12 - 12k + 9 + 6 - 6k + 9k = 21,$$

$$\text{解得: } k = \frac{2}{3},$$

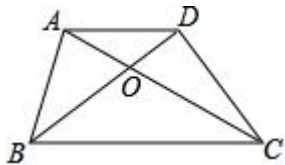
$$\therefore DE = 6.$$

故答案为: 6.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 解决本题的关键是掌握相似三角形的判

定与性质.

17. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, BD 与 AC 相交于点 O , $OB = 2OD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AO} = \underline{-\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}}$ (用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的式子表示).



【分析】 根据 $OB = 2OD$ 得到 $OB = \frac{2}{3}BD$, 然后由三角形法则求得 $\overrightarrow{BD}$ 的值, 继而求得 $\overrightarrow{BO}$. 进

一步利用三角形法则求得答案.

【解答】 解: 如图, $\because OB = 2OD$,

$$\therefore OB = \frac{2}{3}BD.$$

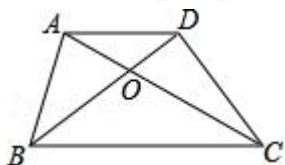
$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\therefore \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}.$$

故答案是: $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$.

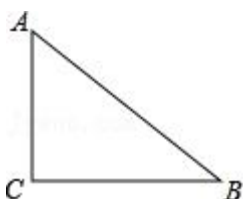


【点评】 本题主要考查了梯形和平面向量, 解题时, 充分利用了三角形法则, 属于中档题.

18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $\tan B = \frac{2}{3}$ (如图), 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转

后, 点 A 落在斜边 AB 上的点 A' , 点 B 落在点 B' , $A'B'$ 与边 BC 相交于点 D , 那么 $\frac{CD}{A'D}$ 的

值为 $\underline{\frac{3}{5}\sqrt{13}}$.



【分析】过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，根据勾股定理和正切的定义得到 $AC = 2\sqrt{13}$ ， $BC = 3\sqrt{13}$ ，根据三角形面积得到 $CE = 6$ ，再根据旋转的性质和相似三角形的判定与性质即可求解．

【解答】解：过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，

$$\because \tan B = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3},$$

设 $AC = 2x$ ，则 $BC = 3x$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中， } AB = \sqrt{(2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{13}x = 13,$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{13},$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{13}, BC = 3\sqrt{13},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CE, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 3\sqrt{13} = \frac{1}{2} \times 13 \times CE,$$

解得 $CE = 6$ ，

$$\because \tan B = \frac{CE}{EB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EB = 9,$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转后，点 A 落在斜边 AB 上的点 A' ，点 B 落在点 B' ，

$$\therefore \angle B = \angle B', AC = AC',$$

$\because CE \perp AB$ ，

$$\therefore AE' = AE = AB - BE = 13 - 9 = 4,$$

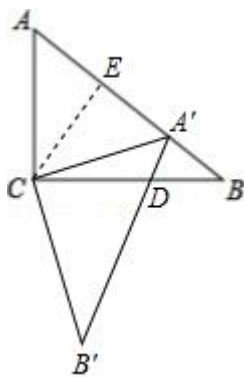
$$\therefore A'B = AB - A'E = 9 - 4 = 5,$$

$$\because \angle A'DB = \angle CDB',$$

$$\therefore \triangle A'DB \sim \triangle B'DC,$$

$$\therefore \frac{CD}{A'D} = \frac{CB'}{A'B} = \frac{CB}{A'B} = \frac{3\sqrt{13}}{5}.$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{13}}{5}$ ．



【点评】 本题考查了勾股定理，解直角三角形，旋转的性质：旋转前后两图形全等；对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\frac{\cot 30^\circ - \cos 45^\circ}{\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值以及二次根式的性质分别化简得出答案．

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解：原式} &= \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} \\ &= \frac{6 + 4\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{3 - 4} \\ &= -6 - 4\sqrt{3} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值以及二次根式的混合运算，正确化简二次根式是解题关键．

20.（10 分）已知线段 x, y 满足 $\frac{2x+y}{x-y} = \frac{x}{y}$ ，求 $\frac{x}{y}$ 的值．

【分析】 先根据比例的基本性质得到 $y(2x+y) = x(x-y)$ ，可得 $x^2 - 3xy - y^2 = 0$ ，再把 y 当作已知数，解关于 x 的方程即可求得 $\frac{x}{y}$ 的值．

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解：} \because \frac{2x+y}{x-y} &= \frac{x}{y}, \\ \therefore y(2x+y) &= x(x-y), \\ \text{则 } x^2 - 3xy - y^2 &= 0, \\ \text{解得 } x_1 &= \frac{3+\sqrt{13}}{2}y, x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}y \text{ (负值舍去)}. \end{aligned}$$

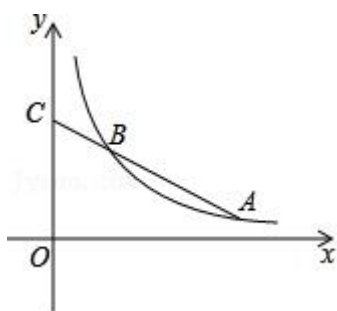
故 $\frac{x}{y}$ 的值为 $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

【点评】考查了比例线段，关键是熟练掌握比例的基本性质，得到 $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}y$ 是解题的难点.

21. (10 分) 如图，点 AB 在第一象限的反比例函数图象上， AB 的延长线与 y 轴交于点 C ，已知点 A 、 B 的横坐标分别为 6、2， $AB = 2\sqrt{5}$.

(1) 求 $\angle ACO$ 的余弦值；

(2) 求这个反比例函数的解析式.



【分析】(1) 作 $AD \perp y$ 轴于 D ， $BE \perp y$ 轴于 E ，通过证得 $\triangle CBE \sim \triangle CAD$ ，求得 $CB = \sqrt{5}$ ，根据勾股定理求得 CE ，然后解直角三角形即可求得；

(2) 求得 CD ，从而求得 $ED = 2$ ，即可得到 $\frac{k}{2} - \frac{k}{6} = 2$ ，解得 $k = 6$.

【解答】解：(1) 作 $AD \perp y$ 轴于 D ， $BE \perp y$ 轴于 E ，

$$\therefore BE \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle CBE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{CB}{AC} = \frac{EB}{DA},$$

$$\because \text{点 } A、B \text{ 的横坐标分别为 } 6、2, AB = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore DA = 6, EB = 2,$$

$$\therefore \frac{CB}{CB+2\sqrt{5}} = \frac{2}{6},$$

$$\therefore CB = \sqrt{5},$$

$$\therefore CE = \sqrt{CB^2 - EB^2} = \sqrt{5-4} = 1,$$

$$\therefore \cos \angle ACO = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$(2) \because \cos \angle ACO = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}; AC = AB + BC = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore CD = 3,$$

$$\therefore ED = 2,$$

$\therefore$ 点 A 、 B 在第一象限的反比例函数图象上，

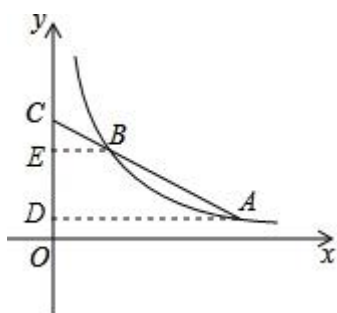
$$\therefore A\left(6, \frac{k}{6}\right), B\left(2, \frac{k}{2}\right),$$

$$\therefore OD = \frac{k}{6}, OE = \frac{k}{2},$$

$$\therefore \frac{k}{2} - \frac{k}{6} = 2,$$

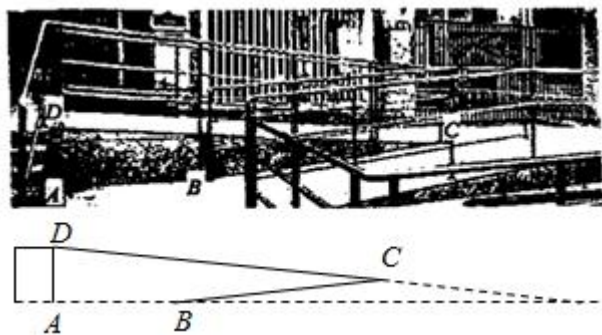
解得 $k = 6$,

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{6}{x}.$$



【点评】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式，反比例函数图象上点的坐标特征，三角形相似的判定和性质，勾股定理的应用，解直角三角形等，根据题意求得线段的长度是解题的关键．

22. (10 分) 如图，一处地铁出入口无障碍通道是转折的斜坡，沿着坡度相同的斜坡 BC 、 CD 共走 7 米可到出入口，出入口点 D 距离地面的高 DA 为 0.8 米，求无障碍通道斜坡的坡度与坡角（角度精确到 1° ，其他近似数取四个有效数字）.



【分析】 根据勾股定理求出 AE ，根据坡度的概念求出坡度，根据正弦的定义求出坡角．

【解答】 解：由题意得， $DE = 7$ 米，

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中， } AE = \sqrt{7^2 - 0.8^2} \approx 6.9541 \text{ (米)},$$

$$\therefore \text{无障碍通道斜坡的坡度} = 0.8 : 6.9541 \approx 1 : 8.693,$$

$$\sin \angle AED = \frac{AD}{DE} = \frac{0.8}{7} \approx 0.1143,$$

$\therefore \angle AED \approx 7^\circ$ ，即无障碍通道斜坡的坡角约为 7° 。

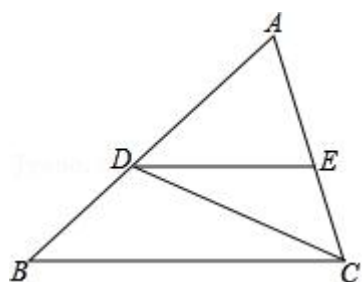


【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，掌握坡度坡角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键。

23. (12分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD^2 = AE \cdot AC$ 。

求证：(1) $\triangle BCD \sim \triangle CDE$ ；

$$(2) \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{AD}{AB}.$$



【分析】 (1) 由题意可证 $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ ，可得 $\angle ADE = \angle ACD$ ，由平行线的性质可得 $\angle EDC = \angle DCB$ ， $\angle B = \angle ADE = \angle ACD$ ，可得结论；

(2) 由相似三角形的性质可得 $\frac{CD}{BC} = \frac{DE}{CD}$ ，可得 $\frac{CD^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC} \cdot \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{BC}$ ，由平行线分线段成

比例可得结论。

【解答】 证明：(1) $\because AD^2 = AE \cdot AC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

又 $\because \angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle ACD$ ，

$\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EDC = \angle DCB$ ， $\angle B = \angle ADE$ ，

$\therefore \angle B = \angle ACD$ ，

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle CDE;$$

$$(2) \because \triangle BCD \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{CD},$$

$$\therefore \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC} \cdot \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{BC},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{AD}{AB}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定定理是本题的关键.

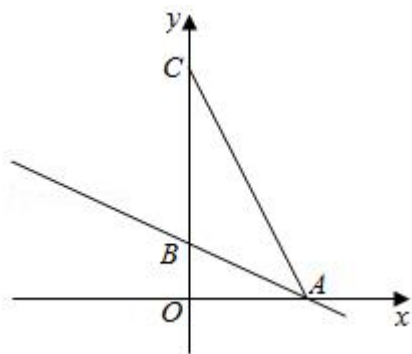
24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -\frac{1}{2}x + m$ ($m > 0$) 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A , B ，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ ($a \neq 0$) 经过点 A ，且与 y 轴相交于点 C ， $\angle OCA = \angle OAB$.

别交于点 A , B ，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ ($a \neq 0$) 经过点 A ，且与 y 轴相交于点 C ， $\angle OCA = \angle OAB$.

(1) 求直线 AB 的表达式;

(2) 如果点 D 在线段 AB 的延长线上，且 $AD = AC$ ，求经过点 D 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 的表达式;

(3) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 的对称轴与线段 AB 、 AC 分别相交于点 E , F ，且 $EF = 1$ ，求此抛物线的顶点坐标.



【分析】 (1) 直线 $y = -\frac{1}{2}x + m$ ($m > 0$) 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(2m, 0)$, $B(0, m)$ ，由 $\tan \angle OCA = \tan \angle OAB$ ，推出 $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$ ，求出 OA ，点 A , B 的坐标即可.

(2) 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴于 G 。求出点 D 的坐标，利用待定系数法求解即可.

(3) 设抛物线的对称轴 EF 与 OA 交于点 H . 由 $EF \parallel OC$, 推出 $\frac{AH}{AO} = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{CB} = \frac{1}{3}$, $AH = \frac{2}{3}$, $OH = \frac{4}{3}$, 在构建方程组求出 a , b 即可解决问题.

【解答】解: (1) $\because$ 直线 $y = -\frac{1}{2}x + m$ ($m > 0$) 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(2m, 0)$,

$B(0, m)$,

$\therefore OA = 2m$, $OB = m$,

$\because \angle OCA = \angle OAB$,

$\therefore \tan \angle OCA = \tan \angle OAB$,

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$,

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 交 y 轴于 $C(0, 4)$,

$\therefore OC = 4$,

$\therefore OA = 2$, $OB = 1$,

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

(2) 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴于 G .

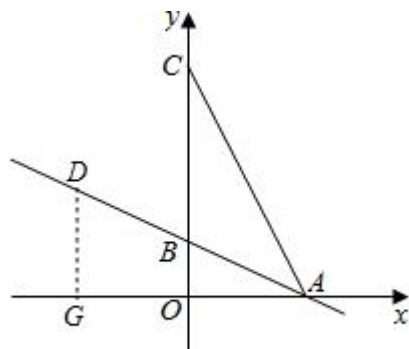


图1

$\because \angle DGA = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle DAG = \angle ACO$, $AD = AC$,

$\therefore \triangle DGA \cong \triangle AOC$ (AAS),

$\therefore DG = OA = 2$, $AG = OC = 4$, $OG = 2$,

$\therefore D(-2, 2)$,

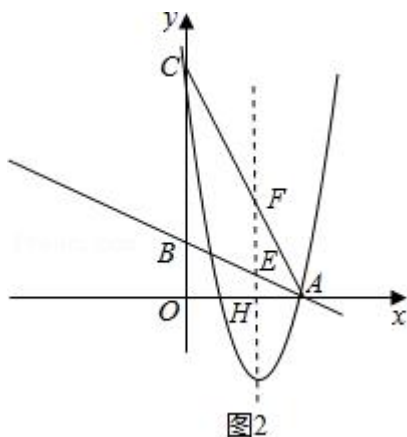
$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 经过 A , D ,

$\therefore \begin{cases} 4a + 2b + 4 = 0 \\ 4a - 2b + 4 = 2 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 4$.

(3) 设抛物线的对称轴 EF 与 OA 交于点 H .



$\because EF \parallel OC$,

$$\therefore \frac{AH}{AO} = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{CB} = \frac{1}{3}, \quad AH = \frac{2}{3}, \quad OH = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b + 4 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = 3x^2 - 8x + 4$,

当 $x = \frac{4}{3}$ 时, $y = -\frac{4}{3}$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

【点评】 本题属于二次函数综合题, 考查了二次函数的性质, 一次函数的性质, 平行线分线段成比例定理, 全等三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会利用参数构建方程组解决问题, 属于中考压轴题.

25. (14分) 已知 $\angle MAN$ 是锐角, 点 B 、 C 在边 AM 上, 点 D 在边 AN 上, $\angle EBD = \angle MAN$, 且 $CE \parallel BD$, $\sin \angle MAN = \frac{3}{5}$, $AB = 5$, $AC = 9$.

(1) 如图 1, 当 CE 与边 AN 相交于点 F 时, 求证: $DF \cdot CE = BC \cdot BE$;

(2) 当点 E 在边 AN 上时, 求 AD 的长;

(3) 当点 E 在 $\angle MAN$ 外部时, 设 $AD = x$, $\triangle BCE$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出定义域.

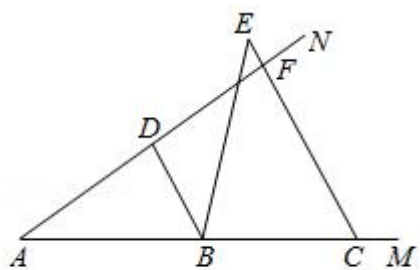
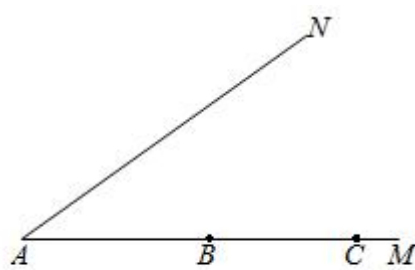


图1



备用图

【分析】(1) 根据平行线的性质得到 $\angle CEB = \angle DBE$, $\angle DBA = \angle BCE$, 由相似三角形的性质即可得到结论;

(2) 过 B 作 $BH \perp AN$ 于 H , 根据相似三角形的性质得到 $BD = \frac{AB \cdot CE}{AC} = \frac{5 \times 6}{9} = \frac{10}{3}$, 根据勾股定理即可得到结论;

(3) 过 B 作 $BH \perp AN$ 于 H , $BH = 4$, $AH = 3$, $DH = |x - 4|$, 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】解: (1) $\because CE \parallel BD$,

$$\therefore \angle CEB = \angle DBE, \angle DBA = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle A = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle A = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{EB}{EC},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC},$$

$$\therefore \frac{EB}{EC} = \frac{DF}{BC},$$

$$\therefore DF \cdot CE = BC \cdot BE;$$

(2) 过 B 作 $BH \perp AN$ 于 H ,

$$\because CE \parallel BD,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle EBD = \angle A,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ECA,$$

$$\therefore \triangle CEB \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = CB \cdot CA;$$

$$\because AB = 5, AC = 9,$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore CE^2 = 4 \times 9 = 36,$$

$$\therefore CE = 6,$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore BD = \frac{AB \cdot CE}{AC} = \frac{5 \times 6}{9} = \frac{10}{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } BH = AB \cdot \sin A = 5 \times \frac{3}{5} = 3,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 4, DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{19}}{3}, AD = 4 \pm \frac{\sqrt{19}}{3};$$

$$(3) \text{ 过 } B \text{ 作 } BH \perp AN \text{ 于 } H, BH = 4, AH = 3, DH = |x - 4|,$$

$$\therefore BD^2 = DH^2 + BH^2 = (x - 4)^2 + 3^2 = x^2 - 8x + 25,$$

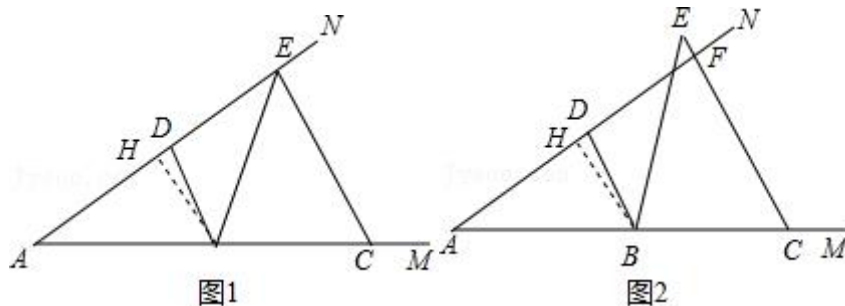
$$\because \triangle ECB \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle ADB}} = \frac{BC^2}{BD^2},$$

$$\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH = \frac{3}{2} x,$$

$$\therefore \frac{y}{\frac{3}{2}x} = \frac{16}{x^2 - 8x + 25},$$

$$\therefore y = \frac{24x}{x^2 - 8x + 25}, \text{ 定义域为 } 4 - \frac{\sqrt{19}}{3} < x < 4 + \frac{\sqrt{19}}{3}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线的性质，勾股定理，正确的理解题意是解题的关键．