

青浦区 2020 学年第一学期九年级期终学业质量调研测试

数学试卷

(完成时间: 100 分钟满分: 150 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 若 $AB = 2$, 则 AP 的长为

- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\sqrt{5} + 1$ C. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ D. $3 - \sqrt{5}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用黄金分割点的定义即可求 AP 的长度

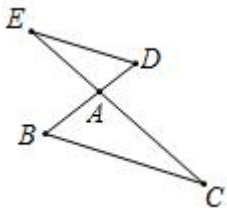
【详解】 利用黄金分割点的定义, $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$\because AB = 2$,

$\therefore AP = \sqrt{5} - 1$

【点睛】 本题主要考查了黄金分割比的定义, 需要记清楚哪两条线段的比为黄金比 $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

2. 如图, 已知 BD 与 CE 相交于点 A , $DE \parallel BC$, 如果 $AD = 2$, $AB = 3$, $AC = 6$, 那么 AE 等于 ()



- A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{18}{5}$ C. 4 D. 9

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理即可得到结论.

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

$$\text{即 } \frac{3}{2} = \frac{6}{AE},$$

$$\therefore AE = 4,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理的运用，注意：平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例.

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，那么 $\cot A$ 等于（ ）

A. $\frac{AC}{BC}$ B. $\frac{AC}{AB}$ C. $\frac{BC}{AC}$ D. $\frac{BC}{AB}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据锐角 A 的邻边 a 与对边 b 的比叫做 $\angle A$ 的余切，记作 $\cot A$.

【详解】解： $\because \angle C=90^\circ$,

$$\therefore \cot A = \frac{AC}{BC},$$

故选：A.

【点睛】此题主要考查了锐角三角函数的定义，关键是掌握余切定义.

4. 抛物线 $y = -(x-2)^2 - 3$ 的顶点坐标是（ ）

A. $(2, -3)$ B. $(-2, -3)$ C. $(2, 3)$ D. $(-2, 3)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据顶点式解析式的性质解答.

【详解】抛物线 $y = -(x-2)^2 - 3$ 的顶点坐标是 $(2, -3)$,

故选：A.

【点睛】此题考查二次函数顶点式解析式的性质： $y = a(x-h)^2 + k$ 中顶点坐标为 (h, k) .

5. 已知 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$ ，且 $\vec{c} \neq \vec{0}$ ，下列说法中，不正确的是（ ）

A. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ C. $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的和与差运算可以得到向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的关系即可解答.

【详解】解: $\because \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, 且 $\vec{c} \neq \vec{0}$,

$$\therefore \vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}, \text{ 即 } \vec{a} = -3\vec{b},$$

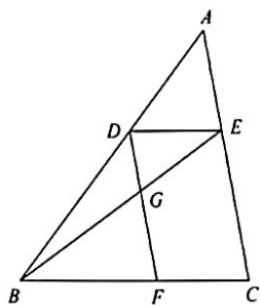
$$\therefore |\vec{a}| = 3|\vec{b}|, \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 方向相反},$$

所以, 选项 A、B、C 正确, D 错误,

故选: D.

【点睛】本题考查平面向量, 熟练掌握向量的基本性质和运算是解答的关键.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$, 联结 BE , BE 与 DF 相交于点 G , 则下列结论一定正确的是 ()



A. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$

B. $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$

C. $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{DE}$

D. $\frac{DG}{GF} = \frac{BF}{FC}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定和平行线分线段成比例进行判断即可.

【详解】解: $\because DE \parallel BC, DF \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 DFCE 是平行四边形,

$$\therefore DE = CF, DF = CE,$$

$$\because DE \parallel BC, DF \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \triangle BFD \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \text{ 故 A 错误};$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{CF}{BC}, \text{ 即 } \frac{AE}{AC} = \frac{CF}{BC}, \text{ 故 B 错误};$$

$$\because DF \parallel AC, \therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{CF} = \frac{BF}{DE}, \text{ 故 C 正确};$$

$\because DE \parallel BC, \therefore \frac{DG}{GF} = \frac{DE}{BF} = \frac{CF}{BF}$, 故 D 错误,

故选: C.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质、平行线分线段成比例、平行四边形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的性质和平行线分线段成比例是解答的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每小题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, 那么 $\frac{b-a}{b+a} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】 设 $a=3k$, 得到 $b=4k$, 代入 $\frac{b-a}{b+a}$ 化简即可求解.

【详解】 解: 设 $a=3k$,

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore b=4k,$$

$$\therefore \frac{b-a}{b+a} = \frac{4k-3k}{4k+3k} = \frac{k}{7k} = \frac{1}{7}.$$

故答案为: $\frac{1}{7}$

【点睛】 本题主要考查了比例化简求值, 理解比例的意义, 用含 k 的式子分别表示 a 、 b 是解题关键.

8. 计算: $4\vec{a} - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $\vec{a} + 6\vec{b}$

【解析】

【分析】 直接利用实数与向量相乘及平面向量的加减运算法则去括号求解即可求得答案.

【详解】 解: $4\vec{a} - 3(\vec{a} - 2\vec{b})$

$$= 4\vec{a} - 3\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$= \vec{a} + 6\vec{b}$$

故答案为: $\vec{a} + 6\vec{b}$.

【点睛】 此题考查了平面向量的运算法则. 注意掌握去括号时的符号变化是解此题的键.

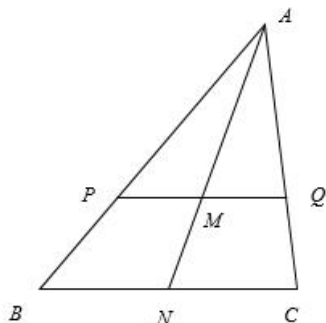
9. 如果两个相似三角形的周长比为 $2:3$, 那么它们的对应角平分线的比为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】结合题意得： $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$ ；再根据角平分线的性质，通过证明 $\triangle ABN \sim \triangle APM$ ，即可得到答案.

【详解】如图， $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ ， $\angle BAC$ 的角平分线 AN 交 BC 于点 N ，交 PQ 于点 M



$$\therefore \angle APQ = \angle B$$

$\therefore \triangle APQ$ 和 $\triangle ABC$ 周长比为 $2:3$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \angle BAC$ 的角平分线 AN 交 BC 于点 N ，交 PQ 于点 M

$$\therefore \angle PAM = \angle BAN = \frac{1}{2} \angle BAC$$

$$\therefore \triangle ABN \sim \triangle APM$$

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了相似三角形、角平分线的知识；解题的关键是熟练掌握相似三角形、角平分线的性质，从而完成求解.

10. 把抛物线 $y = -x^2$ 向上平移 2 个单位，所得的抛物线的解析式是_____.

【答案】 $y = -x^2 + 2$

【解析】

【分析】根据题意直接运用平移规律“左加右减，上加下减”，在原式上加 2 即可得新函数解析式即可.

【详解】解： $\because y = -x^2$ 向上平移 2 个单位长度，

$\therefore$ 所得的抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2$.

故答案为 $y = -x^2 + 2$.

【点睛】 本题主要考查二次函数图象的平移，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减. 并用规律求函数解析式.

11. 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 在 y 轴左侧的部分是_____. (填“上升”或“下降”)

【答案】 下降

【解析】

【分析】 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 的对称轴 $x = 0$ ，抛物线开口向上，所以在 y 轴左侧的部分 y 随 x 的增加而减小.

【详解】 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 的对称轴 $x = 0$ ，抛物线开口向上，

$\therefore$ 在对称轴左侧 y 随 x 的增加而减小，

故答案为：下降.

【点睛】 本题考查二次函数的图象及性质；熟练掌握二次函数的图象及性质是解题的关键.

12. 二次函数 $y = x^2 + 2x + m$ 图像上的最低点的横坐标为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 将二次函数 $y = x^2 + 2x + m$ 用顶点式表示出来，再根据函数图像开口向上，即可求得最低点的横坐标.

【详解】 解：二次函数 $y = x^2 + 2x + m$ 可化为 $y = (x + 1)^2 + m - 1$ ，因为二次项系数为 1，大于零，所以函数图像开口向上，所以最低点为顶点，横坐标为 -1，故答案为 -1.

【点睛】 本题考查函数的最值问题，用配方法将二次函数的一般式转化为顶点式是解决本题的关键.

13. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，如果 $\cot \angle A = 2$ ， $BC = 3$ ，那么 $AC =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 直接根据 $\cot \angle A = \frac{AC}{BC}$ ，将已知条件代入，便可求出 AC .

【详解】 $\because \cot \angle A = \frac{AC}{BC} = 2$ ， $BC = 3$ ，

$\therefore AC = BC \cdot \cot \angle A = 3 \times 2 = 6$ ，

故答案为：6.

【点睛】 本题考查余切的定义，正确掌握余切的公式是解题的关键.

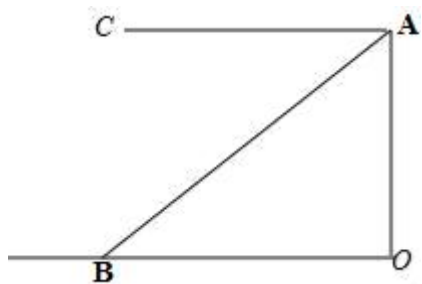
14. 小明在楼上点 A 处行到楼下点 B 处的小丽的俯角是 32° ，那么点 B 处的小丽看点 A 处的小明的仰角是_____度.

【答案】 32

【解析】

【分析】根据题意画出图形，然后根据平行线的性质可以求得点 B 处的小丽看点 A 处的小明的仰角的度数，本题得以解决.

【详解】解：由题意可得，



$$\angle BAC = 32^\circ,$$

$$\because AC \parallel BO,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ABO = 32^\circ,$$

即点 B 处的小丽看点 A 处的小明的仰角等于 32° 度，

故答案为 32.

【点睛】本题利用平行线间角的关系求仰角俯角问题，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

15. 直角三角形的重心到斜边中点的距离为 2，那么该直角三角形的斜边长为_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】先根据三角形重心的性质求出斜边中线的长，再根据三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求得斜边的长.

【详解】解：由题意得， $GD=2$ ，

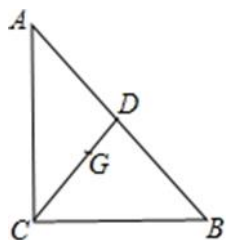
$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore CD=3GD=6$ ， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\therefore AB=2CD=12,$$

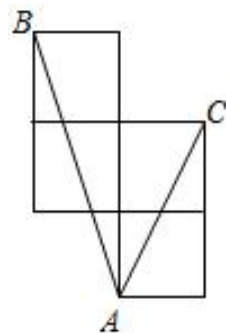
故答案为: 12.



【点睛】 本题考查了直角三角形斜边上的中线的性质和重心的性质, 熟练掌握在直角三角形中, 斜边上的中线等于斜边的一半以及重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2: 1 是解决问题的关键.

16. 如图, A 、 B 、 C 是小正方形的顶点, 且每个小正方形的边长相同, 那么 $\angle BAC$ 的正弦值为

_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 连接 BC , 根据网格求出 AB, BC, AC , 得到 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 再进行求解.

【详解】 $\because$ 每个小正方形的边长均为 1,

$$\therefore AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

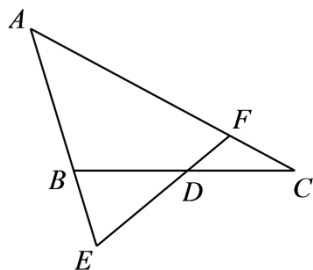
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】此题主要考查正弦的求解，解题的关键熟知勾股定理的运用.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D是边BC的中点，直线DF交边AC于点F，交AB的延长线于点E，如果 $CF:CA=a:b$ ，那么 $BE:AE$ 的值为_____。（用含a、b的式子表示）

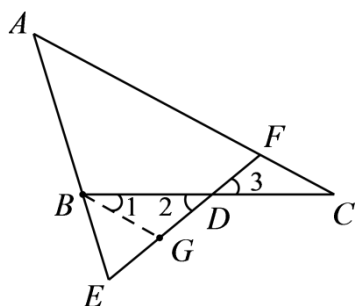


【答案】 $a:(b-a)$

【解析】

【分析】做辅助线构造全等三角形得出 $BG=CF$ ，再由 $\triangle BGE \sim \triangle AFE$ 得 $\frac{BE}{AE} = \frac{BG}{AF}$ 即可.

【详解】解：如图：



过点B作 $BG \parallel AC$ 交EF于点G

$$\therefore \angle 1 = \angle C$$

$\because$ 点D是边BC的中点

$$\therefore BD = CD$$

在 $\triangle BDG$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle C \\ BD = CD \\ \angle 2 = \angle 3 \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDG \cong \triangle CDF$$

$$\therefore BG = CF$$

又 $\because BG \parallel AC$

$$\therefore \triangle BGE \sim \triangle AFE$$

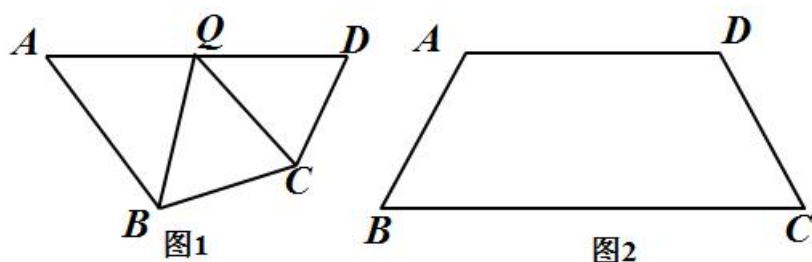
$$\therefore \frac{BE}{AE} = \frac{BG}{AF} = \frac{CF}{AF} = \frac{CF}{AC - CF} = \frac{a}{b - a}$$

即 $BE:AE=a:(b-a)$

故答案为: $a:(b-a)$.

【点睛】 本题主要考查了做辅助线构造全等三角形, 利用全等三角形即相似的性质求线段的比; 解题关键是做出正确辅助线, 熟练掌握全等三角形及相似三角形的判定和性质.

18. 如果四边形边上的点, 它与对边两个端点的连线将这个四边形分成的三个三角形都相似, 我们就把这个点叫做该四边形的“强相似点”. 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 Q 在边 AD 上, 如果 $\triangle QAB$ 、 $\triangle QBC$ 和 $\triangle QDC$ 都相似, 那么点 Q 就是四边形 $ABCD$ 的“强相似点”; 如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC = 2$, $BC = 8$, $\angle B = 60^\circ$, 如果点 Q 是边 AD 上的“强相似点”, 那么 $AQ = \underline{\hspace{1cm}}$.

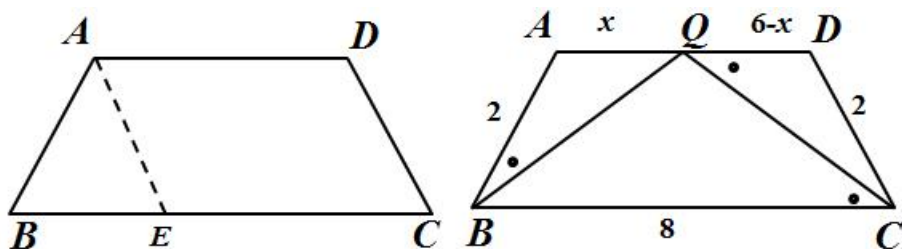


【答案】 $3 + \sqrt{5}$ 或 $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AE \parallel CD$, 交 BC 于点 E , 可证四边形 $ADCE$ 是平行四边形, 由平行四边形的性质可得 AD 的长, 利用“强相似点”的定义可得 $\triangle ABQ \sim \triangle DQC$, 则由相似三角形的性质可得 $\frac{AQ}{AB} = \frac{DC}{DQ}$, 再根据线段之间的数量关系建立关于 AQ 的方程, 求解后即可求出 AQ 的长.

【详解】 解: 如图, 过点 A 作 $AE \parallel CD$, 交 BC 于点 E ,



$\therefore$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC = 2$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形,

$\therefore AE = CD = AB = 2$, $AD = CE$.

$\therefore \angle B = 60^\circ$,

∴ $\triangle ABE$ 是等边三角形.

∴ $BE = AE = AB = 2$.

∴ $AD = BC - BE = 6$.

∵ 点 Q 是边 AD 上的“强相似点”，

∴ $\triangle ABQ \sim \triangle DQC$.

$$\therefore \frac{AQ}{AB} = \frac{DC}{DQ}.$$

设 $AQ = x$, 则 $DQ = 6 - x$,

$$\text{即 } \frac{x}{2} = \frac{2}{6-x}.$$

解得 $x_1 = 3 + \sqrt{5}$, $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

故答案为: $3 + \sqrt{5}$ 或 $3 - \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质、平行四边形的判定与性质等知识, 掌握平行四边形的判定与性质及相似三角形的性质并能灵活应用所学知识是解题的关键.

三. 解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算 $|\cot 30^\circ - 1| - 2 \sin 60^\circ + (\cos 60^\circ)^0 + \frac{1}{\tan 30^\circ}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

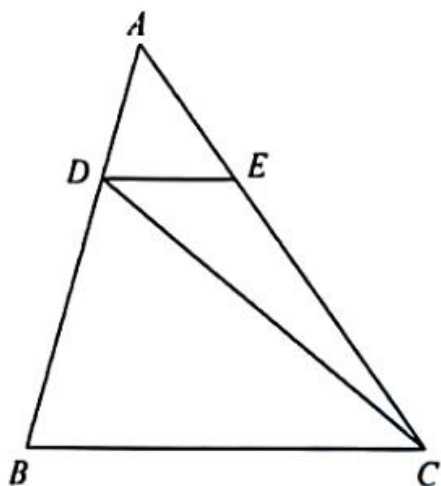
【解析】

【分析】 根据特殊三角函数值化简即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & |\cot 30^\circ - 1| - 2 \sin 60^\circ + (\cos 60^\circ)^0 + \frac{1}{\tan 30^\circ} \\ &= |\sqrt{3} - 1| - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点睛】 此题主要考查不同特殊角三角函数值的混合运算, 解题的关键是熟知特殊三角函数值.

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $AD = 2$, $DB = 4$, $AE = 3$, $EC = 6$, $DE = 3.2$



(1) 求 BC 的长

(2) 联结 DC ，如果 $\overrightarrow{DE} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CD}$ 。

【答案】 (1) $BC = 9.6$ ；(2) $-3\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 根据 SAS 判定 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，再根据相似三角形对应边成立解题即可；

(2) 根据相似三角形的判定与性质解题即可。

【详解】 解：(1) $\because AD = 2$ ， $DB = 4$ ， $AE = 3$ ， $EC = 6$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\because \angle A = \angle A$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BC = 9.6;$$

(2) 由 (1) 中，

$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{DE} = 3\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = -3\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

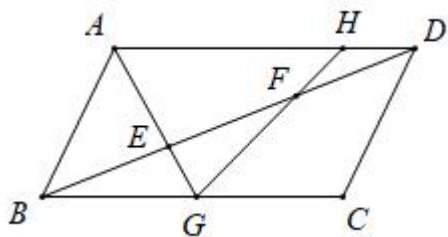
【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质、向量的线性运算等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键。

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $BC=8$ ，点 E 、 F 是对角线 BD 上的两点，且 $BE=EF=FD$ ， AE 的延长线

交 BC 于点 G, GF 的延长线交 AD 于点 H.

(1) 求 HD 的长;

(2) 设 $\triangle BEG$ 的面积为 a , 求四边形 AEFH 的面积. (用含 a 的代数式表示)



【答案】 (1) 2; (2) $\frac{7a}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质得 $AD \parallel BC$, 根据相似三角形的判定得 $\triangle BEG \sim \triangle DEA$,

$\triangle BFG \sim \triangle DFH$, 由 $BE=EF=FD$ 可得出 $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$, $\frac{DF}{BF} = \frac{1}{2}$, 根据相似三角形的性质即可求解;

(2) 由 $BE=EF$ 可得 $\triangle BEG$ 与 $\triangle EFG$ 的面积相等, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方可得 $S_{\triangle AED}$ 与 $S_{\triangle DFH}$ 的值, $S_{\triangle AED} - S_{\triangle DFH}$ 即可得四边形 AEFH 的面积.

【详解】 解: (1) $\because$ 平行四边形 ABCD, $BC=8$,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC = 8$,

$\therefore \triangle BEG \sim \triangle DEA$, $\triangle BFG \sim \triangle DFH$,

$\therefore \frac{BE}{ED} = \frac{BG}{AD}$, $\frac{DF}{BF} = \frac{HD}{BG}$,

$\because BE=EF=FD$,

$\therefore \frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$, $\frac{DF}{BF} = \frac{1}{2}$,

$\therefore BG = \frac{1}{2} AD = 4$, $HD = \frac{1}{2} BG$,

$\therefore HD = 2$;

(2) $\because BE=EF$,

$\therefore S_{\triangle BEG} = S_{\triangle EFG} = a$,

$\therefore S_{\triangle BFG} = 2a$,

$\because \triangle BEG \sim \triangle DEA$, $\triangle BFG \sim \triangle DFH$, $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$, $\frac{DF}{BF} = \frac{1}{2}$,

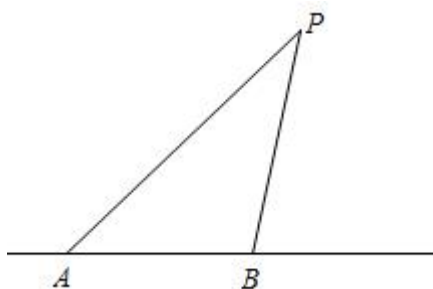
$\therefore S_{\triangle AED} = 4a$, $S_{\triangle DFH} = \frac{a}{2}$,

$$\therefore \text{四边形 AEFH 的面积} = S_{\triangle AED} - S_{\triangle DFH} = \frac{7a}{2}.$$

【点睛】本题考查平行四边形的性质，相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

22. 某条过路上通行车辆限速为 40 千米，在离道路 50 米的点 P 处建一个监测点，道路的 AB 段为监测区（如图）在 $\triangle ABP$ 中，已知 $\angle PAC = 26.5^\circ$ ， $\angle PBC = 68.2^\circ$. 一辆车通过 AB 段的时间为 9 秒，请判断该车是否超速，并说明理由.

（参考数据： $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$ ， $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$ ， $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$ $\sin 68.2^\circ \approx 0.93$ ， $\cos 68.2^\circ \approx 0.37$ ， $\tan 68.2^\circ \approx 2.50$ ）

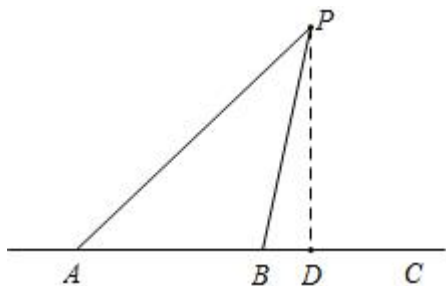


【答案】不超速，理由见解析

【解析】

【分析】过点 P 作 $PD \perp AC$ 于 D ，解直角三角形分别求出 AD 、 BD ，进一步求出 AB ，然后可求出实际车速便可判断出结果.

【详解】解：不超速，理由如下：过点 P 作 $PD \perp AC$ 于 D ，则 $PD=50$ (m)，



$$\text{在 Rt}\triangle APD \text{ 中, } AD = \frac{PD}{\tan \angle PAC} = \frac{50}{\tan 26.5^\circ} \approx 100(m),$$

$$\text{在 Rt}\triangle BPD \text{ 中, } BD = \frac{PD}{\tan \angle PBC} = \frac{50}{\tan 68.2^\circ} \approx 20(m)$$

$$AB = AD - BD = 80(m)$$

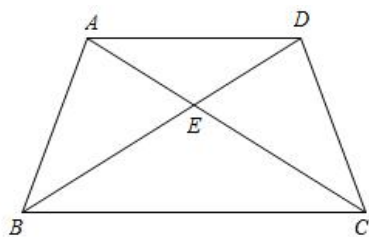
$$v = 80 \div 9 = \frac{80}{9} (m/s) < 40 (km/h) = \frac{100}{9} (m/s),$$

故答案为：不超速.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，属于实际应用类题目，从复杂的实际问题中整理出直角三角形是

解决此类问题的关键.

23. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, AC 、 BD 相交于点 E , $AE \cdot CE = DE \cdot BE$



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ACB$;

(2) 如果 $DA^2 = DE \cdot DB$, 求证: $AB \cdot EC = BC \cdot AE$.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 找到两对相同角即可证明相似

(2) 证明出 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$ 后可推出.

【详解】证明: (1) $AE \cdot CE = DE \cdot BE \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BCE \Rightarrow \angle ADE = \angle ACB$

$AB = AD \Rightarrow \angle ADE = \angle ABE \Rightarrow \angle ACB = \angle ABE$

$\therefore$ 两个三角形有一公共角 $\angle BAC$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB$.

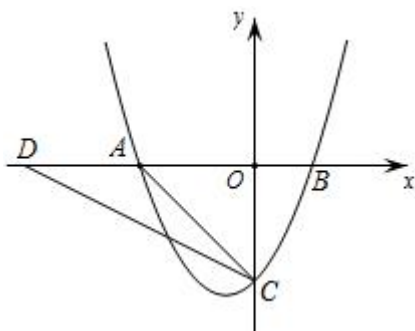
(2) $DA^2 = DE \cdot DB \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BDA$

$\Rightarrow \triangle AED$ 为等腰三角形 $\Rightarrow \triangle BEC$ 为等腰三角形

$\Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow AB \cdot EC = BC \cdot AE$.

【点睛】本题考查四边形的性质、相似三角形的判定和性质, 解题的关键是灵活运用这些知识解决问题,

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(2, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求该抛物线的表达式及点 C 的坐标;

(2) 如果点 D 的坐标为 $(-8, 0)$, 联结 AC 、 DC , 求 $\angle ACD$ 的正切值;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 P 为抛物线上一点, 当 $\angle OCD = \angle CAP$ 时, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) 抛物线为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, $C(0, -4)$; (2) $\tan \angle ACD = \frac{1}{3}$; (3) $P\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{9}\right)$

【解析】

【分析】(1) 将两个点坐标代入解析式即可求出, 令 x 为 0, 求得 C 点坐标;

(2) 过 D 作 CA 延长线的垂线, 通过证明 $\triangle EAD \sim \triangle OAC$ 求出 DE 和 EC 的长度, 再求出正切值;

(3) 设 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2 + t - 4\right)$, 通过 $\tan \angle BAP = \tan \angle ACD$ 可求出参数 t , 从而得出 P 点坐标.

【详解】解: (1) 将 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$,

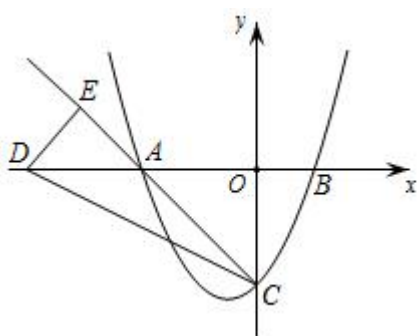
解得: $a = \frac{1}{2}, b = 1$,

$\therefore$ 抛物线为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$,

令 $x=0$, 得 $y=-4$,

故 $C(0, -4)$.

(2) 过 D 作 $DE \perp AC$ 交 CA 延长线于 E ,



因为 $\angle EAD = \angle OAC$, $\angle DEA = \angle COA$,

$\therefore \triangle EAD \sim \triangle OAC$,

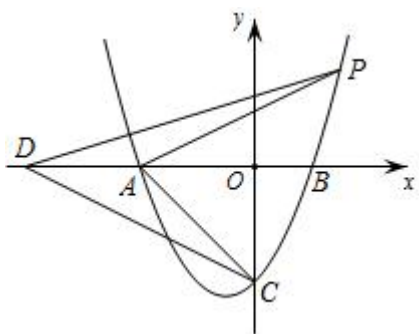
$\because AD=4$, $DE=AE$, 由勾股定理得, $DE=AE=2\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{DE}{CO} = \frac{EA}{OA} = \frac{DA}{CA} = \frac{4}{4\sqrt{2}},$$

$$\therefore DE = 2\sqrt{2}, \quad EA = 2\sqrt{2}, \quad EC = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{DE}{EC} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

(3) 设 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2 + t - 4\right)$, 连接 DP 、 AP ,



$$\therefore \angle OCD = \angle CAP,$$

$$\therefore \angle OCA + \angle ACD = \angle CAB + \angle BAP,$$

$$\therefore 45^\circ + \angle ACD = 45^\circ + \angle BAP,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle BAP,$$

$$\therefore \tan \angle BAP = \tan \angle ACD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle BAP = \left(\frac{1}{2}t^2 + t - 4\right) \div (t + 4) = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } t = \frac{8}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{9}\right).$$

【点睛】本题属于二次函数综合题，考查了待定系数法，相似三角形的证明和解直角三角形等知识，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题，属于中考常考题型.

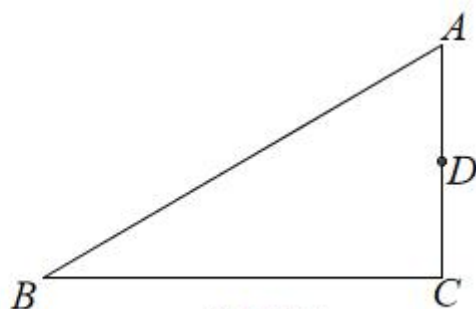
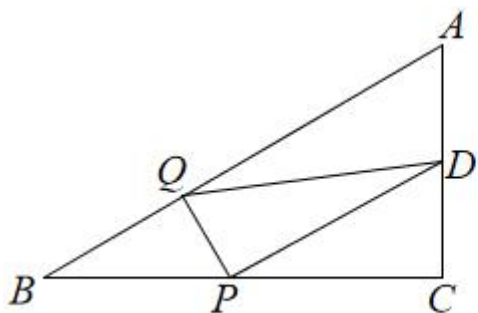
25. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，点 D 为边 AC 的中点（如图），点 P 、 Q 分别是射线 BC 、

BA 上的动点，且 $BQ = \frac{\sqrt{3}}{2}BP$ ，联结 PQ 、 QD 、 DP .

(1) 求证： $PQ \perp AB$;

(2) 如果点 P 在线段 BC 上，当 $\triangle PQD$ 是直角三角形时，求 BP 的长；

(3) 将 $\triangle PQD$ 沿直线 QP 翻折，点 D 的对应点为点 D' ，如果点 D' 位于 $\triangle ABC$ 内，请直接写出 BP 的取值范围.



备用图

【答案】(1) 见解析；(2) $\sqrt{3}$ ；(3) $\frac{5}{3}\sqrt{3} < BP < \frac{7}{3}\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1) 由勾股定理得出 AB，再根据相似三角形的判定得出 $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ 即可；

(2) 根据相似三角形的性质即可求解；

(3) 分情况考虑 P、Q 在射线上，不存在 $\triangle PDQ$ ，此时 P、Q 继续往右移动，点 D 将不可能位于 $\triangle ABC$ 内，BP 应小于当前 BP 的数值；P 在线段 BC 上时，由特殊锐角三角函数值求得 PB 即可.

【详解】(1) $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore BQ = \frac{\sqrt{3}}{2} BP$$

$$\therefore \frac{BQ}{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BQ}{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

又 $\because \angle B = \angle B$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PBQ$

$\therefore \angle C = \angle PQB = 90^\circ$

$\therefore PQ \perp AB$;

(2) 当 $\triangle PQD$ 是直角三角形时，

$\because BQ$ 与 BP 有比例关系，D 点固定

$\therefore$ 直角三角形 $\triangle PQD$ 的直角也固定，为 $\angle QPD = 90^\circ$

由 (1) 得 $PQ \perp AB$

$$\therefore \angle PQB = \angle QPD = 90^\circ$$

$$\therefore AB \parallel PD$$

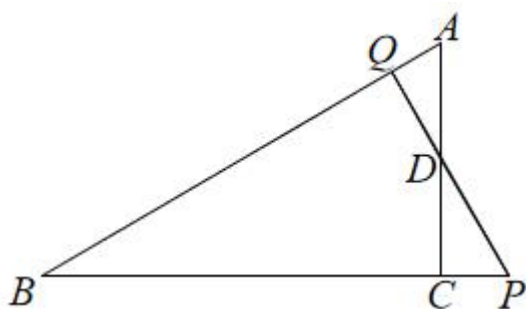
$$\therefore \triangle CPD \sim \triangle CBA$$

$$\text{则 } \frac{CD}{CP} = \frac{CB}{CB} = \frac{1}{2}$$

$\therefore P$ 为 BC 的中点

$$\therefore BP = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(3) 如图:



当 P 、 Q 、 D 共线时, 此时不存在 $\triangle PDQ$, 在此基础上, P 继续沿射线 BC 方向移动, 此时将 $\triangle PQD$ 沿直线 QP 翻折, 点 D 的对应点 D' 不可能位于 $\triangle ABC$ 内,

$\therefore BP$ 应小于当前 BP 的数值,

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ, \angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

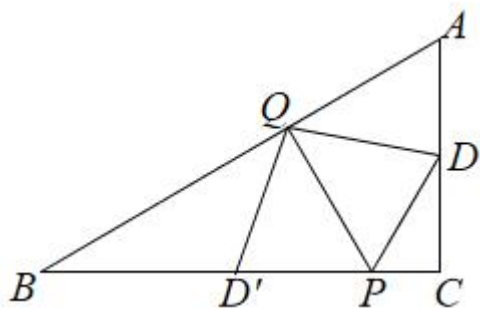
由 (1) 得 $PQ \perp AB$, $\triangle PCD$ 是直角三角形, $\angle B = 30^\circ$, $\therefore \angle BPQ = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle PCD$ 中, $DC = \frac{1}{2} AC = 1$, 则 $CP = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{7}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BP < \frac{7}{3}\sqrt{3};$$

如图: 当点 D' 落在 BC 上时,



由于 $\angle BPQ = 60^\circ$,

$$\therefore \angle QPD = \angle QPB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DPC = 180^\circ - \angle QPD - \angle QPB = 60^\circ,$$

此时, 当 P 继续沿 BC 方向运动 ($BP < \frac{7}{3}\sqrt{3}$), D 必定会落在 $\triangle ABC$ 内,

$$\text{在 Rt}\triangle PCD \text{ 中, } CP = \frac{\sqrt{3}}{3} DC = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad BP = BC - CP = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BP > \frac{5}{3}\sqrt{3},$$

$$\text{综上 } \frac{5}{3}\sqrt{3} < BP < \frac{7}{3}\sqrt{3}.$$

【点睛】 此题主要考察了相似三角形的判定及性质, 特殊锐角三角函数以及勾股定理, 解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定及性质, 特殊锐角三角函数以及勾股定理的应用.

