

2020 年上海市青浦区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：（本大题共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分）[每题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 如果两个相似三角形对应边之比是 $1:2$ ，那么它们的对应高之比是（ ）

- A. $1:2$; B. $1:4$; C. $1:6$; D. $1:8$.

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据相似三角形的对应高的比、中线、角平分线的比都等于相似比作答即可.

【详解】 $\because$ 两个相似三角形对应边之比是 $1:2$,

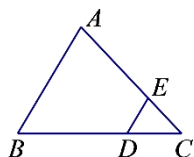
又 $\because$ 相似三角形的对应高的比、中线、角平分线的比都等于相似比,

$\therefore$ 它们的对应高之比是 $1:2$,

故选：A.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质：相似三角形的对应高的比、中线、角平分线的比都等于相似比.

2. 如图， $DE \parallel AB$ ，如果 $CE:AE = 1:2$ ， $DE=3$ ，那么 AB 等于（ ）



- A. 6; B. 9; C. 12; D. 13.

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据比例的性质得 $CE : CA = 1 : 3$ ，根据平行线分线段成比例定理的推论，即可求得答案.

【详解】 $\because CE : AE = 1 : 2$,

$$\therefore CE : CA = 1 : 3,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} = \frac{1}{3}$$

$$\because DE = 3,$$

$$\therefore AB = 3 DE = 9$$

故选：B

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理的推论及比例的性质，熟练运用“平行于三角形一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例”是解题的关键.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $AB = 3$ ，则下列结论正确的是（ ）

$$\text{A. } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{B. } \cos B = \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{C. } \tan B = \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{D. } \cot B = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

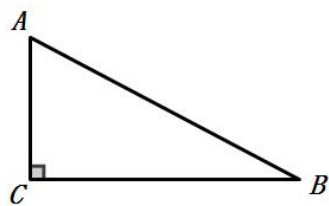
【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意画出图形，由勾股定理求出 BC 的长，再由锐角三角函数的定义进行解答即可.

【详解】



如图所示：

$\because$ Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=1$ ， $AB=3$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

故选：C

【点睛】 本题考查了锐角三角函数的定义，熟练锐角三角函数的定义是解题的关键.

4. 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，且有 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，下列说法中，不正确的是（ ）

- A. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ； B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ； C. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反； D. $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$.

【答案】D

【解析】

【分析】

根据平行向量以及模的知识求解即可.

【详解】 A. $\because \vec{a} = -2\vec{b}$ ，表明向量 $\vec{a}$ 与 $-2\vec{b}$ 是同一方向上相同的向量，自然模也相等， $\therefore$

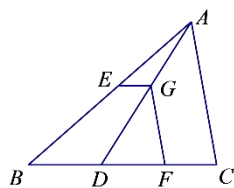
$|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，该选项不符合题意错误；

- B. $\because \vec{a} = -2\vec{b}$, 表明向量 $\vec{a}$ 与 $-2\vec{b}$ 是同一方向上相同的向量, 那么它们是相互平行的, 虽然 $-2\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 但还是相互平行, $\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$, 该选项不符合题意错误;
- C. $\because \vec{a} = -2\vec{b}$, 而 $-2\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反, 该选项不符合题意错误;
- D. $\because 0$ 只表示数量, 不表示方向, 而 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 是两个矢量相加是带方向的, 应该是 $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$, 该选项符合题意正确;

故选: D

【点睛】 本题主要考查了平面向量的基本知识.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 点 G 在线段 AD 上, $GE \parallel BD$, 且交 AB 于点 E , $GF \parallel AC$, 且交 CD 于点 F , 则下列结论一定正确的是 ()



- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD}$; B. $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$; C. $\frac{EG}{BD} = \frac{FG}{AC}$; D. $\frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AB}$.

【答案】 A

【解析】

【分析】

抓住已知条件: $GE \parallel BD$, $GF \parallel AC$, 利用平行线分线段成比例以及中间比代换, 对各选项一一判断即可求解.

【详解】 $\because GE \parallel BD$, $\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}$
 $\because GF \parallel AC$, $\therefore \frac{CF}{CD} = \frac{AG}{AD}$
 $\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD}$, A 选项正确;

$$\begin{aligned} \because GE \parallel BD, \therefore \frac{AE}{EB} &= \frac{AG}{GD} \\ \because GF \parallel AC, \therefore \frac{AG}{GD} &= \frac{CF}{FD} \\ \therefore \frac{AE}{EB} &= \frac{CF}{FD}, \text{ B 选项错误;} \\ \because GE \parallel BD, \therefore \frac{EG}{BD} &= \frac{AG}{AD} \\ \because GF \parallel AC, \therefore \frac{GF}{AC} &= \frac{DG}{AD} \\ \therefore \frac{EG}{BD} &\neq \frac{GF}{AC}, \text{ C 选项错误;} \\ \because GE \parallel BD, \therefore \frac{AE}{AG} &= \frac{AB}{AD}, \text{ D 选项错误;} \end{aligned}$$

故选：A

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理，灵活运用中间比是解题的关键.

6. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上部分点的横坐标 x , 纵坐标 y 的对应值如下表, 那么下列

结论中正确的是 ()

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	0	4	6	6	4	...

- A. $a > 0$; B. $b < 0$; C. $c < 0$; D. $abc < 0$.

【答案】 D

【解析】

【分析】

利用待定系数法求得 a 、 b 、 c 的值, 根据 a 、 b 、 c 的值即可求解.

【详解】 $\because x = -1$ 时 $y = 4$; $x = 0$ 时 $y = 6$; $x = -2$ 时 $y = 0$,

$$\therefore a-b+c=4$$

$$c=6$$

$$4a-2b+c=0,$$

$$\text{解得: } a=-1, b=1, c=6.$$

$$\therefore abc=-1 \times 1 \times 6 = -6 < 0,$$

故选: D

【点睛】本题考查的是二次函数的性质及用待定系数法求二次函数的解析式, 先根据图表列出关于 a 、 b 、 c 的方程组, 求出 a 、 b 、 c 的值是解答此题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每小题 4 分, 满分 48 分) [请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, 那么 $\frac{a}{b-a}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$;

【解析】

【分析】

根据比例的性质, 设 $a=2k$, 则 $b=5k$, 代入求解即可.

【详解】 设 $a=2k$, 则 $b=5k$,

$$\frac{a}{b-a} = \frac{2k}{5k-2k} = \frac{2}{3}$$

故答案为: $\frac{2}{3}$

【点睛】 本题考查了比例的性质.

8. 已知线段 $AB=2$, P 是 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 那么 $AP=$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-1$;

【解析】

【分析】

根据黄金分割的定义 $AP^2 = BP \times AB$ ，即可求得答案.

【详解】根据题意，设 $AP = x$ ，则 $BP = 2 - x$ ，

依题意得： $AP^2 = BP \times AB$ ，即： $x^2 = 2(2 - x)$

化简得： $x^2 + 2x - 4 = 0$

解得： $x = \sqrt{5} - 1$ (负值已舍)

故答案为： $\sqrt{5} - 1$

【点睛】本题考查了黄金分割的定义，利用黄金分割的定义构建方程是解题的关键.

9. 已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 3$ ，那么 $\vec{a} =$ _____ (用向量 $\vec{e}$ 的式子表示)

【答案】 $-3\vec{e}$.

【解析】

试题分析：由向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 3$ ，根据单位向量与相反向量的知识，

即可求得答案. $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 3$ ，

$\therefore \vec{a} = -3\vec{e}$.

故答案为 $-3\vec{e}$.

考点：平面向量.

10. 如果抛物线 $y = ax^2 - 1$ 的顶点是它的最低点，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 0$;

【解析】

【分析】

由于原点是抛物线 $y = ax^2 - 1$ 的最低点，这要求抛物线必须开口向上，由此可以确定 a 的范

围.

【详解】 $\because$ 原点是抛物线 $y = ax^2 - 1$ 的最低点,

$\therefore a > 0$.

故答案为: $a > 0$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的最值的知识点, 解答此题要掌握二次函数图象的特点.

11. 如果点 $A(-3, y_1)$ 和点 $B(-2, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 + a$ 上的两点, 那么 y_1 y_2 . (填“ $>$ ”、“ $=$ ”、“ $<$ ”).

【答案】 $>$;

【解析】

【分析】

先判断出抛物线开口方向, 进而求出对称轴, 利用函数的增减性即可求解.

【详解】 $\because$ 二次项系数为 1,

$\therefore$ 开口向上,

$\because$ 对称轴是直线: $x = 0$, 即 y 轴,

又 $\because -3 < -2$

$\therefore y_1 > y_2$

故答案为: $>$

【点睛】 本题考查了二次函数图象上点坐标特征, 主要利用了二次函数的增减性与对称性, 明白开口向上、对称轴左侧, 函数值随自变量增大反而减少的特征是解题的关键.

12. 某公司 10 月份的产值是 100 万元, 如果该公司第四季度每个月产值的增长率相同, 都为 $x(x > 0)$, 12 月份的产值为 y 万元, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.

【答案】 $y = 100(1+x)^2$;

【解析】

【分析】

根据：现有量=原有量 $\times(1+\text{增长率})^n$ ，即可列方程求解.

【详解】依题意得： $y = 100(1+x)^2$

故答案为： $y = 100(1+x)^2$

【点睛】考查了一元二次方程的应用，可直接套公式：原有量 $\times(1+\text{增长率})^n$ =现有量， n 表示增长的次数.

13.在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，如果 $\tan B=2$ ， $AB=4$ ，那么 $BC=$ _____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$;

【解析】

【分析】

根据 $\tan B = \frac{AC}{BC} = 2$ ，得 $AC = 2BC$ ，结合 $AB=4$ ，利用勾股定理即可求得答案.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\tan B=2$ ，

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = 2,$$

$$\therefore AC = 2BC$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\therefore 4^2 = (2BC)^2 + BC^2$$

$$\therefore 5BC^2 = 4^2$$

$$\therefore BC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点睛】本题主要考查了解直角三角形，正确理解三角形函数的定义、熟练应用勾股定理，

是解答本题的关键.

14. 小明沿着坡度 $i=1:2.5$ 的斜坡前行了 29 米, 那么他上升的高度是_____米.

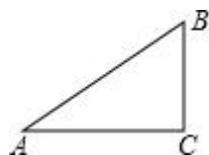
【答案】 $2\sqrt{29}$;

【解析】

【分析】

根据垂直高度: 水平宽度 $=1:2.5$, 可用未知数表示出垂直高度和水平宽度的值, 进而可用勾股定理求得垂直高度的值.

【详解】 如图.



$AB = 29$ 米, $BC: AC = 1:2.5$.

设 $BC = x$ 米, 则 $AC = 2.5x$ 米.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB^2 = BC^2 + AC^2$,

即 $x^2 + (2.5x)^2 = 29^2$,

化简得: $\frac{29}{4}x^2 = 29^2$,

解得: $x = 2\sqrt{29}$.

$\therefore$ 上升高度是: $2\sqrt{29}$ 米.

故答案为: $2\sqrt{29}$.

【点睛】 本题考查了坡度的定义以及直角三角形中三角函数值的计算以及勾股定理在直角三角形中的运用, 注意构造直角三角形, 并借助解直角三角形的知识求解是关键.

15. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $AB=AC=5, BC=8$, 那么 $AG=$ _____.

【答案】 2.

【解析】

试题分析：根据题意画出图形，连接 AG 并延长交 BC 于点 D，由等腰三角形的性质可得出 $AD \perp BC$ ，再根据勾股定理求出 AD 的长，由三角形重心的性质即可得出 AG 的长.

如图所示：连接 AG 并延长交 BC 于点 D，

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心， $AB=AC=5$ ， $BC=8$ ，

$$\therefore AD \perp BC, BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

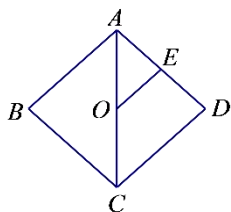
$$\therefore AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 3 = 2.$$

故答案为 2.

考点：三角形的重心.

16.如图，在菱形 $ABCD$ 中， O 、 E 分别是 AC 、 AD 的中点，联结 OE . 如果 $AB=3$ ， $AC=4$ ，

那么 $\cot \angle AOE =$ _____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

【解析】

【分析】

根据 O 、 E 分别是 AC 、 AD 的中点，知 OE 是中位线得 $\angle AOE = \angle ACD$ ，连接 BD ，根据菱形的性质知 AC 与 BD 垂直平分，在 $Rt \triangle OCD$ 中，根据勾股定理可求得 OD ，继而求得答案.

【详解】如图，连接 BD ，

在菱形 $ABCD$ 中， O 是 AC 的中点，

$\therefore O$ 也是对角线的交点，且 AC 与 BD 垂直平分，

$\because O、E$ 分别是 $AC、AD$ 的中点，

$\therefore OE \parallel CD$ ，

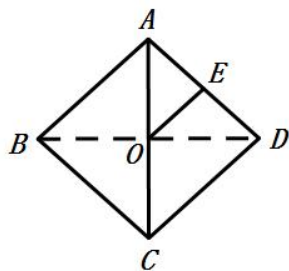
$\therefore \angle AOE = \angle ACD$

在 $Rt\triangle OCD$ 中， $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ， $CD = AB = 3$ ，

$\therefore OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

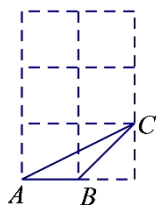
$\therefore \cot \angle AOE = \cot \angle ACD = \frac{OC}{OD} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



【点睛】本题考查了求角的正切余切函数，涉及的知识有：菱形的性质，中位线的性质以及勾股定理，利用中位线的性质证得 $\angle AOE = \angle ACD$ 是解题的关键.

17. 在方格纸中，每个小格的顶点叫做格点，以格点连线为边的三角形叫做格点三角形. 如图，请在边长为 1 个单位的 2×3 的方格纸中，找出一个格点三角形 DEF . 如果 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似（相似比不为 1），那么 $\triangle DEF$ 的面积为_____.



【答案】 1；

【解析】

【分析】

根据小正方形的边长, 分别求出 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 三边的长, 然后判断它们是否对应成比例, 再用三角形面积公式求解即可.

【详解】 如图,

$$\because AB=1, BC=\sqrt{2}, AC=\sqrt{5}$$

$$\therefore AB:BC:AC=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$$

$$\because DE=\sqrt{2}, EF=2, DF=\sqrt{10}$$

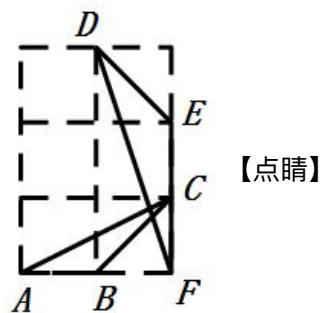
$$\therefore DE:EF:DF=\sqrt{2}:2:\sqrt{10}=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$$

$$\therefore AB:BC:AC=DE:EF:DF$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

故答案为: 1



本题考查了在网格中画与已知三角形相似的三角形、三角形全等的判定以及三角形面积公式, 熟练掌握三角形全等的判定是解题的关键.

18. 已知, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=5\text{cm}$, 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点, 折叠矩形纸片 $ABCD$, 折痕 BM 交 AD 边于点 M , 在折叠的过程中, 如果点 A 恰好落在线段 EF 上, 那

么边 AD 的长至少是_____cm.

【答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

【解析】

【分析】

根据折叠的性质知 $FB = AB = 5$ ，在 $Rt\triangle FBE$ 中可求得 FE 的长，即可获得答案.

【详解】如图，当点 A 恰好与点 F 重合时，边 AD 的长最短，

根据折叠的性质得： $FB = AB = 5$ ，

$\because$ 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点，

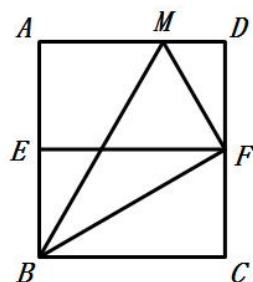
$\therefore EF \parallel AD$ ，则 $EF \perp AB$ ， $EB = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$ ，

在 $Rt\triangle FBE$ 中，

$$EF = \sqrt{BF^2 - EB^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ 边 AD 的长至少是 $\frac{5\sqrt{3}}{2}cm$

故答案是： $\frac{5\sqrt{3}}{2}$



【点睛】本题主要考查了折叠问题、矩形的性质、平行线的性质以及勾股定理，牢固掌握矩

形的性质、平行线的性质、勾股定理等几何知识点是基础，灵活运用是关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分） [请将解题过程填入答题纸的相应位置]

19. 计算: $3 \tan 30^\circ - \frac{1}{\cos 60^\circ} + \sqrt{8} \cos 45^\circ + \sqrt{(1 - \tan 60^\circ)^2}$.

【答案】 $2\sqrt{3} - 1$.

【解析】

【分析】

将特殊角的三角函数值代入, 根据实数的运算法则求值即可.

【详解】 原式 = $3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$

$$= \sqrt{3} - 2 + 2 + \sqrt{3} - 1$$

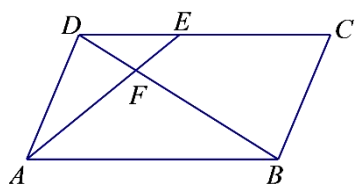
$$= 2\sqrt{3} - 1.$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值以及实数的混合运算, 熟记特殊角的三角函数值、熟练掌握实数的运算法则是解题的关键.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 DC 上一点, AE 与 BD 交于点 F , $DE : EC = 2 : 3$. (1)

求 $BF : DF$ 的值;

(2) 如果 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AF}$.



【答案】 (1) $5 : 2$; (2) $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$

【解析】

【分析】

(1) 根据平行线分线段成比例定理以及比例的性质, 即可求得答案;

(2) 首先根据已知条件, 求得 $BF = \frac{5}{7}BD$, 再根据向量的性质即可求得答案.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore DC \parallel AB, DC = AB,$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{AB}{DE}.$$

$$\because DE : EC = 2 : 3,$$

$$\therefore DC : DE = 5 : 2,$$

$$\therefore AB : DE = 5 : 2,$$

$$\therefore BF : DF = 5 : 2.$$

$$(2) \because BF : DF = 5 : 2, \therefore BF = \frac{5}{7}BD,$$

$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \therefore \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{5}{7}\overrightarrow{BD} = \frac{5}{7}\vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF},$$

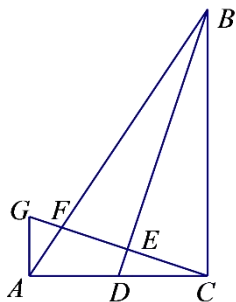
$$\therefore \overrightarrow{AF} = \vec{b} + \frac{5}{7}\vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b} = \frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}.$$

【点睛】本题考查了平行四边形性质、平行线分线段成比例定理、比例的性质以及平面向量的知识, 根据比例的性质进行灵活变形是解题的关键. 解题时要注意向量是有方向的.

21. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 3$. 点 D 为 AC 的中点, 联结 BD , 过点 C 作 $CG \perp BD$, 交 AC 的垂线 AG 于点 G , GC 分别交 BA 、 BD 于点 F 、 E .

(1) 求 GA 的长;

(2) 求 $\triangle AFC$ 的面积.



【答案】 (1) $\frac{2}{3}$; (2) $\frac{6}{11}$.

【解析】

【分析】

(1) 由 $\angle ACB=90^\circ$, $CG \perp BD$, 证得 $\angle CBE = \angle GCA$, 继而证得 $\triangle BCD \sim \triangle CAG$, 其对应边成比例求得答案;

(2) 由 $GA \parallel BC$, 求得 $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{11}$, 根据等高的两个三角形面积的比等于底边的比即可求得答案.

【详解】 (1) $\because \angle ACB=90^\circ$,

$$\therefore \angle BCE + \angle GCA = 90^\circ.$$

$$\because CG \perp BD,$$

$$\therefore \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle GCA.$$

$$\text{又} \because \angle DCB = \angle GAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle CAG.$$

$$\therefore \frac{CD}{AG} = \frac{BC}{CA},$$

$$\therefore \frac{1}{AG} = \frac{3}{2}, \therefore AG = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \because \angle GAC + \angle BCA = 180^\circ,$$

$$\therefore GA \parallel BC.$$

$$\therefore \frac{GA}{BC} = \frac{AF}{FB}.$$

$$\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{2}{9}.$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{2}{11}.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{11}.$$

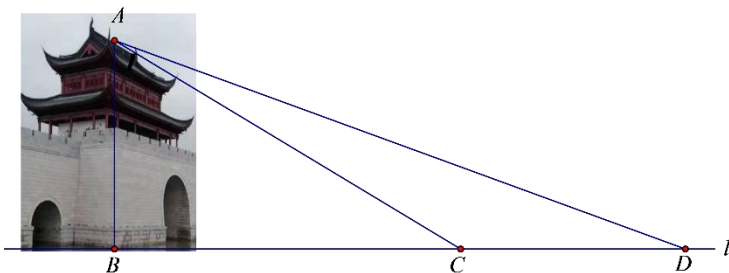
$$\text{又} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AFC} = \frac{6}{11}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质、平行线分线段成比例定理、三角形面积公式，利用“等高的两个三角形面积的比等于底边的比”是解题的关键.

22.水城门位于淀浦河和漕港河三叉口，是环城水系公园淀浦河梦蝶岛区域重要的标志性景观.在课外实践活动中，某校九年级数学兴趣小组决定测量该水城门的高.他们的操作方法如下：如图，先在 D 处测得点 A 的仰角为 20° ，再往水城门的方向前进 13 米至 C 处，测得点 A 的仰角为 31° (点 D 、 C 、 B 在一直线上)，求该水城门 AB 的高. (精确到 0.1 米)

(参考数据： $\sin 20^\circ \approx 0.34$, $\cos 20^\circ \approx 0.94$, $\tan 20^\circ \approx 0.36$, $\sin 31^\circ \approx 0.52$, $\cos 31^\circ \approx 0.86$, $\tan 31^\circ \approx 0.60$)



【答案】11.7 米.

【解析】

【分析】

根据正切的概念表示出 BD、BC，根据题意列出方程，解方程即可.

【详解】由题意，得 $\angle ABD=90^\circ$ ， $\angle D=20^\circ$ ， $\angle ACB=31^\circ$ ， $CD=13$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned}\therefore \tan \angle D &= \frac{AB}{BD}, \\ \therefore BD &= \frac{AB}{\tan 20^\circ} = \frac{AB}{0.36}.\end{aligned}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\begin{aligned}\therefore \tan \angle ACB &= \frac{AB}{BC}, \\ \therefore BC &= \frac{AB}{\tan 31^\circ} = \frac{AB}{0.6}.\end{aligned}$$

$$\therefore CD = BD - BC,$$

$$\therefore 13 = \frac{AB}{0.36} - \frac{AB}{0.6}.$$

解得 $AB \approx 11.7$ 米.

答：水城门 AB 的高约为 11.7 米.

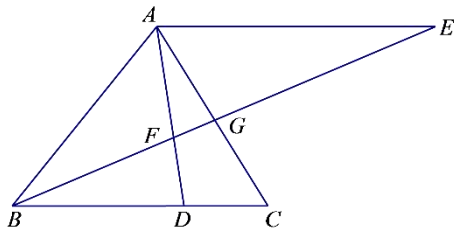
【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角问题，熟记锐角三角函数的概念是解题的关键.

23.已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $AE \parallel BC$ ， BE 与 AD 、 AC 分别相交于点 F 、

$$G, \quad AF^2 = FG \cdot FE.$$

(1) 求证： $\triangle CAD \sim \triangle CBG$;

(2) 联结 DG ，求证： $DG \cdot AE = AB \cdot AG$.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析；

【解析】

【分析】

(1) 由 $AF^2 = FG \cdot FE$ 及 $\angle AFG = \angle EFA$, 证得 $\triangle FAG \sim \triangle FEA$, 结合 $AE \parallel BC$, 证得 $\angle EBC = \angle FAG$, 从而证得结论；

(2) 由 (1) 的结论得到 $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG}$, 证得 $\triangle CDG \sim \triangle CAB$, 结合 $AE \parallel BC$, 证得 $\frac{AG}{AE} = \frac{GC}{CB}$,

继而证得结论.

【详解】(1) $\because AF^2 = FG \cdot FE$,

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{FE}{AF}.$$

又 $\because \angle AFG = \angle EFA$,

$$\therefore \triangle FAG \sim \triangle FEA.$$

$$\therefore \angle FAG = \angle E.$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle E = \angle EBC.$$

$$\therefore \angle EBC = \angle FAG.$$

又 $\because \angle ACD = \angle BCG$,

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBG.$$

$$(2) \because \triangle CAD \sim \triangle CBG,$$

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG}.$$

$$\text{又} \because \angle DCG = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle CDG \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{CG}{CB}.$$

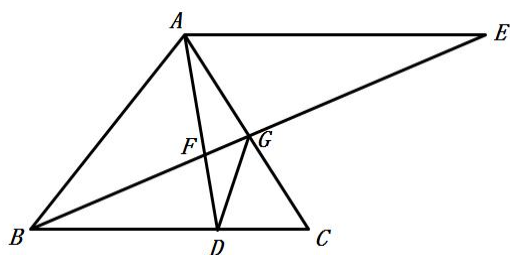
$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{CB} = \frac{AG}{GC}.$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{GC}{CB},$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{AG}{AE},$$

$$\therefore DG \cdot AE = AB \cdot AG.$$



【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例定理，灵活运用比例的性质以及中间比是解题的关键.

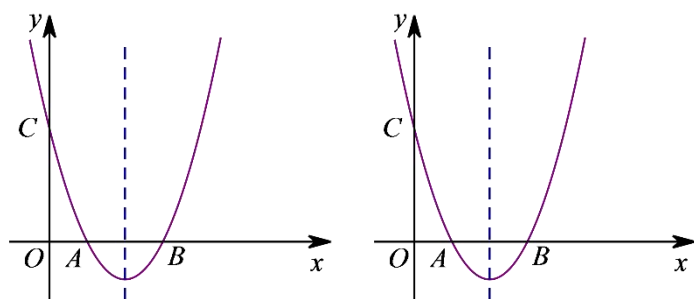
24.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x=2$ ，点 A 的坐标为 $(1, 0)$.

(1) 求该抛物线的表达式及顶点坐标；

(2) 点 P 为抛物线上一点（不与点 A 重合），联结 PC . 当 $\angle PCB = \angle ACB$ 时，求点 P 的坐

标；

(3) 在 (2) 的条件下，将抛物线沿平行于 y 轴的方向向下平移，平移后的抛物线的顶点为点 D ，点 P 关于 x 轴的对应点为点 Q ，当 $OD \perp DQ$ 时，求抛物线平移的距离.



【答案】 (1) $(2, -1)$ (2) $P(\frac{11}{3}, \frac{16}{9})$. (3) $\frac{1}{5}$.

【解析】

【分析】

(1) 用待定系数法即可求得抛物线的表达式，利用顶点公式即可求得抛物线的顶点坐标；

(2) 过点 P 作 $PN \perp x$ 轴，过点 C 作 $CM \perp PN$ ，交 NP 的延长线于点 M ，由点 B 、 C 的坐标得 $\triangle OBC$ 为等腰直角三角形，利用等量代换证得 $\angle OCA = \angle PCM$ ，利用这对角的正切函数得到 $MC = 3PM$ ，设 $PM = a$ ，则 $MC = 3a$ ， $PN = 3 - a$ ，得 $P(3a, 3 - a)$ 代入抛物线的表达式，即可求得答案；

(3) 设 D 的坐标为 $(2, -1 - m)$ ，过点 D 作直线 $EF \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 E ，交 PQ 的延长线于点 F ，利用 $\angle OED = \angle QFD = \angle ODQ = 90^\circ$ ，证得 $\angle EOD = \angle QDF$ ，再根据其正切函数列出等式即可求得答案.

【详解】 (1) $\because A$ 的坐标为 $(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 2$ ， $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$

将 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，得

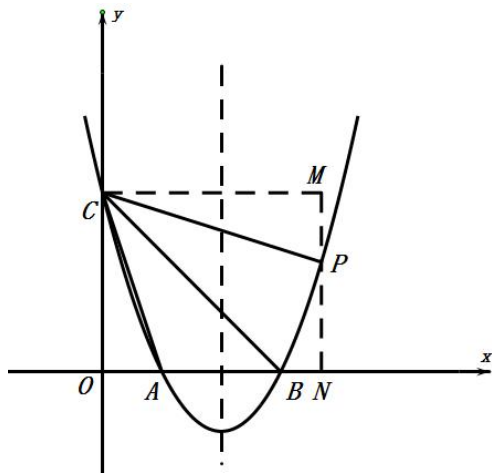
$$\begin{cases} 1+b+c=0, \\ 9+3b+c=0. \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} b=-4, \\ c=3. \end{cases}$$

所以, $y=x^2-4x+3$.

当 $x=2$ 时, $y=2^2-4 \times 2+3=-1$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(2, -1)$.

(2) 过点 P 作 $PN \perp x$ 轴, 垂足为点 N . 过点 C 作 $CM \perp PN$, 交 NP 的延长线于点 M .



$\because \angle CON=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $CONM$ 为矩形.

$\therefore \angle CMN=90^\circ$, $CO=MN$.

$\because y=x^2-4x+3$, $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 3)$

$\because B(3, 0)$,

$\therefore OB=OC$.

$\because \angle COB=90^\circ$,

$\therefore \angle OCB=\angle BCM=45^\circ$,

又 $\because \angle ACB=\angle PCB$,

$\therefore \angle OCB-\angle ACB=\angle BCM-\angle PCB$, 即 $\angle OCA=\angle PCM$.

$\therefore \tan \angle OCA=\tan \angle PCM$.

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{PM}{MC}.$$

设 $PM=a$, 则 $MC=3a$, $PN=3-a$.

$$\therefore P(3a, 3-a).$$

将 $P(3a, 3-a)$ 代入 $y=x^2-4x+3$, 得

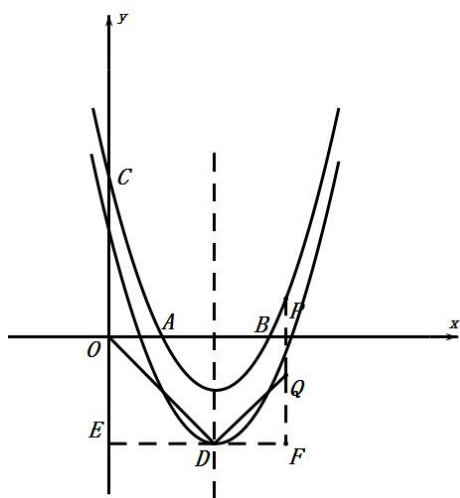
$$(3a)^2 - 12a + 3 = 3 - a.$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{11}{9}, a_2 = 0 \text{ (舍)}. \therefore P\left(\frac{11}{3}, \frac{16}{9}\right).$$

(3) 设抛物线平移的距离为 m . 得 $y=(x-2)^2-1-m$,

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } (2, -1-m).$$

过点 D 作直线 $EF \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 E , 交 PQ 的延长线于点 F .



$$\therefore \angle OED = \angle QFD = \angle ODQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOD + \angle ODE = 90^\circ, \quad \angle ODE + \angle QDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOD = \angle QDF,$$

$$\therefore \tan \angle EOD = \tan \angle QDF.$$

$$\therefore \frac{DE}{OE} = \frac{QF}{DF}.$$

$$\therefore \frac{2}{m+1} = \frac{\frac{16}{9} - m + 1 + m}{\frac{11}{3} - 2}.$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{5}.$$

所以，抛物线平移的距离为 $\frac{1}{5}$.

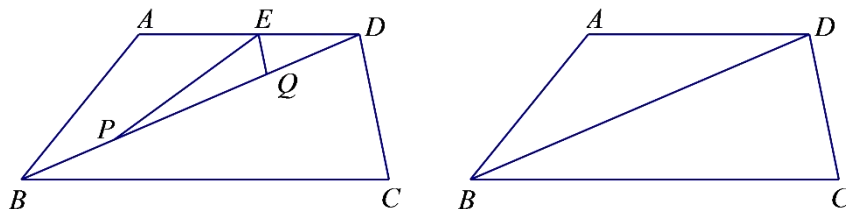
【点睛】本题是二次函数与几何的综合题，涉及的知识有：待定系数法、矩形的判定和性质、三角形函数等，综合性强，构建辅助线、正确表示出各点坐标是解题关键.

25. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = BD = 10$ ， $CD = 4$ ， $AD = 6$. 点 P 是线段 BD 上的动点，点 E 、 Q 分别是线段 DA 、 BD 上的点，且 $DE = DQ = BP$ ，联结 EP 、 EQ .

(1) 求证： $EQ \parallel DC$;

(2) 如果 $\triangle EPQ$ 是以 EQ 为腰的等腰三角形，求线段 BP 的长;

(3) 当 $BP = m$ ($0 < m < 5$) 时，求 $\angle PEQ$ 的正切值. (用含 m 的式子表示)



【答案】(1) 见解析; (2) $\frac{125}{23}$; (3) $2\sqrt{6} - \frac{2\sqrt{6}}{5}m$.

【解析】

【分析】

(1) 利用两边成比例且夹角相等可判定 $\triangle DEQ \sim \triangle BCD$ ，从而证得结论;

(2) 设 BP 的长为 x ，则 $DQ = x$ ， $QP = 2x - 10$ ，利用 (1) 的结论 $\triangle DEQ \sim \triangle BCD$ ，求得 $EQ = \frac{2}{5}x$. 分类讨论：当 $EQ = EP$ 、 $QE = QP$ 时，分别求得答案即可;

(3) 过点 P 作 $PH \perp EQ$ ，交 EQ 的延长线于点 H ；过点 B 作 $BG \perp DC$ ，垂足为点 G ，易证

得 $\triangle PHQ \sim \triangle BGD$, 利用对应边成比例通过计算得到 PH 、 EH 的值, 从而求得答案.

【详解】(1) $\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle EDQ = \angle DBC$.

$$\because \frac{DE}{DQ} = 1, \frac{BD}{BC} = 1, \therefore \frac{DE}{DQ} = \frac{BD}{BC}.$$

$$\therefore \triangle DEQ \sim \triangle BCD.$$

$$\therefore \angle DQE = \angle BDC,$$

$$\therefore EQ \parallel CD.$$

(2) 设 BP 的长为 x , 则 $DQ = x$, $QP = 2x - 10$.

$$\because \triangle DEQ \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{EQ}{DC} = \frac{QD}{CB},$$

$$\therefore EQ = \frac{2}{5}x.$$

(i) 当 $EQ = EP$ 时,

$$\therefore \angle EQP = \angle EPQ,$$

$$\because DE = DQ, \therefore \angle EQP = \angle QED, \therefore \angle EPQ = \angle QED,$$

$$\therefore \triangle EQP \sim \triangle DEQ, \therefore \frac{EQ}{DE} = \frac{QP}{EQ}, \therefore \left(\frac{2}{5}x\right)^2 = (2x - 10) \cdot x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{125}{23}, \text{ 或 } x = 0 \text{ (舍去).}$$

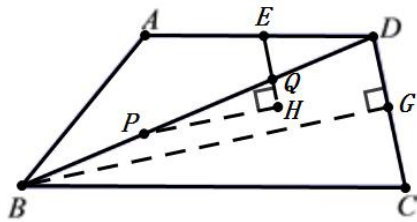
(ii) 当 $QE = QP$ 时,

$$\therefore \frac{2}{5}x = 2x - 10, \text{ 解得 } x = \frac{25}{4},$$

$$\because \frac{25}{4} > 6, \therefore \text{此种情况不存在.}$$

$$\therefore BP = \frac{125}{23}$$

(3) 过点 P 作 $PH \perp EQ$, 交 EQ 的延长线于点 H ; 过点 B 作 $BG \perp DC$, 垂足为点 G .



$$\because BD=BC, BG \perp DC, \therefore DG=2, BG=4\sqrt{6},$$

$$\because BP=DQ=m, \therefore PQ=10-2m.$$

$$\because EQ \parallel DC \therefore \angle PQH = \angle BDG.$$

$$\text{又} \because \angle PHQ = \angle BGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PHQ \sim \triangle BGD.$$

$$\therefore \frac{PH}{BG} = \frac{PQ}{BD} = \frac{HQ}{GD}, \therefore \frac{PH}{4\sqrt{6}} = \frac{10-2m}{10} = \frac{HQ}{2}.$$

$$\therefore HQ = \frac{10-2m}{5}, PH = \frac{2\sqrt{6}(10-2m)}{5}.$$

$$\therefore EH = \frac{10-2m}{5} + \frac{2m}{5} = 2,$$

$$\therefore \tan \angle PEQ = \frac{PH}{EH} = \frac{2\sqrt{6}(10-2m)}{5} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{6} - \frac{2\sqrt{6}}{5}m$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质的应用，等腰三角形的性质，分类讨论是正确

解答第(2)小题的关键，作出辅助线构建两个相似的直角三角形是正确解答第(3)小题的关键.