

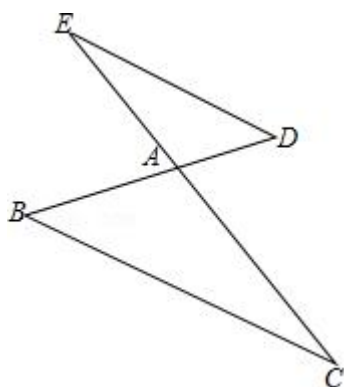
2020-2021 学年上海市青浦区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题：（本大题共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分）

- 1.（4 分）已知线段 $AB = 2$ ， P 是线段 AB 的黄金分割点， $AP > PB$ ，那么线段 AP 的长度等于（ ）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\sqrt{5}-1$ C. $\sqrt{5}+1$ D. $3-\sqrt{5}$

- 2.（4 分）如图，已知 BD 与 CE 相交于点 A ， $DE \parallel BC$ ，如果 $AD = 2$ ， $AB = 3$ ， $AC = 6$ ，那么 AE 等于（ ）



A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{18}{5}$ C. 4 D. 9

- 3.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\cos A$ 等于（ ）

A. $\frac{BC}{AB}$ B. $\frac{AC}{AB}$ C. $\frac{BC}{AC}$ D. $\frac{AC}{BC}$

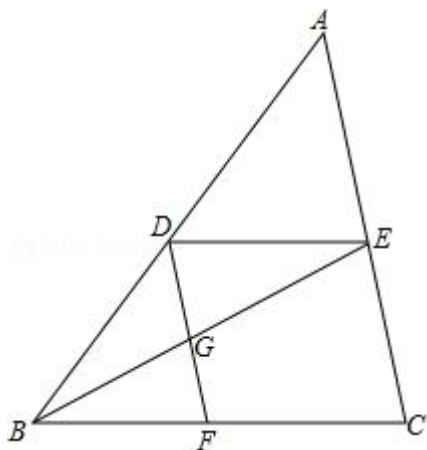
- 4.（4 分）抛物线 $y = -(x-2)^2 - 3$ 的顶点坐标是（ ）

A. (2, -3) B. (-2, -3) C. (2, 3) D. (-2, 3)

- 5.（4 分）已知 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$ ，且 $\vec{c} \neq \vec{0}$ ，下列说法中，不正确的是（ ）

A. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

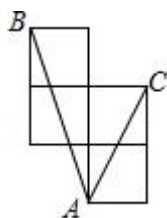
- 6.（4 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，联结 BE ， BE 与 DF 相交于点 G ，则下列结论一定正确的是（ ）



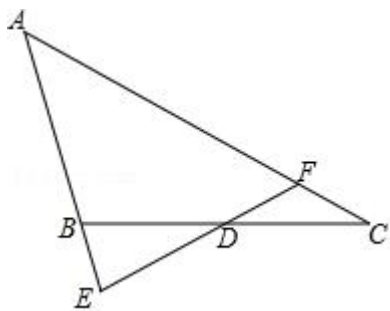
- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$ B. $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ C. $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{DE}$ D. $\frac{DG}{GF} = \frac{BF}{FC}$

二、填空题：（本大题共 12 题，每小题 4 分，满分 48 分）

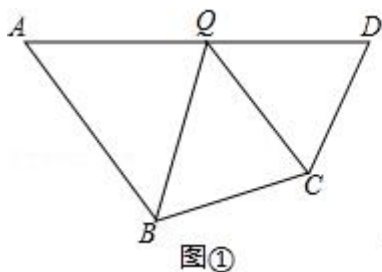
7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, 那么 $\frac{b-a}{b+a} =$ _____.
8. (4 分) 计算: $4\vec{a} - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.
9. (4 分) 如果两个相似三角形的周长比为 2:3, 那么它们的对应角平分线的比为_____.
10. (4 分) 抛物线 $y = -x^2$ 向上平移 2 个单位后所得的抛物线表达式是_____.
11. (4 分) 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 在 y 轴左侧的部分是_____. (填“上升”或“下降”)
12. (4 分) 二次函数 $y = x^2 + 2x + m$ 图象上的最低点的横坐标为_____.
13. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\cot \angle A = 2$, $BC = 3$, 那么 $AC =$ _____.
14. (4 分) 小明在楼上点 A 处看到楼下点 B 处的小丽的俯角是 32° , 那么点 B 处的小丽看点 A 处的小明的仰角是_____度.
15. (4 分) 直角三角形的重心到斜边中点的距离为 2, 那么该直角三角形的斜边长为_____.
16. (4 分) 如图, A 、 B 、 C 是小正方形的顶点, 且每个小正方形的边长相同, 那么 $\angle BAC$ 的正弦值为_____.



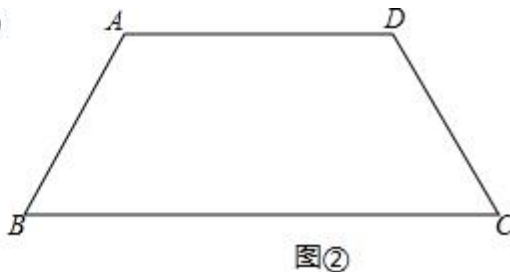
17. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 BC 的中点, 直线 DF 交边 AC 于点 F , 交 AB 的延长线于点 E , 如果 $CF:CA = a:b$, 那么 $BE:AE$ 的值为_____. (用含 a 、 b 的式子表示)



18. (4分) 如果四边形边上的点，它与对边两个端点的连线将这个四边形分成的三个三角形都相似，我们就把这个点叫做该四边形的“强相似点”. 如图①，在四边形 $ABCD$ 中，点 Q 在边 AD 上，如果 $\triangle QAB$ 、 $\triangle QBC$ 和 $\triangle QDC$ 都相似，那么点 Q 就是四边形 $ABCD$ 的“强相似点”；如图②，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC = 2$ ， $BC = 8$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，如果点 Q 是边 AD 上的“强相似点”，那么 $AQ =$ _____.



图①



图②

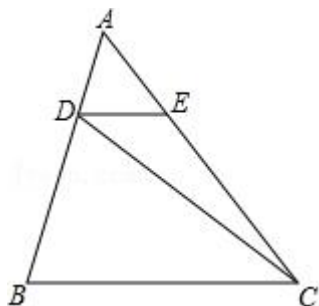
三. 解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算 $|\cot 30^\circ - 1| - 2\sin 60^\circ + (\cos 60^\circ)^0 + \frac{1}{\tan 30^\circ}$.

20. (10分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上. $AD = 2$ ， $DB = 4$ ， $AE = 3$ ， $EC = 6$ ， $DE = 3.2$.

(1) 求 BC 的长；

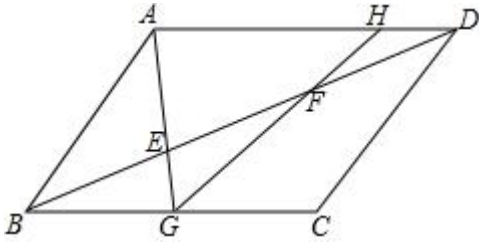
(2) 联结 DC ，如果 $\overrightarrow{DE} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CD}$.



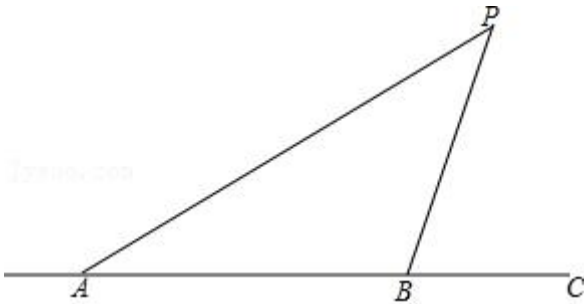
21. (10分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $BC = 8$ ，点 E 、 F 是对角线 BD 上的两点，且 $BE = EF = FD$ ， AE 的延长线交 BC 于点 G ， GF 的延长线交 AD 于点 H .

(1) 求 HD 的长；

(2) 设 $\triangle BGE$ 的面积为 a , 求四边形 $AEFH$ 的面积. (用含 a 的代数式表示)



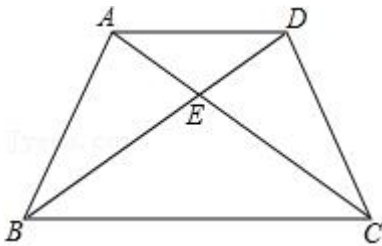
22. (10 分) 某条过路上通行车辆限速为 40 千米每小时, 在离道路 50 米的点 P 处建一个监测点, 道路的 AB 段为监测区(如图)在 $\triangle ABP$ 中, 已知 $\angle PAC = 26.5^\circ$, $\angle PBC = 68.2^\circ$. 一辆车通过 AB 段的时间为 9 秒, 请判断该车是否超速, 并说明理由. (参考数据: $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$, $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$, $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$, $\sin 68.2^\circ \approx 0.93$, $\cos 68.2^\circ \approx 0.37$, $\tan 68.2^\circ \approx 2.50$)



23. (12 分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, AC 、 BD 相交于点 E , $AE \cdot CE = DE \cdot BE$

(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ACB$;

(2) 如果 $DA^2 = DE \cdot DB$, 求证: $AB \cdot EC = BC \cdot AE$.

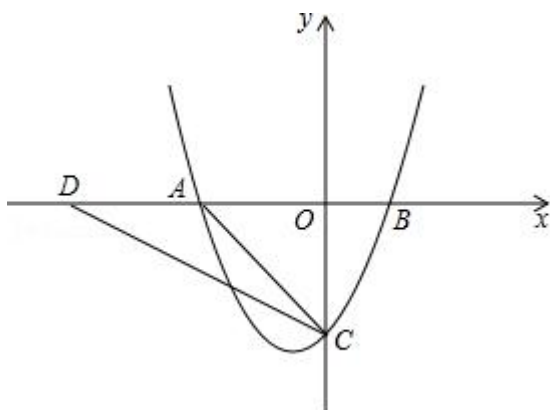


24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(2, 0)$, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求该抛物线的表达式及点 C 的坐标;

(2) 如果点 D 的坐标为 $(-8, 0)$, 联结 AC 、 DC , 求 $\angle ACD$ 的正切值;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 P 为抛物线上一点, 当 $\angle OCD = \angle CAP$ 时, 求点 P 的坐标.

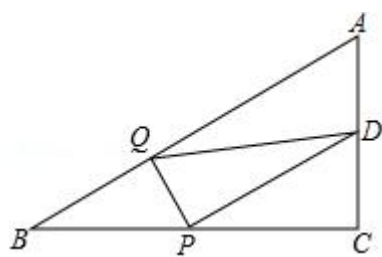


25. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, 点 D 为边 AC 的中点 (如图), 点 P 、 Q 分别是射线 BC 、 BA 上的动点, 且 $BQ = \frac{\sqrt{3}}{2}BP$, 联结 PQ 、 QD 、 DP .

(1) 求证: $PQ \perp AB$;

(2) 如果点 P 在线段 BC 上, 当 $\triangle PQD$ 是直角三角形时, 求 BP 的长;

(3) 将 $\triangle PQD$ 沿直线 QP 翻折, 点 D 的对应点为点 D' , 如果点 D' 位于 $\triangle ABC$ 内, 请直接写出 BP 的取值范围.



2020-2021 学年上海市青浦区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分）

- 1.（4 分）已知线段 $AB = 2$ ， P 是线段 AB 的黄金分割点， $AP > PB$ ，那么线段 AP 的长度等于（ ）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\sqrt{5}-1$ C. $\sqrt{5}+1$ D. $3-\sqrt{5}$

【分析】直接根据黄金分割的定义求出 AP 的长即可．

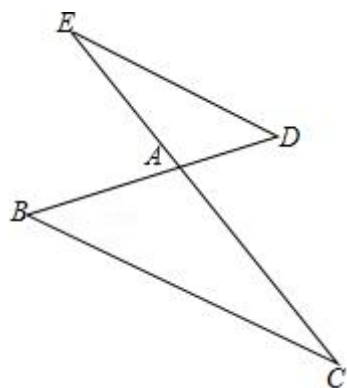
【解答】解：∵点 P 是线段 AB 的黄金分割点， $AP > BP$ ， $AB = 2$ ，

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \sqrt{5}-1,$$

故选：B．

【点评】本题考查了黄金分割的定义，熟练掌握黄金分割的定义及黄金比值是解题的关键．

- 2.（4 分）如图，已知 BD 与 CE 相交于点 A ， $DE \parallel BC$ ，如果 $AD = 2$ ， $AB = 3$ ， $AC = 6$ ，那么 AE 等于（ ）



A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{18}{5}$ C. 4 D. 9

【分析】证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，由相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ，则可得出答案．

【解答】解：∵ $ED \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

$$\text{即 } \frac{3}{2} = \frac{6}{AE},$$

$$\therefore AE = 4,$$

故选：C.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，熟记性质是解题的关键.

3. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\cos A$ 等于 ()

- A. $\frac{BC}{AB}$ B. $\frac{AC}{AB}$ C. $\frac{BC}{AC}$ D. $\frac{AC}{BC}$

【分析】根据锐角三角函数的定义进行判断即可.

【解答】解：锐角 A 的邻边与斜边的比叫做锐角 A 的余弦，记作 $\cos A$ ，

因此，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\cos A = \frac{AC}{AB}$ ，

故选：B.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义，掌握锐角三角函数的意义是正确判断的前提.

4. (4分) 抛物线 $y = -(x-2)^2 - 3$ 的顶点坐标是 ()

- A. (2, -3) B. (-2, -3) C. (2, 3) D. (-2, 3)

【分析】根据题目中的函数解析式可以直接写出该抛物线的顶点坐标，本题得以解决.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = -(x-2)^2 - 3$ ，

$\therefore$ 该抛物线的顶点坐标是 (2, -3)，

故选：A.

【点评】本题考查二次函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答.

5. (4分) 已知 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$ ，且 $\vec{c} \neq \vec{0}$ ，下列说法中，不正确的是 ()

- A. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

【分析】由： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$ ，推出 $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{c}$ ， $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$ ， $\vec{a} = -3\vec{b}$ ，由此即可判断.

断.

【解答】解： $\because \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$ ，

$$\therefore \vec{a} = \frac{3}{2}\vec{c}, \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c},$$

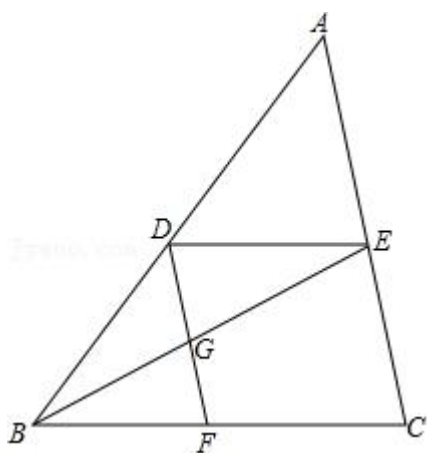
$$\therefore \vec{a} = -3\vec{b},$$

$\therefore A, B, C$ 正确,

故选: D .

【点评】 本题考查平面向量, 平行向量的判定和性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

6. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$, 联结 BE , BE 与 DF 相交于点 G , 则下列结论一定正确的是 ()



- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$ B. $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ C. $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{DE}$ D. $\frac{DG}{GF} = \frac{BF}{FC}$

【分析】 利用相似三角形的性质和平行线分线段成比例依次判断可求解.

【解答】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

故 A, B 选项不符合题意,

$$\because DF \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{CF},$$

又 $DE \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 为平行四边形,

$$\therefore CF = DE,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{DE}.$$

故 C 选项正确,

$$\because DE \parallel BF,$$

$$\therefore \triangle DGE \sim \triangle FGB,$$

$$\therefore \frac{DG}{GF} = \frac{DE}{BF} = \frac{CF}{BF},$$

故 D 选项不符合题意.

故选: C.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 灵活运用相似三角形的性质是本题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每小题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, 那么 $\frac{b-a}{b+a} = \underline{-\frac{1}{7}}$.

【分析】 根据已知条件设 $a = 3k$, $b = 4k$ ($k \neq 0$), 再代入要求的式子进行计算即可得出答案.

【解答】 解: $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore \text{设 } a = 3k, b = 4k \text{ (} k \neq 0 \text{),}$$

$$\therefore \frac{b-a}{b+a} = \frac{4k-3k}{4k+3k} = \frac{1}{7}.$$

故答案为: $\frac{1}{7}$.

【点评】 此题考查了比例的性质, 熟练掌握比例的性质是解题的关键.

8. (4 分) 计算: $4\vec{a} - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) = \underline{\vec{a} + 6\vec{b}}$.

【分析】 先利用乘法结合律去括号, 然后计算加减法.

【解答】 解: 原式 $= 4\vec{a} - 3\vec{a} + 6\vec{b} = \vec{a} + 6\vec{b}$.

故答案是: $\vec{a} + 6\vec{b}$.

【点评】 本题主要考查了平面向量, 实数的运算法则同样能应用于平面向量的计算之中.

9. (4 分) 如果两个相似三角形的周长比为 2: 3, 那么它们的对应角平分线的比为 2: 3.

【分析】 根据相似三角形的性质进行分析即可得到答案.

【解答】 解: $\because$ 两个相似三角形的周长比为 2: 3,

$$\therefore \text{两个相似三角形的相似比为 } 2: 3,$$

$$\therefore \text{它们的对应角平分线之比为 } 2: 3,$$

故答案为: 2: 3.

【点评】 本题考查对相似三角形性质的理解.

(1) 相似三角形周长的比等于相似比.

(2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

(3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

10. (4分) 抛物线 $y = -x^2$ 向上平移 2 个单位后所得的抛物线表达式是 $y = -x^2 + 2$.

【分析】 求出平移后的抛物线的顶点坐标, 然后利用顶点式形式写出即可.

【解答】 解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2$ 向上平移 2 个单位后的顶点坐标为 $(0, 2)$,

$\therefore$ 所得抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2$.

故答案为: $y = -x^2 + 2$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换, 此类题目利用顶点的平移确定抛物线函数图象的变化更简便.

11. (4分) 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 在 y 轴左侧的部分是 下降. (填“上升”或“下降”)

【分析】 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的对称轴是 y 轴, 抛物线开口向上, 所以在 y 轴左侧的部分 y 随 x 的增加而减小.

【解答】 解: 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的对称轴为 y 轴, 抛物线开口向上,

$\therefore$ 在对称轴左侧 y 随 x 的增加而减小,

故答案为: 下降.

【点评】 本题考查二次函数的图象及性质; 熟练掌握二次函数的图象及性质是解题的关键.

12. (4分) 二次函数 $y = x^2 + 2x + m$ 图象上的最低点的横坐标为 -1 .

【分析】 直接利用二次函数最值求法得出函数顶点式, 进而得出答案.

【解答】 解: $\because$ 二次函数 $y = x^2 + 2x + m = (x+1)^2 - 1 + m$,

$\therefore$ 二次函数图象上的最低点的横坐标为: -1 .

故答案为: -1 .

【点评】 此题主要考查了二次函数的最值, 正确得出二次函数顶点式是解题关键.

13. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\cot \angle A = 2$, $BC = 3$, 那么 $AC =$ 6.

【分析】 利用余切的定义求解.

【解答】 解: $\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \cot \angle A = \frac{AC}{BC} = 2$,

$$\therefore AC = 2BC = 2 \times 3 = 6.$$

故答案为 6.

【点评】 本题考查了锐角三角函数的定义：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$. 锐角 A 的邻边 b 与对边 a 的比叫做 $\angle A$ 的余切，记作 $\cot A$.

14. (4 分) 小明在楼上点 A 处看到楼下点 B 处的小丽的俯角是 32° , 那么点 B 处的小丽看点 A 处的小明的仰角是 32 度.

【分析】 根据两点之间的仰角与俯角正好是两条水平线夹角的内错角，应相等即可得结论.

【解答】 解：因为从点 A 看点 B 的仰角与从点 B 看点 A 的俯角互为内错角，大小相等. 所以小明在楼上点 A 处看到楼下点 B 处小丽的俯角是 32° , 点 B 处小丽看点 A 处小明的仰角是 32° .

故答案为：32.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，解决本题的关键是掌握仰角与俯角的定义.

15. (4 分) 直角三角形的重心到斜边中点的距离为 2，那么该直角三角形的斜边长为 12 .

【分析】 根据重心是三角形三边中线的交点、重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1 解答.

【解答】 解： $\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心， $OM = 2$,

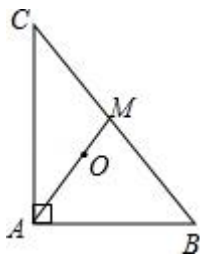
$$\therefore OA = 2OM = 4,$$

$$\therefore AM = OA + OM = 6,$$

在 $\text{Rt}\triangle CAB$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$, AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，

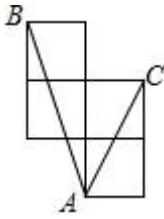
$$\therefore BC = 2AM = 2 \times 6 = 12,$$

故答案为：12.



【点评】 本题考查的是三角形的重心的性质以及直角三角形斜边上中线的性质，掌握三角形的重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1 是解决问题的关键.

16. (4分) 如图, A 、 B 、 C 是小正方形的顶点, 且每个小正方形的边长相同, 那么 $\angle BAC$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



【分析】 连接 BC , 如图, 先利用网格特点和勾股定理计算出 $CB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10}$, 再利用勾股定理的逆定理可证明 $\triangle ACB$ 为直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 然后根据正弦的定义求解.

【解答】 解: 连接 BC , 如图,

$$\because CB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

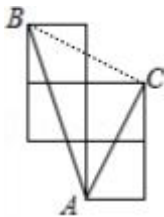
$$\therefore CB^2 + CA^2 = AB^2,$$

$$\therefore \triangle ACB \text{ 为直角三角形, } \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

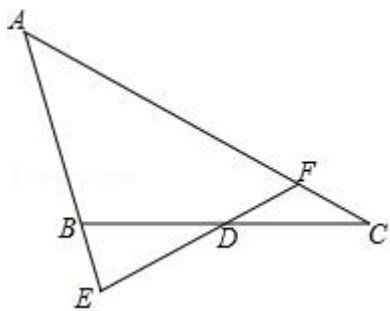
$$\text{即 } \angle BAC \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



【点评】 本题考查了锐角三角函数的定义: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$. 锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$. 也考查了勾股定理和勾股定理的逆定理.

17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 BC 的中点, 直线 DF 交边 AC 于点 F , 交 AB 的延长线于点 E , 如果 $CF:CA = a:b$, 那么 $BE:AE$ 的值为 $\frac{a}{b-a}$. (用含 a 、 b 的式子表示)



【分析】过 B 作 $BG \parallel AC$ ，交 EF 于点 G ，依据 $\triangle CDF \cong \triangle BDG$ (ASA)，即可得到 $CF = BG$ ，再根据 $\triangle EBG \sim \triangle EAF$ ，即可得到 $\frac{BE}{AE} = \frac{BG}{AF} = \frac{a}{b-a}$ 。

【解答】解：如图所示，过 B 作 $BG \parallel AC$ ，交 EF 于点 G ，

$$\therefore \angle C = \angle DBG,$$

$\because$ 点 D 是边 BC 的中点，

$$\therefore BD = CD,$$

又 $\because \angle BDG = \angle CDF$ ，

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle BDG \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CF = BG,$$

$$\because CF: CA = a: b,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{a}{b-a},$$

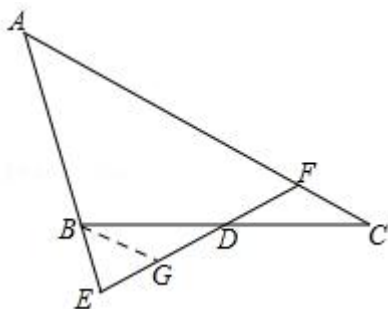
$$\therefore \frac{BG}{AF} = \frac{a}{b-a},$$

$$\because BG \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle EBG \sim \triangle EAF,$$

$$\therefore \frac{BE}{AE} = \frac{BG}{AF} = \frac{a}{b-a},$$

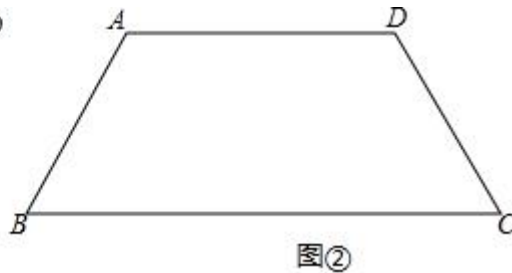
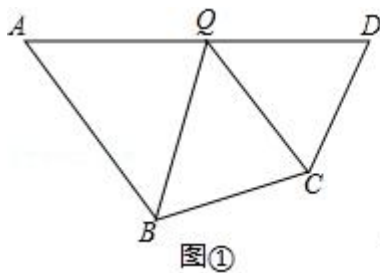
故答案为： $\frac{a}{b-a}$ 。



【点评】 本题考查的是相似三角形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质，在判定

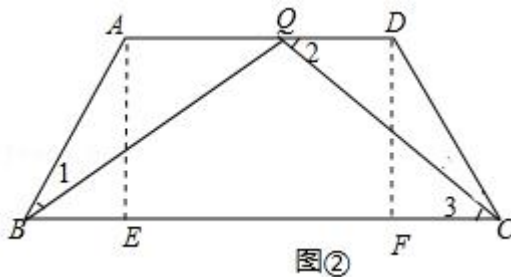
两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；或依据基本图形对图形进行分解、组合；或作辅助线构造相似三角形．

18. (4分) 如果四边形边上的点，它与对边两个端点的连线将这个四边形分成的三个三角形都相似，我们就把这个点叫做该四边形的“强相似点”．如图①，在四边形 $ABCD$ 中，点 Q 在边 AD 上，如果 $\triangle QAB$ 、 $\triangle QBC$ 和 $\triangle QDC$ 都相似，那么点 Q 就是四边形 $ABCD$ 的“强相似点”；如图②，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC = 2$ ， $BC = 8$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，如果点 Q 是边 AD 上的“强相似点”，那么 $AQ = \underline{3+\sqrt{5} \text{ 或 } 3-\sqrt{5}}$ ．



【分析】 如图，当 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ 时， $\triangle BAQ \sim \triangle QDC \sim \triangle CQB$ ，设 $AQ = x$ ．利用相似三角形的性质，构建方程求解即可．

【解答】 解：如图，当 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ 时， $\triangle BAQ \sim \triangle QDC \sim \triangle CQB$ ，设 $AQ = x$ ．



过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，过点 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ，则四边形 $AEFD$ 是矩形，

$$\therefore AD = EF,$$

$$\because AB = CD = 2, AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$$\therefore \angle ABE = \angle DCF = 60^\circ,$$

$$BE = AB \cdot \cos 60^\circ = 1, CF = CD \cdot \cos 60^\circ = 1,$$

$$\therefore EF = BC - BE - CF = 6,$$

$$\therefore AD = EF = 6, DQ = 6 - x,$$

$$\because \triangle BAQ \sim \triangle QDC,$$

$$\therefore \frac{AB}{QD} = \frac{AQ}{CD},$$

$$\therefore x(6-x) = 4,$$

$$\text{解得 } x = 3 \pm \sqrt{5},$$

$$\therefore AQ = 3 \pm \sqrt{5},$$

故答案为: $3+\sqrt{5}$ 或 $3-\sqrt{5}$

【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质, 等腰梯形的性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

三. 解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算 $|\cot 30^\circ - 1| - 2\sin 60^\circ + (\cos 60^\circ)^0 + \frac{1}{\tan 30^\circ}$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值和零指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】 解: 原式 $= \sqrt{3} - 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$$= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}$$

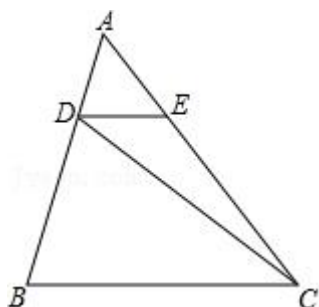
$$= \sqrt{3}.$$

【点评】 此题主要考查了实数运算, 正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上. $AD = 2$, $DB = 4$, $AE = 3$, $EC = 6$, $DE = 3.2$.

(1) 求 BC 的长;

(2) 联结 DC , 如果 $\overrightarrow{DE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CD}$.



【分析】 (1) 首先证明 $DE \parallel BC$, 再利用相似三角形的性质解决问题即可.

(2) 根据 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$, 求解即可.

【解答】 解: (1) $\because AD = 2$, $DB = 4$, $AE = 3$, $EC = 6$,

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{9},$$

$$\therefore BC = 3DE = 9.6.$$

$$(2) \because BD = \frac{2}{3}AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{b},$$

$$\because BC = 3DE,$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{ED} = -3\overrightarrow{a},$$

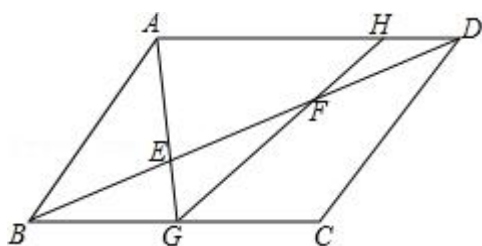
$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -3\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}.$$

【点评】 本题考查相似三角形的性质，平面向量，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

21. (10分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $BC = 8$ ，点 E 、 F 是对角线 BD 上的两点，且 $BE = EF = FD$ ， AE 的延长线交 BC 于点 G ， GF 的延长线交 AD 于点 H 。

(1) 求 HD 的长；

(2) 设 $\triangle BGE$ 的面积为 a ，求四边形 $AEFH$ 的面积。(用含 a 的代数式表示)



【分析】 (1) 通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle GBE$ ， $\triangle DHF \sim \triangle BGF$ ，由相似三角形的性质可求解；

(2) 由相似三角形的性质可求 $S_{\triangle ADE} = 4a$ ， $S_{\triangle DHF} = \frac{1}{2}a$ ，即可求解。

【解答】 解：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC = 8, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle GBE, \triangle DHF \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{AD}{BG} = \frac{DE}{BE} = 2, \frac{DH}{BG} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}AD = 4, \quad DH = \frac{1}{2}BG = 2.$$

(2) $\because \triangle BGE$ 的面积为 a , $BE = EF = FD$,

$$\therefore S_{\triangle BFG} = 2a,$$

$\because \triangle ADE \sim \triangle GBE$, $\triangle DHF \sim \triangle BGF$,

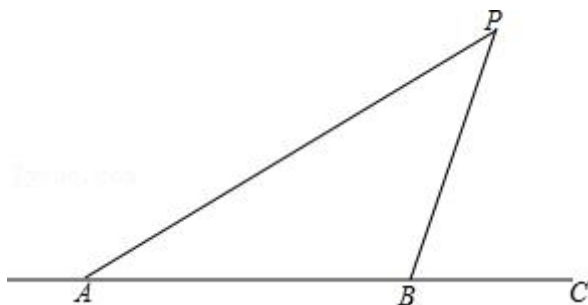
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BEG}} = 4, \quad \frac{S_{\triangle DHF}}{S_{\triangle BGF}} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 4a, \quad S_{\triangle DHF} = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \text{四边形 } AEFH \text{ 的面积} = 4a - \frac{1}{2}a = \frac{7}{2}a.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的性质是解题的关键.

22. (10 分) 某条过路上通行车辆限速为 40 千米每小时，在离道路 50 米的点 P 处建一个监测点，道路的 AB 段为监测区(如图)在 $\triangle ABP$ 中，已知 $\angle PAC = 26.5^\circ$, $\angle PBC = 68.2^\circ$. 一辆车通过 AB 段的时间为 9 秒，请判断该车是否超速，并说明理由.(参考数据: $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$, $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$, $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$, $\sin 68.2^\circ \approx 0.93$, $\cos 68.2^\circ \approx 0.37$, $\tan 68.2^\circ \approx 2.50$)



【分析】 过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D ，解直角三角形可得到 AB 的长，再利用路程除以时间可得时速度，再进行比较，可得答案.

【解答】 解：不超速，

理由：过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D .

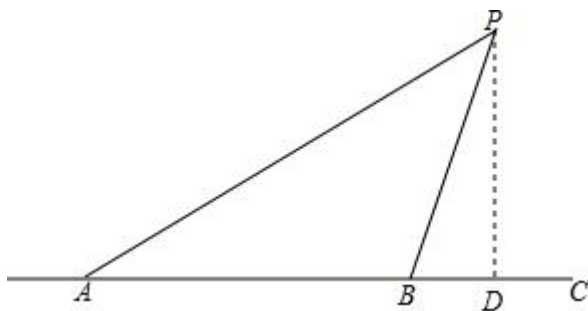
$$\text{在 Rt}\triangle APD \text{ 中, } \tan \angle PAD = \frac{PD}{AD},$$

$$\therefore AD = \frac{PD}{\tan \angle PAC} = \frac{50}{\tan 26.5^\circ} \text{ (米)}, \quad \text{同理, } BD = \frac{50}{\tan 68.2^\circ} \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = AD - BD = \frac{50}{\tan 26.5^\circ} - \frac{50}{\tan 68.2^\circ} = \frac{50}{0.5} - \frac{50}{2.5} = 80 \text{ (米)},$$

$$\therefore v = 80 \div 9 = \frac{80}{9} \text{ (m/s)} < \frac{100}{9} \text{ (m/s)} = 40 \text{ (km/h)},$$

故不超速.

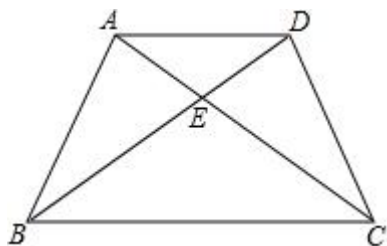


【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用，关键是构造出直角三角形，掌握三角函数定义.

23. (12分) 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， AC 、 BD 相交于点 E ， $AE \cdot CE = DE \cdot BE$

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ACB$ ；

(2) 如果 $DA^2 = DE \cdot DB$ ，求证： $AB \cdot EC = BC \cdot AE$.



【分析】(1) 根据 $AE \cdot CE = DE \cdot BE$ ， $\angle AED = \angle BEC$ ，可得 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$ ，得 $\angle DAE = \angle CBE$ ， $\angle ADE = \angle BCE$ ，根据 $AB = AD$ ，进而可以证明结论；

(2) 根据 $DA^2 = DE \cdot DB$ ， $\angle ADB = \angle ADE$ ，可得 $\triangle ADB \sim \triangle ADE$ ，对应边成比例，结合 (1) $\triangle ADE \sim \triangle CBE$ 对应边成比例，进而可得结论.

【解答】证明：(1) $\because AE \cdot CE = DE \cdot BE$ ， $\angle AED = \angle BEC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle CBE$ ， $\angle ADE = \angle BCE$ ，

$\because AB = AD$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ABE$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle ACB$ ，

$\because \angle BAE = \angle CAB$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB$ ；

(2) $\because DA^2 = DE \cdot DB$ ， $\angle ADB = \angle ADE$ ，

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{DE},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{EC},$$

$$\therefore AD = \frac{DE \cdot BC}{EC},$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{DE \cdot BC}{DE \cdot EC} = \frac{BC}{EC},$$

$$\therefore AB \cdot EC = BC \cdot AE.$$

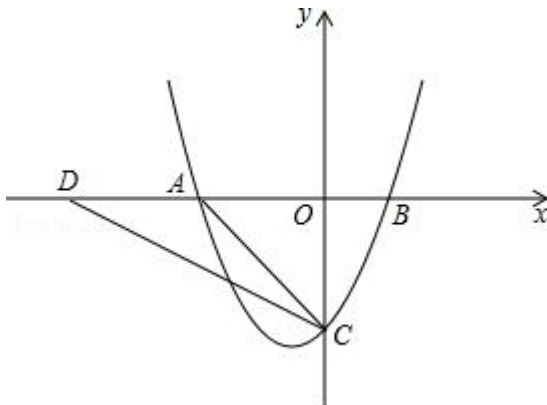
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(2, 0)$ ，与 y 轴交于点 C .

(1) 求该抛物线的表达式及点 C 的坐标；

(2) 如果点 D 的坐标为 $(-8, 0)$ ，联结 AC 、 DC ，求 $\angle ACD$ 的正切值；

(3) 在 (2) 的条件下，点 P 为抛物线上一点，当 $\angle OCD = \angle CAP$ 时，求点 P 的坐标.



【分析】 (1) 利用待定系数法可求解析式；

(2) 过 D 作 $DE \perp AC$ 交 CA 延长线于 E ，通过证明 $\triangle EAD \sim \triangle OAC$ ，由相似三角形的性质可求 $ED = 2\sqrt{2}$ ， $EC = 6\sqrt{2}$ ，即可求解；

(3) 由角的数量关系可求 $\angle ACP = \angle BAP$ ，由锐角三角函数可求解.

【解答】 解：(1) 将点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(2, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ ，

$$\text{可得} \begin{cases} 16a - 4b - 4 = 0 \\ 4a + 2b - 4 = 0 \end{cases},$$

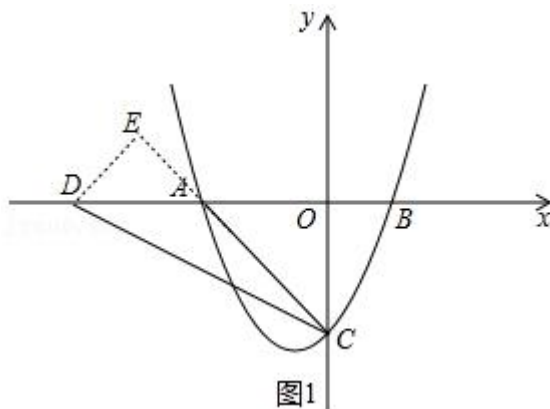
$$\text{解得：} a = \frac{1}{2}, b = 1$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$,

当 $x = 0$ 时, $y = -4$,

∴ $C(0, -4)$;

(2) 如图 1, 过 D 作 $DE \perp AC$ 交 CA 延长线于 E ,



∵ $C(0, -4)$, 点 $A(-4, 0)$,

∴ $OA = OC = 4$,

∴ $AC = 4\sqrt{2}$,

∵ $\angle EAD = \angle OAC$, $\angle DEA = \angle COA$,

∴ $\triangle EAD \sim \triangle OAC$,

∴ $\frac{DE}{CO} = \frac{EA}{OA} = \frac{DA}{CA} = \frac{4}{4\sqrt{2}}$,

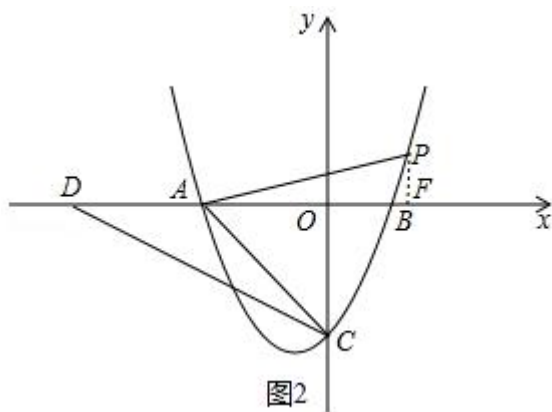
∴ $\frac{DE}{4} = \frac{EA}{4} = \frac{4}{4\sqrt{2}}$,

∴ $DE = 2\sqrt{2}$, $EA = 2\sqrt{2}$.

∴ $EC = 6\sqrt{2}$,

∴ $\tan \angle ACD = \frac{DE}{EC} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$;

(3) 如图 2, 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于 F , 设 $P(t, \frac{1}{2}t^2 + t - 4)$,



$$\because \angle OCD = \angle CAP,$$

$$\therefore \angle OCA + \angle ACD = \angle CAB + \angle BAP,$$

$$\therefore 45^\circ + \angle ACD = 45^\circ + \angle BAP,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle BAP,$$

$$\therefore \tan \angle BAP = \tan \angle ACD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle BAP = \frac{PF}{AF} = \frac{\frac{1}{2}t^2 + t - 4}{t + 4} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore t = \frac{8}{3} \text{ 或 } t = -4 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{9}\right).$$

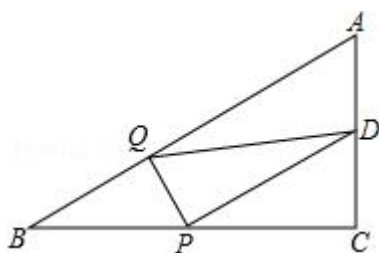
【点评】 本题是二次函数综合题，考查了二次函数的性质，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数等知识，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键。

25. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，点 D 为边 AC 的中点（如图），点 P 、 Q 分别是射线 BC 、 BA 上的动点，且 $BQ = \frac{\sqrt{3}}{2}BP$ ，联结 PQ 、 QD 、 DP 。

(1) 求证： $PQ \perp AB$ ；

(2) 如果点 P 在线段 BC 上，当 $\triangle PQD$ 是直角三角形时，求 BP 的长；

(3) 将 $\triangle PQD$ 沿直线 QP 翻折，点 D 的对应点为点 D' ，如果点 D' 位于 $\triangle ABC$ 内，请直接写出 BP 的取值范围。



【分析】 (1) 判断出 $\triangle BPQ \sim \triangle BAC$ ，得出 $\angle BQP = \angle ACB = 90^\circ$ ，即可得出结论；

(2) 先判断出 $\angle PQD < 90^\circ$, 再分两种情况, 利用锐角三角函数或相似三角形得出比例式, 即可得出结论;

(3) 找出分界点, 利用三角函数和勾股定理求解, 即可得出结论.

【解答】解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$,

根据勾股定理得, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$,

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BQ = \frac{\sqrt{3}}{2}BP,$$

$$\therefore \frac{BQ}{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{BQ}{BP} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle QBP = \angle CBA,$$

$$\therefore \triangle BPQ \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle BQP = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore PQ \perp AB;$$

(2) $\because$ 点 D 是 AC 的中点,

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}AC = 1,$$

由 (1) 知, $PQ \perp AB$,

$$\therefore \angle AQP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PQD < 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PQD$ 是直角三角形,

$\therefore$ ①当 $\angle DPQ = 90^\circ$ 时, 如图 1,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $AB = 4$,

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle QPB = 90^\circ - \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DPC = 90^\circ - \angle BPQ = 30^\circ,$$

$$\therefore CP = \frac{CD}{\tan \angle CPD} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore BP = BC - CP = \sqrt{3},$$

②当 $\angle PDQ = 90^\circ$ 时,

$$\therefore \angle ADQ + \angle PDC = 90^\circ,$$

如图 2,

过 Q 作 $QE \perp AC$ 于 E ,

$$\therefore \angle DEQ = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ADQ + \angle DQE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DQE = \angle PDC,$$

$$\therefore \triangle EQD \sim \triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{DE}{CP} = \frac{QE}{CD},$$

$$\therefore \frac{QE}{CD} = \frac{ED}{CP},$$

$$\text{设 } BP = t, \text{ 则 } CP = BC - BP = 2\sqrt{3} - t,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BQP \text{ 中, } BQ = BP \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore AQ = AB - BQ = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEQ \text{ 中, } QE = AQ \cos 30^\circ = \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{3}{4}t, \quad AE = \frac{1}{2}AQ = 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}t,$$

$$\therefore DE = AD - AE = \frac{\sqrt{3}}{4}t - 1,$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}t - 1}{2\sqrt{3} - t} = \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{4}t}{1},$$

$$\therefore t = \frac{15\sqrt{3} - \sqrt{51}}{6} \text{ 或 } t = \frac{15\sqrt{3} + \sqrt{51}}{6} \text{ (大于 } 2\sqrt{3}, \text{ 舍去)}$$

$$\therefore BP = \frac{15\sqrt{3} - \sqrt{51}}{6};$$

$$\text{即 } BP = \sqrt{3} \text{ 或 } \frac{15\sqrt{3} - \sqrt{51}}{6};$$

$$(3) \frac{5\sqrt{3}}{3} < BP < \frac{7\sqrt{3}}{3};$$

理由: 如图 3,

①当点 D' 恰好落在边 BC 上时,

由折叠知, $PD' = PD$, $PQ \perp DD'$,

由 (1) 知, $PQ \perp AB$,

$$\therefore DD' \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DD'C = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore CD' = \sqrt{3}CD = \sqrt{3},$$

设 $BP = m$, 则 $CP = BC - BP = 2\sqrt{3} - m$,

$$\therefore DP = D'P = CD' - CP = m - \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle CDP$ 中, 根据勾股定理得, $DP^2 = CP^2 + CD^2$,

$$\therefore (m - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3} - m)^2 + 1,$$

$$\therefore m = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

②当点 D' 落在 D 时, 即 PQ 过点 D ,

在 $\text{Rt}\triangle CDP'$ 中, $\angle P' = 90^\circ - \angle DD'P' = 30^\circ$,

$$\therefore CP' = \frac{CD}{\tan P'} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BP' = BC + CP' = \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{综上: } \frac{5\sqrt{3}}{3} < BP < \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

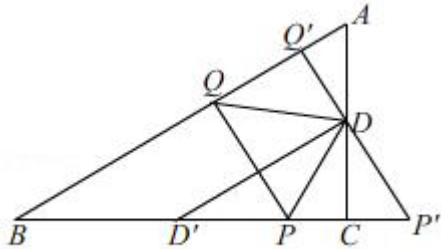


图3

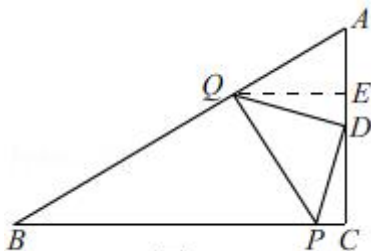
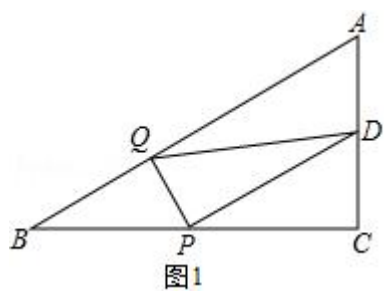


图2



【点评】此题是几何变换综合题，主要考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，锐角三角函数，用方程的思想解决问题是解本题的关键．