

2020 学年闵行初三数学质量调研

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, 是二次函数的是 ()

- A. $y = -\frac{2}{x^2} - 3x$ B. $y = -(x-1)^2 + x^2$ C. $y = 11x^2 + 29x$ D. $y = ax^2 + bx + c$

【答案】C

【解析】

【分析】函数解析式中只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的函数是二次函数, 根据定义解答.

【详解】A、 $y = -\frac{2}{x^2} - 3x$ 中含有分式, 故不是二次函数;

B、 $y = -(x-1)^2 + x^2 = 2x-1$, 不符合定义, 故不是二次函数;

C、 $y = 11x^2 + 29x$ 符合定义, 故是二次函数;

D、 $y = ax^2 + bx + c$ 中 a 不确定不等于 0, 故不是二次函数;

故选: C.

【点睛】此题考查二次函数的定义, 熟记定义是解题的关键.

2. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \beta$, $AB = 5$, 那么 AC 的长为 ()

- A. $5\cos\beta$ B. $5\sin\beta$ C. $\frac{5}{\cos\beta}$ D. $\frac{5}{\sin\beta}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据锐角三角函数的定义即可求出答案.

【详解】解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

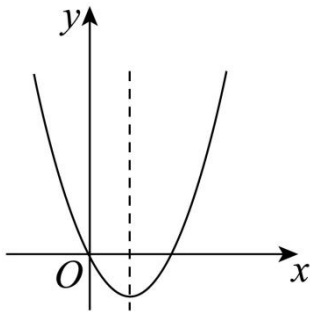
$$\sin\beta = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore AC = AB \cdot \sin\beta = 5\sin\beta,$$

故选: B.

【点睛】本题考查锐角三角函数, 解题的关键是熟练运用锐角三角函数的定义, 本题属于基础题型.

3. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象经过点 $O(0,0)$, 那么根据图象, 下列判断正确的是 ()



- A. $a < 0$ B. $b > 0$ C. $ab > 0$ D. $c = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据开口方向可判断 a 的正负；根据对称轴的位置可判断 b 的正负；进而得出 ab 的正负；将 $O(0,0)$ 代入二次函数可得出 c 的值即可.

【详解】解：∵ 抛物线开口向上，

∴ $a > 0$ ，故 A 选项错误；

∵ 抛物线对称轴在 y 轴的右侧，

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0,$$

∴ $b < 0$ ，故 B 选项错误；

∴ $ab < 0$ ，故 C 选项错误；

∵ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象经过点 $O(0,0)$ ，

∴ $c = 0$ ，故 D 选项正确；

故选：D.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，根据性质判断 a, b, c 的正负是解题的关键.

4. 以下说法错误的是 ()

- A. 如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} = \vec{0}$ ；
- B. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，那么 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ；
- C. 如果 $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量)，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ；
- D. 如果 $\vec{a}_0$ 是与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，那么 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$.

【答案】A

【解析】

【分析】根据单位向量、平行向量的定义解答.

【详解】A、如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，故该项错误，

B、如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，那么 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，故该项正确；

C、如果 $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量)，那么 $\vec{a} // \vec{b}$ ，故该项正确；

D、如果 $\vec{a}_0$ 是与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，那么 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$ ，故该项正确；

故选：A.

【点睛】此题考查平面向量，熟记定义是解题的关键.

5. 已知 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别是 6 和 8，圆心距 $AB = 2$ ，那么 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 内切 C. 外切 D. 内含

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆心距等于两圆半径的差，判断两圆的位置关系即可解题.

【详解】 $\because A$ 与 $\odot B$ 的半径分别是 6 和 8，圆心距 $AB = 2$ ，

又 $\because AB = 8 - 6 = 2$

$\therefore \odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系是内切，

故选:B.

【点睛】本题考查两圆的位置关系，涉及圆心距，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

6. 古希腊艺术家发现当人的头顶至肚脐的长度（上半身的长度）与肚脐至足底的长度（下半身的长度）的比值为“黄金分割数”时，人体的身材是最优美的，一位女士身高为 154cm，她上半身的长度为 62cm，为了使自己的身材显得更为优美，计划选择一双合适的高跟鞋，使自己的下半身长度增加，你认为选择鞋跟高为多少厘米的高跟鞋最佳 ()

- A. 4cm B. 6cm C. 8cm D. 10cm

【答案】C

【解析】

【分析】根据黄金分割的概念，列出方程直接求解即可.

【详解】解：根据题意，设她穿的高跟鞋的高度是 x cm，则

$$\frac{62}{154+x-62} = 0.618,$$

解得： $x \approx 8.3$ ，

$\therefore$ 我认为选择鞋跟高为 8 厘米的高跟鞋最佳；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了黄金分割的应用；关键是明确黄金分割所涉及的线段的比.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 如果 $2a = 3b (b \neq 0)$ ，那么 $\frac{a}{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据等式的性质解题即可，等式两边同时除以一个不为零的数，等式仍成立

【详解】 $\because 2a = 3b (b \neq 0) \therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查比例的性质，利用等式的性质解题即可.

8. 化简： $\frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3}\vec{b} =$ _____.

【答案】 $-\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】根据向量的计算方法即可求解.

【详解】 $\frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{b} = -\vec{a} + \vec{b}$

故答案为： $-\vec{a} + \vec{b}$.

【点睛】此题主要考查向量的计算，解题的关键是熟知其运算法则.

9. 抛物线 $y = -x^2 - 3x$ 在对称轴的右侧部分是_____的（填“上升”或“下降”）.

【答案】 下降

【解析】

【分析】先将函数解析式化为顶点式，根据函数的性质解答.

【详解】 $\because y = -x^2 - 3x = -(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$,

∴ 抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x = -\frac{3}{2}$ ，

∴ 在对称轴右侧部分 y 随着 x 的增大而减小，

故答案为：下降.

【点睛】此题考查抛物线的性质：当 $a > 0$ 时，对称轴左减右增；当 $a < 0$ 时，对称轴左增右减，熟记抛物线的性质是解题的关键.

10. 将抛物线 $y = x^2 + 2x$ 向下平移 1 个单位，那么所得抛物线与 y 轴的交点的坐标为_____.

【答案】 $(0, -1)$

【解析】

【分析】先确定抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的顶点坐标为 $(-1, -1)$ ，再利用点平移的坐标规律写出平移后顶点坐标，然后利用顶点式写出平移后的抛物线解析式即可求得结论.

【详解】解：∵ 抛物线 $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

∴ 顶点坐标为 $(-1, -1)$ ，

∴ 点 $(-1, -1)$ 向下平移 1 个单位所得对应点的坐标为 $(-1, -2)$ ，

所以平移后的抛物线的表达式为 $y = x^2 + 2x - 1$.

令 $x=0$ ，则 $y=-1$ ，

∴ 抛物线与 y 轴的交点的坐标为 $(0, -1)$

故答案为： $(0, -1)$.

【点睛】本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

11. 已知两个相似三角形的面积比为 4: 9，那么这两个相似三角形的周长比为 ____.

【答案】 $2: 3$

【解析】

【分析】根据相似三角形的面积比等于相似比的平方可得这两个相似三角形的相似比，进而求解即可.

【详解】解：∵ 两个相似三角形的面积比为 4: 9，

∴ 这两个相似三角形的相似比为 2: 3，

∴ 这两个相似三角形的周长比为 2: 3；

故答案为 2: 3.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$ ，如果： $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ ，那么 $\frac{AE}{EC} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 如图，由 $DE \parallel BC$ ，可得： $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，从而有： $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$ ，设 $AE = 2x$ ，则 $AC = 5x$ ，求解 $EC = 3x$ ，从而可得答案.

【详解】 解： 如图， $DE \parallel BC$ ，

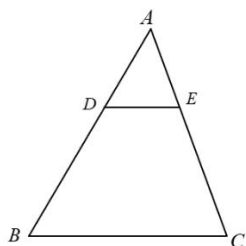
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5},$$

所以设 $AE = 2x$ ，则 $AC = 5x$ ，

$$\therefore EC = AC - AE = 3x,$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}.$$



故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查的是比例的基本性质，相似三角形的判定与性质，掌握以上知识是解题的关键.

13. 在直角坐标平面内有一点 $A(12,5)$ ，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 θ ，那么 $\cos \theta =$ _____.

【答案】 $\frac{12}{13}$

【解析】

【分析】 根据锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识求解即可.

【详解】 解： $\because$ 在直角坐标平面内有一点 A (12,5)

$$\therefore OA = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{12}{13}.$$

故答案为: $\frac{12}{13}$.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形、锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理等知识点, 掌握锐角三角函数的定义成为解答本题的关键.

14. 如果港口 A 的南偏东 52° 方向有一座小岛 B , 那么从小岛 B 观察港口 A 的方向是_____.

【答案】 北偏西 52°

【解析】

【详解】 在 A 处看小岛 B 在南偏东的方向上, 在 B 看港口 A 则在北偏西的方向上, 而且角度不变, 因此从小岛 B 观察港口 A 的方向是北偏西 52° ,

故答案为北偏西 52° .

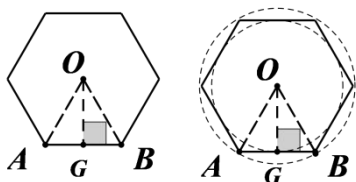
15. 正六边形的边心距与半径的比值为_____ (结果保留根号).

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 正六边形的半径为 r , 根据正六边形的半径与外接圆的半径相等, 构建直角三角形, 利用勾股定理即可解得边心距, 继而解题.

【详解】 如图,



设正六边形的半径 $OB=r$, 则外接圆的半径 r , $\angle OBA = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle BOG$ 中, $\sin 60^\circ = \frac{OG}{OB} \therefore OG = \frac{\sqrt{3}}{2}r$,

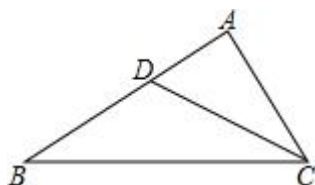
内切圆的半径是正六边形的边心距, 因而边心距是 $\frac{\sqrt{3}}{2}r$,

则正六边形的边心距与半径比值为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】 本题考查正多边形与外接圆, 涉及勾股定理等知识, 是重要考点, 难度较易, 掌握相关知识是解题关键.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, 点 D 在边 AB 上, 且 $\angle ACD = \angle B$, 那么 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 由 $\angle A = \angle A$, $\angle ACD = \angle B$, 得到 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, 根据相似三角形的性质即可得到结果.

【详解】 $\because \angle ACD = \angle B$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$,

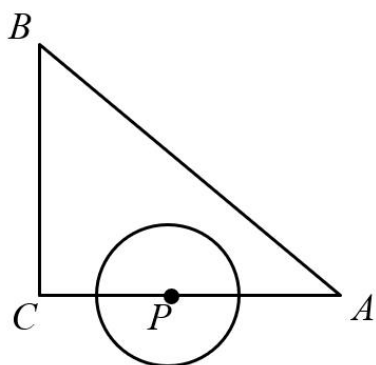
$\because AB = 2AC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 利用了“相似三角形面积的比等于相似比的平方”.

17. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 点 P 在边 AC 上, $\odot P$ 的半径为 1, 如果 $\odot P$ 与边 BC 和边 AB 都没有公共点, 那么线段 PC 长的取值范围是_____.



【答案】 $1 < PC < \frac{7}{3}$

【解析】

【分析】 根据勾股定理得到 $AC=4$ ，然后找出 $\odot P$ 与边 BC 、 AB 相切的临界点，根据相似三角形的性质即可得到结论.

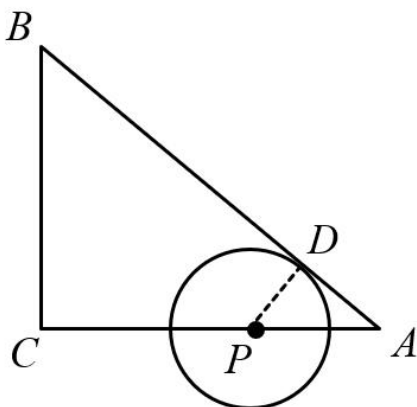
【详解】 解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，

由勾股定理，则 $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

当 $\odot P$ 与边 BC 相切时，则点 C 恰好为切点，

此时 $PC = 1$ ；

当 $\odot P$ 与边 AB 相切时，如图，作 $PD \perp AB$ ，



$\therefore \angle A = \angle A$ ， $\angle C = \angle ADP = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle APD$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PD}，$$

$$\therefore \frac{5}{AP} = \frac{3}{1}，$$

$$\therefore AP = \frac{5}{3}，$$

$$\therefore PC = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}；$$

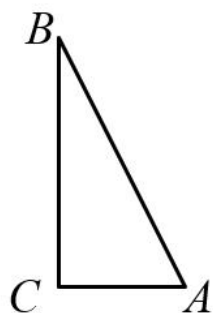
$\therefore$ 线段 PC 长的取值范围是 $1 < PC < \frac{7}{3}$ ．

故答案为： $1 < PC < \frac{7}{3}$ ．

【点睛】 本题考查了直线与圆的位置关系，勾股定理，相似三角形的判定和性质，正确的作出图形是解题的关键．

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $\tan B = \frac{1}{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转后，点 B

恰好落在射线 CA 上的点 D 处，点 C 落在点 E 处，射线 DE 与边 AB 相交于点 F，那么 BF = _____.



【答案】 $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】如图，过点 F 作 $FG \perp AC$ 于 G，设 $FG = x$ ，由旋转得 $\angle D = \angle B$ ，求出 $GD = 2x$ ， $AG = 2x - 3$ ，利用 $FG \parallel BC$ ，求得 $FG = 2AG$ ，由此列得 $x = 2(2x - 3)$ ，求出 $FG = 2$ ， $AG = 1$ ，利用勾股定理求出 AF，即可求得答案.

【详解】如图，过点 F 作 $FG \perp AC$ 于 G，
设 $FG = x$ ，

由旋转得 $\angle D = \angle B$ ，

$$\therefore \tan D = \tan B,$$

$$\therefore \frac{FG}{DG} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore GD = 2x,$$

$$\because AD = AB = 3,$$

$$\therefore AG = 2x - 3,$$

$$\because \angle FGA = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore FG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle B,$$

$$\therefore \frac{AG}{FG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore FG = 2AG,$$

$$\therefore x = 2(2x - 3)$$

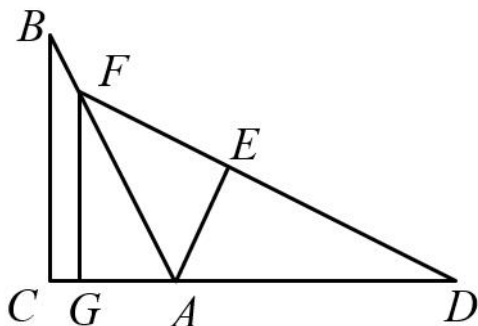
解得 $x = 2$

$$\therefore FG = 2, AG = 1,$$

$$\therefore AF = \sqrt{FG^2 + AG^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore BF = 3 - \sqrt{5},$$

故答案为: $3 - \sqrt{5}$.



【点睛】此题考查锐角三角函数，勾股定理，旋转的性质，

解一元一次方程，解题中运算等角的三角函数值相等是思想解决问题是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $2\cos 60^\circ - \cot 30^\circ + \frac{4\sin^2 45^\circ}{\tan 60^\circ - 1}$

【答案】2

【解析】

【分析】分别把特殊角的三角函数值代入，再分别计算，结合分母有理化，合并化简即可解题.

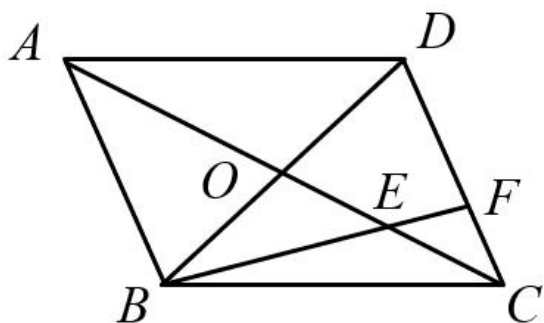
【详解】解: 原式 $= 2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{3} - 1}$

$$= 1 - \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= 2.$$

【点睛】本题考查特殊角的三角函数值，分母有理化等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

20. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O . E 为 OC 的中点，连接 BE 并延长，交边 CD 于点 F ，设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 填空：向量 $\overrightarrow{AE} =$ _____；

(2) 填空：向量 $\overrightarrow{BF} =$ _____，并在图中画出向量 $\overrightarrow{BF}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的分向量。

(注：本题结果用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示，画图不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的向量)

【答案】(1) $\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$ ；(2) $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ ；作图见解析

【解析】

【分析】(1) 先求出 AE 占 AC 得几分之几，然后再根据向量运算的三角形法则计算即可；

(2) 先根据相似三角形的性质得到 CF 占 CD 得几分之几，然后再根据向量运算的三角形法则以及平行四边形法则计算并画图即可。

【详解】解：(1) $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中

$$\therefore AO = OC = \frac{1}{2} AC$$

$$\because OE = EC = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{4} AC$$

$$\therefore AE = AO + OC = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{4} AC = \frac{3}{4} AC$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{4} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a} ;$$

$$\text{故答案为 } \frac{3}{4} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a} ;$$

$$(2) \because EC = \frac{1}{4} AC, AE = \frac{3}{4} AC$$

$$\therefore \frac{EC}{AE} = \frac{1}{3}$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$

$$\therefore AB \parallel CD$$

$$\therefore \triangle FCE \sim \triangle BAE$$

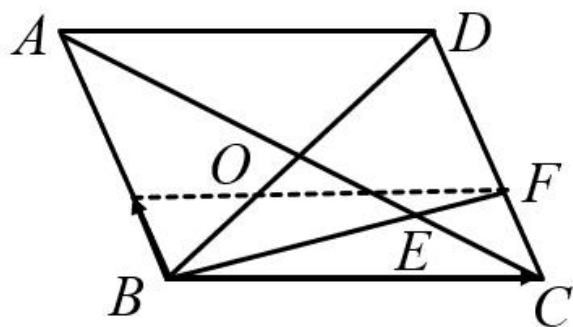
$$\therefore \frac{FC}{AB} = \frac{EC}{AE} = \frac{1}{3}, \text{即 } FC = \frac{1}{3}AB$$

$\because AB \parallel FC$

$$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}, \text{即 } \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

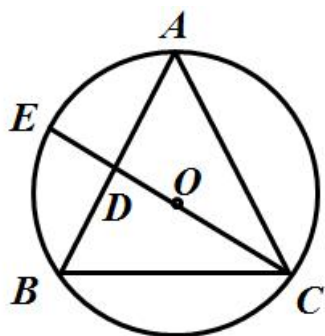
$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$.



【点睛】 本题主要考查了平面向量的三角形法则、平行四边形法则等知识，灵活运用向量运算的运算法则成为解答本题的关键.

21. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 长为 4, $AB = AC$, 连接 CO 并延长, 交边 AB 于点 D , 交 $\odot O$ 于点 E , 且 E 为弧 AB 的中点, 求:



(1) 边 BC 的长;

(2) $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 4; (2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 根据垂径定理证明点 C 在 AB 垂直平分线上, 即可解题;

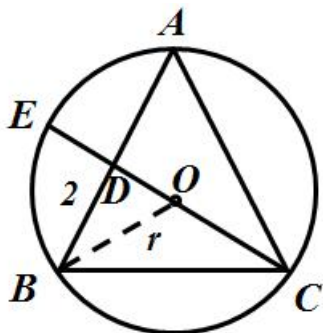
(2) 连结 BO , 先证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 再结合已知可证 $\angle DBO = 30^\circ$, 继而根据余弦的定义解题.

【详解】证明：(1) $\because E$ 为 $\widehat{AB}$ 中点， OE 为半径

$\therefore OE$ 垂直平分 AB

$\therefore C$ 在 AB 垂直平分线上

$\therefore CB = CA = AB = 4$



(2) 连结 BO

$\because CB = CA = AB$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$

$\because CD \perp AB$ ，又 $\because OB = OC$

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$

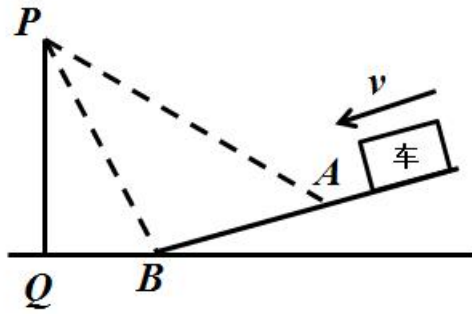
$\therefore \angle DBO = 30^\circ$

又 $\because BD = \frac{1}{2}AB = 2$

$\therefore r = BO = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题考查垂径定理、等边三角形的判定与性质、余弦等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

22. 为了监控大桥下坡路段车辆行驶速度，通常会在下引桥处设置电子眼进行区间测速，如图，电子眼位于点 P 处，离地面的铅锤高度 PQ 为 9 米，区间测速的起点为下引桥坡面点 A 处，此时电子眼的俯角为 30° ；区间测速的终点为下引桥坡脚点 B 处，此时电子眼的俯角为 60° （ A 、 B 、 P 、 Q 四点在同一平面）.



(1) 求路段 BQ 的长 (结果保留根号);

(2) 当下引桥坡度 $i = 1:2\sqrt{3}$ 时, 求电子眼区间测速路段 AB 的长 (结果保留根号).

【答案】 (1) $BQ = 3\sqrt{3}$ 米; (2) $AB = 2\sqrt{13}$ 米

【解析】

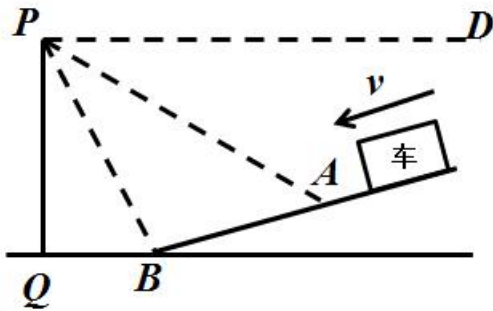
【分析】 (1) 由题意可得 $\angle PBQ = 60^\circ$, 然后在 $\text{Rt}\triangle PQB$ 中利用 60° 的三角函数求解即可;

(2) 作 $AH \perp PQ$ 于点 H, $AM \perp BQ$ 于点 M, 如图, 则四边形 AMQH 是矩形, 设 $AM = a$, 根据矩形的性质和坡度的定义可用含 a 的代数式表示出 PH 和 AH, 易得 $\angle PAH = 30^\circ$, 然后利用 30° 角的三角函数即可求出 a, 再根据勾股定理即可求出结果.

【详解】 解: (1) 作 $PD \parallel QB$, 如图, 由题意得: $\angle PBQ = \angle DPB = 60^\circ$,

$$\text{则在 } \text{Rt}\triangle PQB \text{ 中, } BQ = \frac{PQ}{\sin \angle PBQ} = \frac{9}{\sin 60^\circ} = 3\sqrt{3},$$

即 $BQ = 3\sqrt{3}$ 米;



(2) 作 $AH \perp PQ$ 于点 H, $AM \perp BQ$ 于点 M, 如图, 则四边形 AMQH 是矩形, 设 $AM = a$,

$$\therefore HQ = AM = a, AH = MQ,$$

$$\therefore PH = 9 - a,$$

$$\because i = AM : BM = 1 : 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BM = 2\sqrt{3}a,$$

$$\therefore AH=QM=QB+BM=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}a,$$

由题意得: $\angle DPA=\angle PAH=30^\circ$,

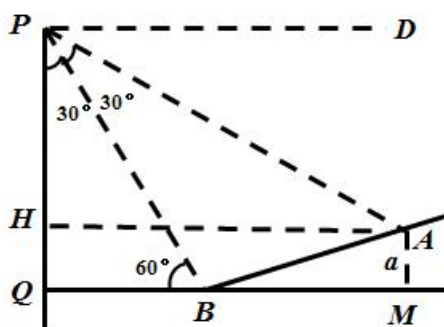
$$\text{在 Rt}\triangle PAH \text{ 中, } \therefore \tan \angle PAH = \frac{PH}{AH},$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{9-a}{2\sqrt{3}a+3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得: } a=2,$$

$$\therefore AM=2, BM=4\sqrt{3},$$

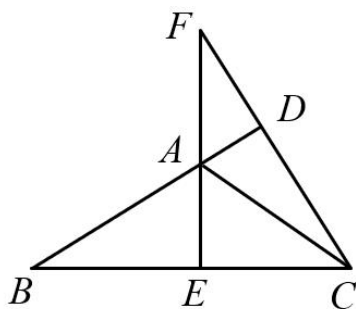
$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13} \text{ 米.}$$

$\therefore$ 电子眼区间测速路段 AB 的长为 $2\sqrt{13}$ 米.



【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，属于常考题型，正确理解题意、熟练掌握三角函数的相关知识是解题的关键.

23. 如图，点 E 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点，过点 C 作 $CD \perp BA$ ，交 BA 的延长线于点 D，交 EA 的延长线于点 F，且 $AF \cdot CD = BC \cdot AD$.



(1) 求证: $AE \perp BC$;

(2) 如果 $BE = CE$, 求证: $BC^2 = 2BD \cdot AC$.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ADF \sim \triangle CDB$, 再根据相似三角形的性质、对顶角相等和三角形内角和即可得证;

(2) 根据等腰三角形的三线合一即可得出 $\angle B = \angle 1$ ，再证明 $\triangle BCD \sim \triangle CAE$ ，根据相似三角形的性质得出 $BC \cdot CE = BD \cdot AC$ ，根据等式的性质和等量代换即可得证.

【详解】(1) $\because CD \perp BD$,

$$\therefore \angle ADF = \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\because AF \cdot CD = BC \cdot AD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{CD}{BC},$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDB$ 中

$$\begin{cases} \frac{AD}{AF} = \frac{CD}{BC} \\ \angle ADF = \angle CDB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \angle F = \angle B,$$

$$\because \angle FAD = \angle EAB,$$

$$\therefore \angle FDA = \angle BEA = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BC;$$

$$(2) \because BE = CE, AE \perp BC$$

$$\therefore AB = AC$$

$$\therefore \angle B = \angle 1$$

$$\text{又 } \angle BDC = \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle CAE$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

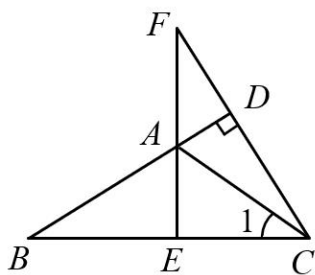
$$\therefore BC \cdot CE = BD \cdot AC$$

$$\therefore BC \cdot 2CE = 2BD \cdot AC$$

$$\because BE = CE$$

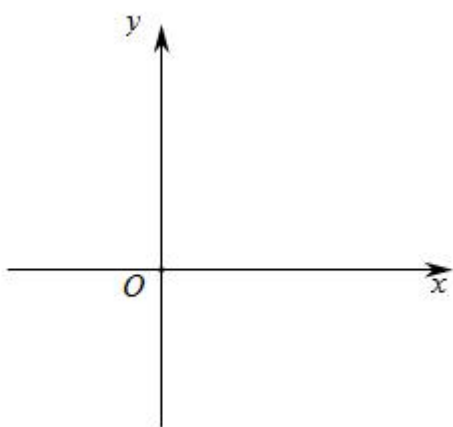
$$\therefore BC = 2CE$$

$$\therefore BC^2 = 2BD \cdot AC.$$



【点睛】本题考查了相似三角形的判定及性质、等腰三角形的性质，熟练掌握性质定理是解题的关键。

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上存在一点 A ，使点 A 关于坐标原点 O 的对称点 A' 也在这条抛物线上，那么我们把这条抛物线叫做回归抛物线，点 A 叫做这条抛物线的回归点。



(1) 已知点 M 在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 上，且点 M 的横坐标为 2，试判断抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是否为回归抛物线，并说明理由；

(2) 已知点 C 为回归抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 的顶点，如果点 C 是这条抛物线的回归点，求这条抛物线的表达式；

(3) 在 (2) 的条件下，所求得的抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D 。连接 CO 并延长，交该抛物线于点 E 。点 F 是射线 CD 上一点，如果 $\angle CFE = \angle DEC$ ，求点 F 的坐标。

【答案】(1) 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是回归抛物线；理由见解析；(2) $y = -x^2 - 2x + 1$ ；(3) $F(-1, -8)$

【解析】

【分析】(1) 先求出点 M 的坐标，再求出点 M 关于原点对称的点的坐标，最后代入二次函数，根据回归抛物线的定义即可得出答案；

(2) 先求出点 C 关于原点对称的点 C' 的坐标，再将 C' 的坐标代入二次函数解析式，即可求出 c 的值，从而得出抛物线的表达式；

(3) 先求出抛物线的对称轴，再根据题意求出点 C 和点 D 的坐标；根据直线 OC 与抛物线的交点为 E 求出

点 E 的坐标；从而求出 CD、CE 的值；然后根据相似三角形的判定和性质求出 CF 的值，即可求出点 F 的坐标.

【详解】解：(1) $\because$ M 横坐标为 2,

$\therefore$ M 纵坐标为 4,

则 $M(2,4)$.

$\therefore M(2,4)$ 关于原点 O 的对称点为 $M'(-2,-4)$;

当 $x = -2$ 时, $y = -(-2)^2 + 2 \times (-2) + 4 = -4$.

所以 M' 在抛物线上;

因此抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是回归抛物线;

(2) $C(-1, c+1)$ 关于原点 O 的对称点为 $C'(1, -c-1)$,

又因为点 C 是这条抛物线的回归点,

因此 $C'(1, -c-1)$ 在抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 上;

$\therefore -c-1 = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + c$, 解得 $c = 1$

$\therefore y = -x^2 - 2x + 1$

(3) 由 (2) 可知 $y = -x^2 - 2x + 1$, 对称轴为 $x = -1$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-1, 0)$,

由 (2) 知, $c = 1$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-1, 2)$,

设 OC 所在直线解析式为: $y = kx + b$,

将 $C(-1, 2)$, $O(0, 0)$ 代入得

$$\begin{cases} -k + b = 2 \\ b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 0 \end{cases},$$

$\therefore$ OC 所在直线解析式为 $y = -2x$,

$$\therefore \begin{cases} y = -2x \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 (1, -2),

即 $D(-1, 0)$, $C(-1, 2)$, $E(1, -2)$,

$$\therefore CD = 2, CE = 2\sqrt{5},$$

在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle CDE$ 中:

$$\begin{cases} \angle CFE = \angle CED \\ \angle FCE = \angle ECD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CDE,$$

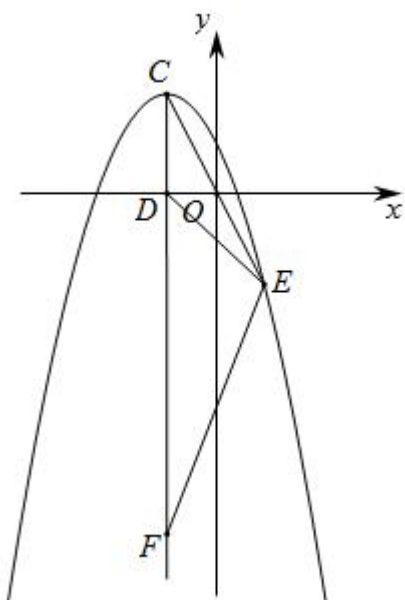
$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{CE}{CD}.$$

$$\therefore CE^2 = CD \cdot CF,$$

$$\therefore (2\sqrt{5})^2 = 2CF,$$

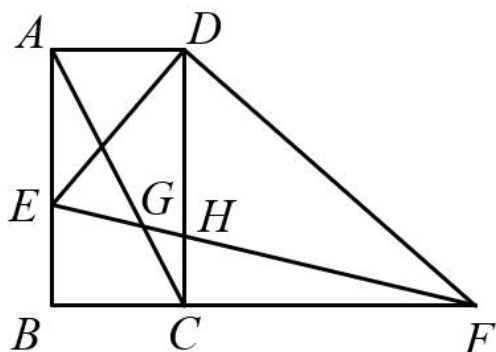
$$\therefore CF = 10,$$

$$\therefore F(-1, -8).$$



【点睛】 本题考查了新定义函数、求一次函数解析式、二次函数的性质、相似三角形的判定及性质，将新定义的函数与一次函数及二次函数相结合是解题的关键.

25. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 1$, 点 E 在边 AB 上 (点 E 与端点 A 、 B 不重合), 联结 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F , 连接 EF , 与对角线 AC 、边 CD 分别交于点 G 、 H . 设 $AE = x$, $DH = y$.



- (1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle CDF$, 并求 $\angle EFD$ 的正切值;
- (2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出该函数的定义域;
- (3) 连接 BG , 当 $\triangle BGE$ 与 $\triangle DEH$ 相似时, 求 x 的值.

【答案】(1) 证明见解析; $\frac{1}{2}$; (2) $y = \frac{2x^2 + 2}{2x + 1} (0 < x < 2)$; (3) $x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{4}$ 和 $x = \frac{3}{2}$;

【解析】

【分析】(1) 根据垂直关系得到 $\angle ADE = \angle CDF$, 根据 AA 即可证明 $\triangle ADE \sim \triangle CDF$, 得到

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}, \text{ 再根据正切的定义即可求解 } \tan \angle EFD;$$

(2) 先证明 $\triangle FCH \sim \triangle FBE$, 得到 $\frac{FC}{FB} = \frac{CH}{BE}$, 代入得到 $\frac{2x}{2x+1} = \frac{2-y}{2-x}$, 故可求解;

(3) 根据题意分 $\triangle BEG \sim \triangle DHE$ 和 $\triangle EGB \sim \triangle HDE$, 分别列出比例式求出 x 的值即可求解.

【详解】解: (1) $\because \angle ADE + \angle CDE = 90^\circ$, $\angle CDF + \angle CDE = 90^\circ$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF$$

在 $Rt\triangle EAD$ 和 $Rt\triangle FCD$ 中

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CDF \\ \angle EAD = \angle FCD = 90^\circ \end{cases}$$

$$\angle EAD = \angle FCD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle EAD \sim \triangle FCD$$

$$\because AB = DC = 2, AD = 1,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \angle EFD = \frac{DE}{DF} = \frac{1}{2}$$

(2) 由 (1) 可知 $\triangle ADE \sim \triangle CDF$

$$\therefore \frac{EA}{FC} = \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore FC = 2EA = 2x$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \triangle FCH \sim \triangle FBE,$$

$$\therefore \frac{FC}{FB} = \frac{CH}{BE}$$

$$\therefore \frac{2x}{2x+1} = \frac{2-y}{2-x}$$

$$\therefore y = \frac{2x^2 + 2}{2x+1} (0 < x < 2),$$

$$(3) \because AE = x, DH = y,$$

过点 E 作 $EM \perp CD$ 于 M 点, $\therefore$ 四边形 AEMD 为矩形

$$\therefore MH = DH - DM = DH - AE = y - x,$$

$$\therefore BE = 2 - x, DE = \sqrt{1+x^2}, EH = \sqrt{1+(y-x)^2},$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle CHG$$

$$\therefore \frac{EG}{HG} = \frac{AE}{CH}$$

$$\therefore \frac{EG}{EH} = \frac{AE}{AE+CH}$$

$$\therefore EG = \frac{AE}{AE+CH} \cdot EH$$

$$\therefore \angle BEG = \angle DHE,$$

若 $\triangle BEG \sim \triangle DHE$,

$$\therefore \frac{BE}{DH} = \frac{EG}{HE}$$

$$\therefore \frac{BE}{DH} = \frac{AE}{AE+CH}$$

$$\text{即 } \frac{2-x}{y} = \frac{x}{x+2-y}$$

$$\text{化简得 } x^2 + 2y - 4 = 0$$

$$\therefore y = \frac{2x^2 + 2}{2x + 1}$$

$$\therefore x^2 + 2 \times \frac{2x^2 + 2}{2x + 1} - 4 = 0$$

$$\text{化简得 } 2x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$\text{解得 } x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{4} \text{ 或 } x = \frac{-5 - \sqrt{89}}{4} \text{ (舍去)}$$

若 $\triangle EGB \sim \triangle HDE$ ，则有 $\angle DEH = \angle GBE$

$$\therefore EB \parallel DH$$

$$\therefore \angle DEH = \angle GBE = \angle BPC,$$

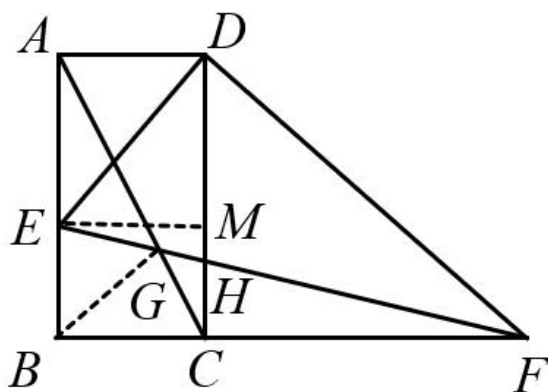
$$\therefore \tan \angle BPC = \frac{BC}{PC} = 2$$

$$\therefore \frac{HC}{AE} = \frac{PC}{AB} = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{2x(2-x)}{x} = \frac{1}{4} (0 < x < 2)$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}.$$

综上， $x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{4}$ 和 $x = \frac{3}{2}$ 时 $\triangle BGE$ 与 $\triangle DEH$ 相似.



【点睛】 本题考查了矩形的性质、函数关系式、正切的定义、相似三角形的判定和性质等知识点，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

