

2020-2021 学年上海市闵行区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（本大共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列函数中，是二次函数的是（ ）

A. $y = -\frac{2}{x^2} - 3x$

B. $y = -(x-1)^2 + x^2$

C. $y = 11x^2 + 29x$

D. $y = ax^2 + bx + c$

2.（4 分）已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = \beta$ ， $AB = 5$ ，那么 AC 的长为（ ）

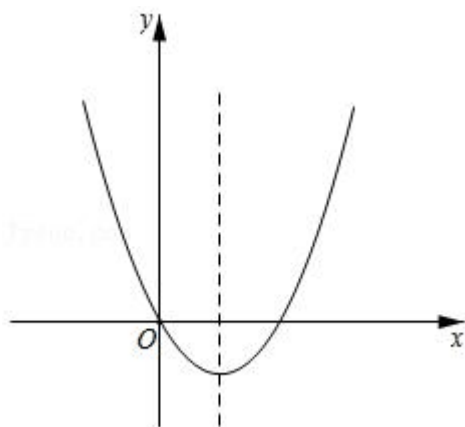
A. $5\cos\beta$

B. $5\sin\beta$

C. $\frac{5}{\cos\beta}$

D. $\frac{5}{\sin\beta}$

3.（4 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象经过点 $O(0, 0)$ ，那么根据图象，下列判断正确的是（ ）



A. $a < 0$

B. $b > 0$

C. $ab > 0$

D. $c = 0$

4.（4 分）以下说法错误的是（ ）

A. 如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} = \vec{0}$

B. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，那么 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

C. 如果 $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$ （ $\vec{b}$ 为非零向量），那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 如果 $\vec{a_0}$ 是与非向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，那么 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a_0}$.

5.（4 分）已知 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别是 6 和 8，圆心距 $AB = 2$ ，那么 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系是（ ）

A. 相交

B. 内切

C. 外切

D. 内含

6.（4 分）古希腊艺术家发现当人的头顶至肚脐的长度（上半身的长度）与肚脐至足底的长度（下半身的长度）的比值为“黄金分割数”时，人体的身材是最优美的．一位女士身

高为 154cm ，她上半身的长度为 62cm ，为了使自己的身材显得更为优美，计划选择一双合适的高跟鞋，使自己的下半身长度增加．你认为选择鞋跟高为多少厘米的高跟鞋最佳？

()

A. 4cm

B. 6cm

C. 8cm

D. 10cm

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 如果 $2a = 3b$ ($b \neq 0$)，那么 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (4 分) 化简： $\frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3}\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (4 分) 抛物线 $y = -x^2 - 3x$ 在对称轴的右侧部分是_____的（填“上升”或“下降”）.

10. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + 2x$ 向下平移 1 个单位，那么所得抛物线与 y 轴的交点的坐标为_____.

11. (4 分) 已知两个相似三角形的相似比为 $4:9$ ，那么这两个三角形的周长之比为_____.

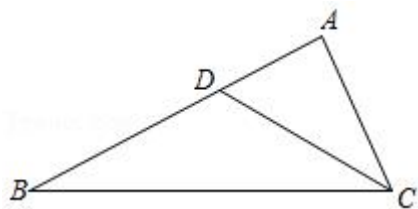
12. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $DE \parallel BC$ ，如果 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ ，那么 $\frac{AE}{EC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. (4 分) 在直角坐标平面内有一点 $A(12, 5)$ ，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 θ ，那么 $\cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

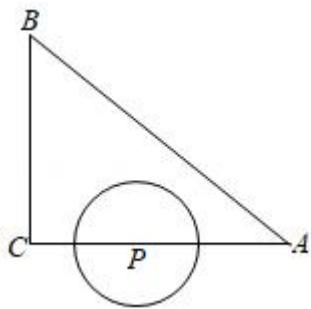
14. (4 分) 如果港口 A 的南偏东 52° 方向有一座小岛 B ，那么从小岛 B 观察港口 A 的方向是_____.

15. (4 分) 正六边形的边心距与半径的比值为_____.

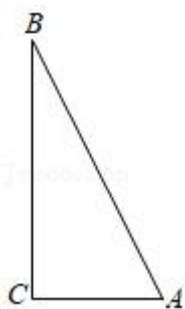
16. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2AC$ ，点 D 在边 AB 上，且 $\angle ACD = \angle B$ ，那么 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \underline{\hspace{2cm}}$.



17. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，点 P 在边 AC 上， $\odot P$ 的半径为 1．如果 $\odot P$ 与边 BC 和边 AB 都没有公共点，那么线段 PC 长的取值范围是_____.



18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 3$, $\tan B = \frac{1}{2}$. 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转后, 点 B 恰好落在射线 CA 上的点 D 处, 点 C 落在点 E 处, 射线 DE 与边 AB 相交于点 F , 那么 $BF =$ _____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

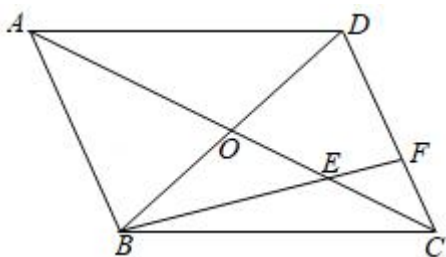
19. (10分) 计算: $2\cos 60^\circ - \cot 30^\circ + \frac{4\sin^2 45^\circ}{\tan 60^\circ - 1}$.

20. (10分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O . E 为 OC 的中点, 联结 BE 并延长, 交边 CD 于点 F . 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 填空: 向量 $\overrightarrow{AE} =$ _____;

(2) 填空: 向量 $\overrightarrow{BF} =$ _____, 并在图中画出向量 $\overrightarrow{BF}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的分向量.

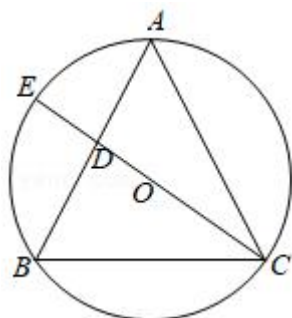
(注: 本题结果用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示, 画图不要求写作法, 但要指出所作图中表示结论的向量)



21. (10分) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 长为 4, $AB = AC$, 联结 CO 并延长, 交边 AB 于点 D , 交 $\odot O$ 于点 E , 且 E 为弧 AB 的中点. 求:

(1) 边 BC 的长;

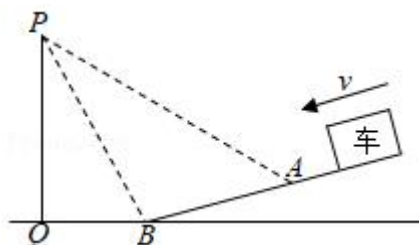
(2) $\odot O$ 的半径.



22. (10分) 为了监控大桥下坡路段车辆行驶速度, 通常会在下引桥处设置电子眼进行区间测速. 如图, 电子眼位于点 P 处, 离地面的铅锤高度 PQ 为 9 米, 区间测速的起点为下引桥坡面点 A 处, 此时电子眼的俯角为 30° ; 区间测速的终点为下引桥坡脚点 B 处, 此时电子眼的俯角为 60° (A 、 B 、 P 、 Q 四点在同一平面).

(1) 求路段 BQ 的长 (结果保留根号);

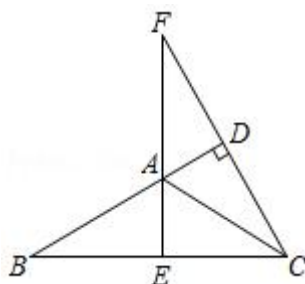
(2) 当下引桥坡度 $i = 1:2\sqrt{3}$ 时, 求电子眼区间测速路段 AB 的长 (结果保留根号).



23. (12分) 如图, 点 E 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点, 过点 C 作 $CD \perp BA$, 交 BA 的延长线于点 D , 交 EA 的延长线于点 F , 且 $AF \cdot CD = BC \cdot AD$.

(1) 求证: $AE \perp BC$;

(2) 如果 $BE = CE$, 求证: $BC^2 = 2BD \cdot AC$.



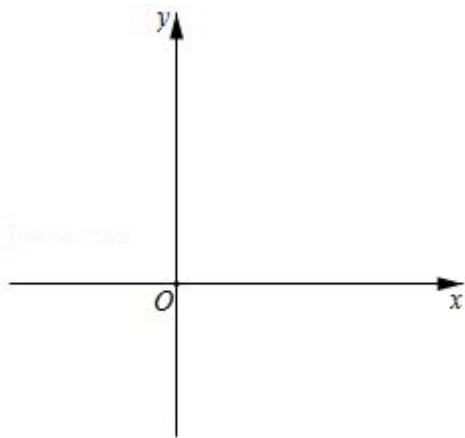
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上存在一点 A , 使点 A 关

于坐标原点 O 的对称点 A' 也在这条抛物线上, 那么我们把这条抛物线叫做回归抛物线, 点 A 叫做这条抛物线的回归点.

(1) 已知点 M 在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 上, 且点 M 的横坐标为 2, 试判断抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是否为回归抛物线, 并说明理由;

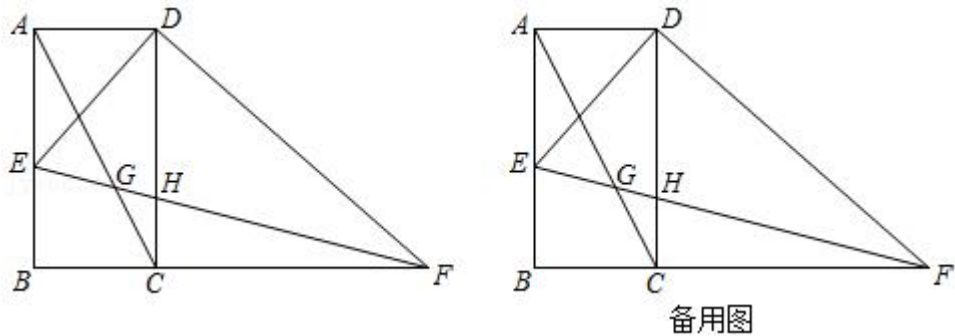
(2) 已知点 C 为回归抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 的顶点, 如果点 C 是这条抛物线的回归点, 求这条抛物线的表达式;

(3) 在 (2) 的条件下, 所求得抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D . 联结 CO 并延长, 交该抛物线于点 E , 点 F 是射线 CD 上一点, 如果 $\angle CFE = \angle DEC$, 求点 F 的坐标.



25. (14 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 1$, 点 E 在边 AB 上 (点 E 与端点 A 、 B 不重合), 联结 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F , 联结 EF , 与对角线 AC 、边 CD 分别交于点 G 、 H . 设 $AE = x$, $DH = y$.

- (1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle CDF$, 并求 $\angle EFD$ 的正切值;
- (2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出该函数的定义域;
- (3) 联结 BG , 当 $\triangle BGE$ 与 $\triangle DEH$ 相似时, 求 x 的值.



2020-2021 学年上海市闵行区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列函数中，是二次函数的是（ ）

A. $y = -\frac{2}{x^2} - 3x$

B. $y = -(x-1)^2 + x^2$

C. $y = 11x^2 + 29x$

D. $y = ax^2 + bx + c$

【分析】利用二次函数定义进行分析即可．

【解答】解：A、含有分式，不是二次函数，故此选项不合题意；

B、 $y = -(x-1)^2 + x^2 = 2x - 1$ ，不是二次函数，故此选项不合题意；

C、是二次函数，故此选项符合题意；

D、当 $a = 0$ 时，不是二次函数，故此选项不合题意；

故选：C．

【点评】此题主要考查了二次函数，关键是掌握判断函数是否是二次函数，首先是要看它的右边是否为整式，若是整式且仍能化简的要先将其化简，然后再根据二次函数的定义作出判断，要抓住二次项系数不为 0 这个关键条件．

2.（4 分）已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = \beta$ ， $AB = 5$ ，那么 AC 的长为（ ）

A. $5\cos\beta$

B. $5\sin\beta$

C. $\frac{5}{\cos\beta}$

D. $\frac{5}{\sin\beta}$

【分析】根据锐角三角函数的定义即可得出答案．

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = \beta$ ， $AB = 5$ ，

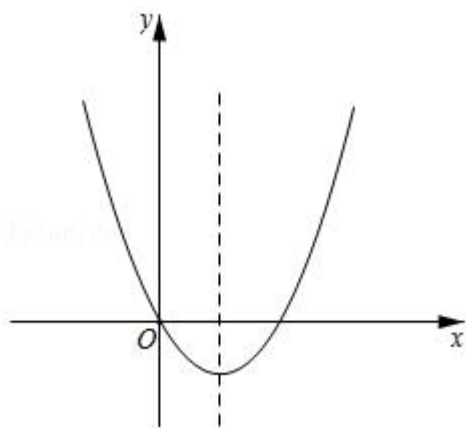
$$\therefore \sin B = \sin \beta = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore AC = AB \cdot \sin \beta = 5\sin \beta,$$

故选：B．

【点评】本题考查锐角三角函数的定义，理解锐角三角函数的意义是解决问题的关键．

3.（4 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象经过点 $O(0, 0)$ ，那么根据图象，下列判断正确的是（ ）



- A. $a < 0$ B. $b > 0$ C. $ab > 0$ D. $c = 0$

【分析】 根据抛物线的开口方向，对称轴以及与 y 轴的交点进行判断即可.

【解答】 解：∵ 抛物线开口向上，

∴ $a > 0$ ，故 A 错误；

∵ $-\frac{b}{2a} > 0$ ， $a > 0$ ，

∴ $b < 0$ ，故 B 错误；

∴ $a > 0$ ， $b < 0$ ，

∴ $ab < 0$ ，故 C 错误；

∵ 图象经过点 $O(0, 0)$ ，

∴ $c = 0$ ，故 D 正确；

故选：D.

【点评】 本题考查了二次函数的图象与系数的关系，对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，二次项系数 a 决定抛物线的开口方向：当 $a > 0$ 时，抛物线向上开口；当 $a < 0$ 时，抛物线向下开口；一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置：当 a 与 b 同号时（即 $ab > 0$ ），对称轴在 y 轴左；当 a 与 b 异号时（即 $ab < 0$ ），对称轴在 y 轴右；常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点：抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$. 抛物线与 x 轴交点个数由 Δ 决定： $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，抛物线与 x 轴有 2 个交点； $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，抛物线与 x 轴有 1 个交点； $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点.

4. (4 分) 以下说法错误的是 ()

A. 如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} = \vec{0}$

B. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，那么 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

C. 如果 $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

D. 如果 $\vec{a}_0$ 是与非向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量, 那么 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$.

【分析】根据共线向量的定义, 零向量的意义进行判断.

【解答】解: A、如果 $k\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $k = 0$, 故本选项符合题意.

B、如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$, 那么 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 故本选项不符合题意.

C、如果 $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同, 则 $\vec{a} // \vec{b}$, 故本选项不符合题意.

D、如果 $\vec{a}_0$ 是与非向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量, 那么 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$, 故本选项不符合题意.

故选: A.

【点评】本题主要考查了平面向量, 注意: 平面向量既有大小, 又有方向.

5. (4分) 已知 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别是 6 和 8, 圆心距 $AB = 2$, 那么 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系是 ()

A. 相交

B. 内切

C. 外切

D. 内含

【分析】求出两圆半径的和与差, 再与圆心距比较大小, 确定两圆位置关系; 设两圆的半径分别为 R 和 r , 且 $R \geq r$, 圆心距为 d : 外离, 则 $d > R+r$; 外切, 则 $d = R+r$; 相交, 则 $R-r < d < R+r$; 内切, 则 $d = R-r$; 内含, 则 $d < R-r$.

【解答】解: 因为 $8-6=2$, 圆心距 $AB=2$,

所以 $d = R-r$,

所以两圆内切.

故选: B.

【点评】考查了圆与圆的位置关系, 本题利用了两圆内切, 则 $d = R-r$.

6. (4分) 古希腊艺术家发现当人的头顶至肚脐的长度 (上半身的长度) 与肚脐至足底的长度 (下半身的长度) 的比值为 “黄金分割数” 时, 人体的身材是最优美的. 一位女士身高为 154cm , 她上半身的长度为 62cm , 为了使自己的身材显得更为优美, 计划选择一双合适的高跟鞋, 使自己的下半身长度增加. 你认为选择鞋跟高为多少厘米的高跟鞋最佳? ()

A. 4cm

B. 6cm

C. 8cm

D. 10cm

【分析】她下半身的长度为 92cm , 设鞋跟高为 x 厘米时, 她身材显得更为优美, 利用黄

金分割的定义得到 $\frac{62}{92+x} \approx 0.618$ ，然后解方程即可．

【解答】解：∵一位女士身高为 154cm ，她上半身的长度为 62cm ，

∴她下半身的长度为 92cm ，

设鞋跟高为 x 厘米时，她身材显得更为优美，

根据题意得 $\frac{62}{92+x} \approx 0.618$ ，

解得 $x \approx 8.3$ (cm)．

经检验 $x = 8.3$ 为原方程的解，

所以选择鞋跟高为 8 厘米的高跟鞋最佳．

故选：C．

【点评】本题考查了因式分解的应用：利用因式分解解决求值问题．利用因式分解解决证明问题．利用因式分解简化计算问题．也考查了黄金分割．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 如果 $2a = 3b$ ($b \neq 0$)，那么 $\frac{a}{b} = \underline{\frac{3}{2}}$ ．

【分析】根据比例的性质直接解答即可．

【解答】解：∵ $2a = 3b$ ($b \neq 0$)，

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}.$$

故答案为： $\frac{3}{2}$ ．

【点评】此题考查了比例的性质，熟练掌握两内项之积等于两外项之积是解题的关键．

8. (4 分) 化简： $\frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3}\vec{b} = \underline{-\vec{a} + \vec{b}}$ ．

【分析】先利用乘法结合律去括号，然后计算加减法．

【解答】解：原式 = $-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{b} = -\vec{a} + \vec{b}$ ．

故答案是： $-\vec{a} + \vec{b}$ ．

【点评】本题主要考查了平面向量，实数的运算法则同样能应用于平面向量的计算之中．

9. (4 分) 抛物线 $y = -x^2 - 3x$ 在对称轴的右侧部分是 下降 的（填“上升”或“下降”）．

【分析】根据抛物线解析式可求得其开口方向 and 对称轴，结合抛物线的增减性可得到答案．

【解答】解：∵ $y = -x^2 - 3x$ ，

∴ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x = -\frac{-3}{2 \times (-1)} = -\frac{3}{2}$,

∴ 在 y 轴右侧， y 随 x 增大而减小，

∴ 其图象在 y 轴右侧部分是下降，

故答案为：下降．

【点评】 本题主要考查二次函数的增减性，掌握开口向下的二次函数在对称轴右侧 y 随 x 的增大而减小是解题的关键．

10. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + 2x$ 向下平移 1 个单位，那么所得抛物线与 y 轴的交点的坐标为 (0, -1)．

【分析】 根据“左加右减、上加下减”的原则写出新抛物线解析式，然后将二次函数解析式转化为方程，通过解方程求解．

【解答】 解：由“左加右减、上加下减”的原则可知，把抛物线 $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ 的图象向下平移 1 个单位，则平移后的抛物线的表达式为 $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 2$,

令 $x = 0$ ，则 $y = -1$ ．

所以所得抛物线与 y 轴的交点的坐标为 (0, -1)．

故答案是：(0, -1)．

【点评】 本题考查的是二次函数的图象与几何变换，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减．

11. (4 分) 已知两个相似三角形的相似比为 4:9，那么这两个三角形的周长之比为 4:9．

【分析】 直接利用相似三角形的周长比等于相似比，进而得出答案．

【解答】 解：∵ 两个相似三角形的相似比为 4:9，

∴ 它们的周长比等于相似比，即：4:9．

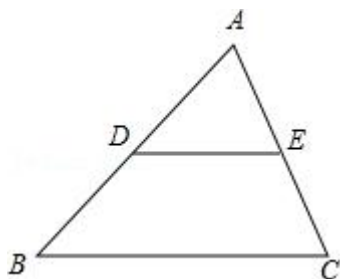
故答案为 4:9．

【点评】 本题考查对相似三角形性质的理解．(1) 相似三角形周长的比等于相似比．(2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方．(3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比．

12. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $DE \parallel BC$ ，如果 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ ，那么 $\frac{AE}{EC}$
 $= \frac{2}{3}$ ．

【分析】由 $DE \parallel BC$ 证 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，得 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$ ，继而可得答案．

【解答】解：如图，



$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3},$$

故答案为： $\frac{2}{3}$ ．

【点评】本题主要考查相似三角形的判定与性质，解题的关键是掌握相似三角形的判定和性质．

13. (4分) 在直角坐标平面内有一点 $A(12, 5)$ ，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 θ ，那么 $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ．

【分析】根据题意，作出合适的平面直角坐标系，然后作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，再根据点的 A 的坐标和勾股定理，可以得到 OA 的长，然后即可得到 $\cos\theta$ 的值．

【解答】解：作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，如右图所示，

$\because$ 点 $A(12, 5)$,

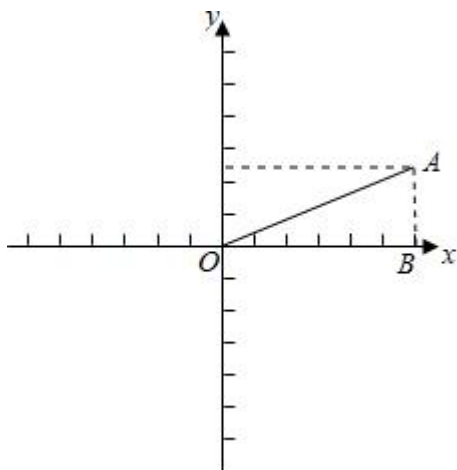
$\therefore OB = 12, AB = 5, \angle ABO = 90^\circ$,

$$\therefore OA = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore \cos\angle AOB = \frac{OB}{OA} = \frac{12}{13},$$

$$\text{即 } \cos\theta = \frac{12}{13},$$

故答案为： $\frac{12}{13}$ ．



【点评】本题考查解直角三角形、勾股定理、锐角三角函数，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

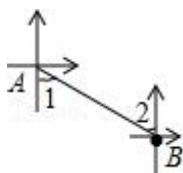
14. (4分) 如果港口 A 的南偏东 52° 方向有一座小岛 B ，那么从小岛 B 观察港口 A 的方向是 北偏西 52° ．

【分析】根据方位角的概念，画图正确表示出方位角，即可求解．

【解答】解：如图， $\because \angle 1 = \angle 2 = 52^\circ$ ，

$\therefore$ 从小岛 B 观察港口 A 的方向是北偏西 52° ．

故答案为：北偏西 52° ．



【点评】此题主要考查了方向角，正确画出方位角，根据平行线的性质解答是解题关键．

15. (4分) 正六边形的边心距与半径的比值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

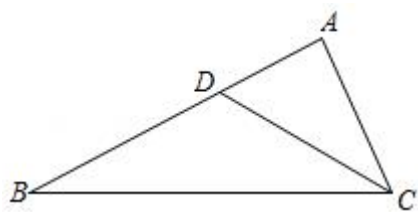
【分析】设正六边形的半径与外接圆的半径相等，构建直角三角形利用勾股定理即可求出边心距．

【解答】解：设正六边形的半径是 r ，则外接圆的半径 r ，内切圆的半径是正六边形的边心距，因而是 $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ ，则可知正六边形的边心距与半径的比值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

【点评】正多边形的计算一般是通过中心作边的垂线，连接半径，把正多边形中的半径，边长，边心距，中心角之间的计算转化为解直角三角形．

16. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2AC$ ，点 D 在边 AB 上，且 $\angle ACD = \angle B$ ，那么 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}$

$$= -\frac{1}{4}.$$



【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方即可得结论.

【解答】解：∵ $\angle ACD = \angle B$, $\angle A = \angle A$,

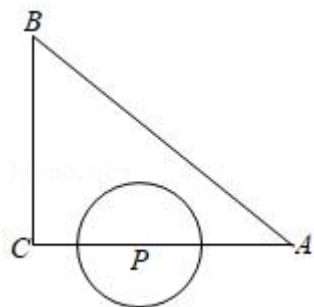
∴ $\triangle ACD \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{2AC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

17. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，点 P 在边 AC 上， $\odot P$ 的半径为 1. 如果 $\odot P$ 与边 BC 和边 AB 都没有公共点，那么线段 PC 长的取值范围是 $1 < CP < \frac{7}{3}$.



【分析】根据勾股定理得到 $AC = 4$ ，当 $\odot P$ 与 AB 相切时，设切点为 D ，如图，连接 PD ，则 $PD \perp AB$ ，根据相似三角形的性质可得到结论.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，

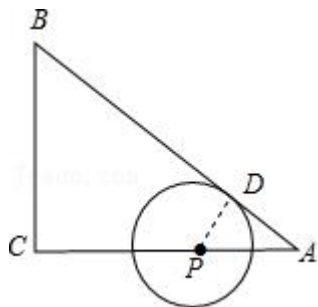
∴ $AC = 4$ ，

当 $\odot P$ 与 AB 相切时，设切点为 D ，如图，

连接 PD ，

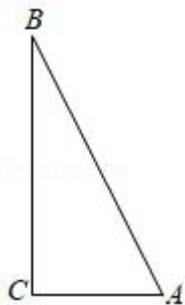
则 $PD \perp AB$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle C = \angle ADP = 90^\circ, \\
&\therefore \angle A = \angle A, \\
&\therefore \triangle ADP \sim \triangle ACB, \\
&\therefore \frac{PD}{BC} = \frac{PA}{AB}, \\
&\therefore \frac{1}{3} = \frac{PA}{5}, \\
&\therefore PA = \frac{5}{3}, \\
&\therefore PC = AC - PA = \frac{7}{3}, \\
&\therefore \text{线段 } PC \text{ 长的取值范围是 } 1 < CP < \frac{7}{3}, \\
&\text{故答案为: } 1 < CP < \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$



【点评】 本题考查了直线与圆的位置关系，相似三角形的判定和性质，勾股定理，正确的作出辅助线是解题的关键．

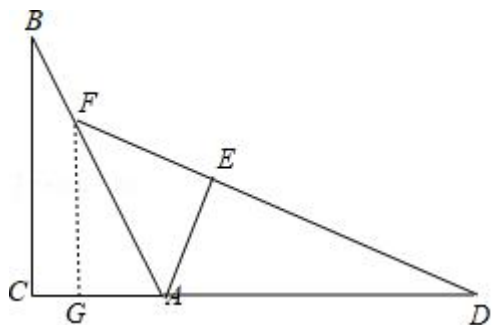
18. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $\tan B = \frac{1}{2}$ ．将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转后，点 B 恰好落在射线 CA 上的点 D 处，点 C 落在点 E 处，射线 DE 与边 AB 相交于点 F ，那么 $BF = \underline{3 - \sqrt{5}}$ ．



【分析】 过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G ，由旋转的性质得出 $\angle B = \angle D$ ，得出 $\tan \angle B = \tan \angle D = \frac{FG}{GD} = \frac{1}{2}$ ，由平行线的性质得出 $\angle B = \angle AFG$ ，设 $AG = x$ ，则 $FG = 2x$ ，则 $\frac{2x}{x+3} = \frac{1}{2}$ ，求

出 $AG = 1$ ，则可得出答案．

【解答】解：如图，过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G ，



$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转后，点 B 恰好落在射线 CA 上的点 D 处，

$$\therefore \angle B = \angle D,$$

$$\therefore \tan \angle B = \tan \angle D = \frac{FG}{GD} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle ACB = \angle FGA = 90^\circ,$$

$$\therefore BC \parallel FG,$$

$$\therefore \angle B = \angle AFG,$$

$$\therefore \tan \angle B = \tan \angle AFG = \frac{AG}{FG} = \frac{1}{2},$$

设 $AG = x$ ，则 $FG = 2x$ ，

$$\therefore \frac{2x}{x+3} = \frac{1}{2},$$

解得 $x = 1$ ，

$$\therefore AG = 1, FG = 2,$$

$$\therefore AF = \sqrt{FG^2 + AG^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore BF = AB - AF = 3 - \sqrt{5}.$$

故答案为： $3 - \sqrt{5}$ ．

【点评】本题考查了旋转的性质，直角三角形的性质，锐角三角函数的定义，勾股定理，熟练掌握旋转的性质是解题的关键．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $2\cos 60^\circ - \cot 30^\circ + \frac{4\sin^2 45^\circ}{\tan 60^\circ - 1}$ ．

【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及二次根式的性质化简得出答案．

【解答】解：原式 $= 2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{4 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\sqrt{3}-1}$

$$= 1 - \sqrt{3} + \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{3}-1}$$

$$= 1 - \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$= 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1$$

$$= 2.$$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值二次根式的混合运算，正确化简各数是解题关键.

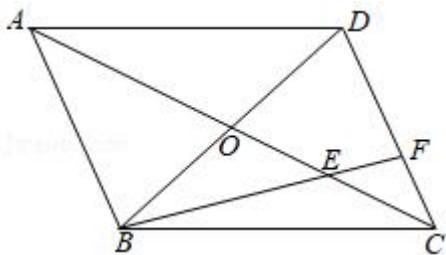
20. (10 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O . E 为 OC 的中点，

联结 BE 并延长，交边 CD 于点 F . 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 填空：向量 $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$;

(2) 填空：向量 $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ ，并在图中画出向量 $\overrightarrow{BF}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的分向量.

(注：本体结果用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示，画图不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的向量)



【分析】(1) 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AC}$ ，再证明 $AE = \frac{3}{4}AC$ 即可解决问题.

(2) 利用平行线分线段成比例定理，求出 $\overrightarrow{CF}$ ，再利用三角形法则即可解决问题.

【解答】解：(1) $\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore OE = EC,$$

$$\therefore AE = \frac{3}{4}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

$$(2) \because CF \parallel AB,$$

$$\therefore CF: AB = EC: AE = 1: 3,$$

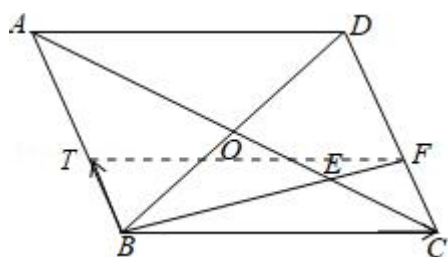
$$\therefore CF = \frac{1}{3}BA,$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}.$$

$\overrightarrow{BF}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的分向量分别为 $\overrightarrow{BT}$ 和 $\overrightarrow{BC}$.

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}.$$

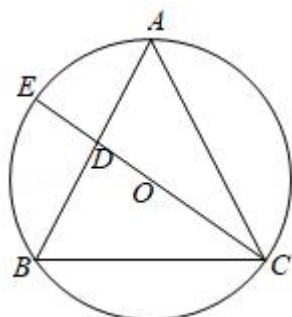


【点评】 本题考查作图 - 复杂作图，平行四边形的性质，平面向量，三角形法则，平行四边形法则等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

21. (10 分) 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AB 长为 4， $AB = AC$ ，联结 CO 并延长，交边 AB 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 E ，且 E 为弧 AB 的中点．求：

(1) 边 BC 的长；

(2) $\odot O$ 的半径．



【分析】(1) 利用垂径定理的推论可判断 CD 垂直平分 AB ，所以 $CB = CA = 4$ ；

(2) 连接 OB ，如图，先证明 ABC 为等边三角形得到 $\angle A = 60^\circ$ ，利用圆周角定理得到 $\angle BOC = 120^\circ$ ，则 $\angle BOD = 60^\circ$ ，然后利用含 30° 度的直角三角形三边的关系求出 OB 即可．

【解答】解：(1) $\because E$ 点为 $\widehat{AB}$ 的中点， CE 为直径，

$$\therefore CE \perp AB,$$

$$\therefore AD = BD,$$

即 CD 垂直平分 AB ，

$$\therefore CB = CA = 4;$$

(2) 连接 OB ，如图，

$$\because AB = BC = AC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 120^\circ,$$

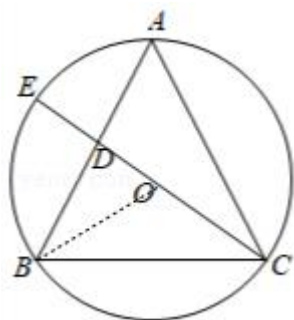
$$\therefore \angle BOD = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中， $BD = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

$$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{3}BD = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OB = 2OD = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

即 $\odot O$ 的半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ．



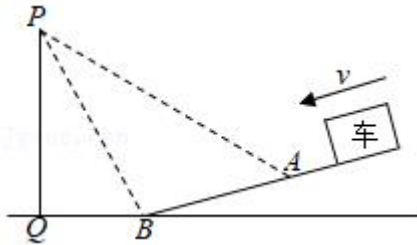
【点评】本题考查了三角形的外接圆与外心：三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心．也考查了圆周角定理．

22. (10 分) 为了监控大桥下坡路段车辆行驶速度，通常会在下引桥处设置电子眼进行区间测速．如图，电子眼位于点 P 处，离地面的铅锤高度 PQ 为 9 米，区间测速的起点为下

引桥坡面点 A 处, 此时电子眼的俯角为 30° ; 区间测速的终点为下引桥坡脚点 B 处, 此时电子眼的俯角为 60° (A 、 B 、 P 、 Q 四点在同一平面).

(1) 求路段 BQ 的长 (结果保留根号);

(2) 当下引桥坡度 $i = 1:2\sqrt{3}$ 时, 求电子眼区间测速路段 AB 的长 (结果保留根号).



【分析】 (1) 根据 $BQ = PQ \cdot \tan \angle BPQ$, 求解即可.

(2) 如图, 过点 A 作 $AM \perp QB$ 于 M , $AH \perp PQ$ 于 H . 由题意, $\angle PAH = \angle TPA = 30^\circ$, 设 $AM = a$ 米, 则 $BM = 2\sqrt{3}a$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle APH$ 中, 根据 $\tan \angle PAH = \frac{PH}{AH}$, 构建方程求出 a , 再利用勾股定理求出 AB 即可.

【解答】 解: (1) 由题意, $\angle PBQ = \angle TPB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle PQB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPQ = 30^\circ,$$

$$\therefore BQ = PQ \cdot \tan 30^\circ = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \text{ (米)}.$$

(2) 如图, 过点 A 作 $AM \perp QB$ 于 M , $AH \perp PQ$ 于 H .

由题意, $\angle PAH = \angle TPA = 30^\circ$,

设 $AM = a$ 米, 则 $BM = 2\sqrt{3}a$ 米,

$$\therefore \angle AHQ = \angle HQM = \angle AMQ = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AHQM$ 是矩形,

$$\therefore AH = QM = (3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}a) \text{ 米}, \quad QH = AM = a \text{ 米}, \quad PH = PQ - HQ = (9 - a) \text{ 米},$$

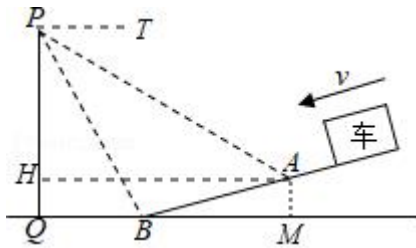
在 $\text{Rt}\triangle APH$ 中, $\tan \angle PAH = \frac{PH}{AH}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9-a}{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}a},$$

解得 $a = 2$,

$$\therefore AM = 2 \text{ (米)}, \quad BM = 4\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13} \text{ (米)}.$$

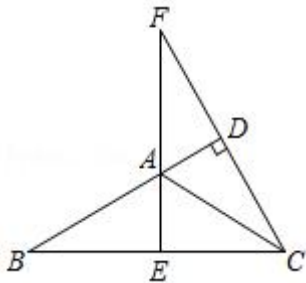


【点评】 本题考查解直角三角形的应用－仰角俯角问题，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考常考题型．

23. (12分) 如图，点 E 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点，过点 C 作 $CD \perp BA$ ，交 BA 的延长线于点 D ，交 EA 的延长线于点 F ，且 $AF \cdot CD = BC \cdot AD$ ．

(1) 求证： $AE \perp BC$ ；

(2) 如果 $BE = CE$ ，求证： $BC^2 = 2BD \cdot AC$ ．



【分析】 (1) 通过证明 $\triangle ADF \sim \triangle CDB$ ，可得 $\angle F = \angle B$ ，由余角的性质可求解；

(2) 通过证明 $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ ，可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$ ，可得结论．

【解答】 证明：(1) $\because AF \cdot CD = BC \cdot AD$ ，

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{BC}{CD},$$

$$\text{设 } \frac{AF}{AD} = \frac{BC}{CD} = k,$$

$$\therefore AF = kAD, \quad BC = kCD,$$

$$\therefore DF = \sqrt{AF^2 - AD^2} = \sqrt{k^2 - 1}AD, \quad BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{k^2 - 1}CD,$$

$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{AD}{CD},$$

$$\text{又 } \because \angle ADF = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \angle F = \angle B,$$

$$\because \angle B + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BC;$$

$$\text{方法 2: } \because AF \cdot CD = BC \cdot AD,$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{BC}{CD},$$

$$\text{又 } \because \angle ADF = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FAD \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \angle B = \angle F,$$

$$\because \angle B + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BC;$$

$$(2) \because BE = CE, AE \perp BC,$$

$$\therefore AB = AC,$$

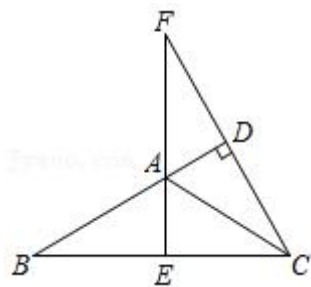
$$\because \angle ABE = \angle DBC, \angle BDC = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore BC \cdot \frac{1}{2}BC = AB \cdot BD,$$

$$\therefore BC^2 = 2BD \cdot AC.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定定理是本题的关键.

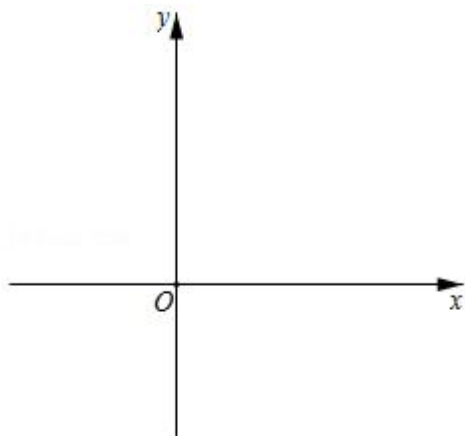
24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上存在一点 A ，使点 A 关于坐标原点 O 的对称点 A' 也在这条抛物线上，那么我们把这条抛物线叫做回归抛物线，点 A 叫做这条抛物线的回归点.

(1) 已知点 M 在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 上，且点 M 的横坐标为 2，试判断抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是否为回归抛物线，并说明理由；

(2) 已知点 C 为回归抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 的顶点，如果点 C 是这条抛物线的回归点，

求这条抛物线的表达式；

(3) 在(2)的条件下，所求得抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D 。联结 CO 并延长，交该抛物线于点 E ，点 F 是射线 CD 上一点，如果 $\angle CFE = \angle DEC$ ，求点 F 的坐标。



【分析】(1) 先求出点 M 坐标， M 的坐标，代入解析式可求解；

(2) 先求出点 C 坐标， C 的坐标，利用回归点的定义可求解；

(3) 通过证明 $\triangle CEF \sim \triangle CDE$ ，可得 $\frac{CF}{CE} = \frac{CE}{CD}$ ，可求 $CF = 10$ ，即可求解。

【解答】解：(1) 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是回归抛物线，

理由如下： $\because$ 点 M 在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 上，

$$\therefore y = -4 + 4 + 4 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } M(2, 4),$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 关于坐标原点 } O \text{ 的对称点 } M'(-2, -4),$$

$$\text{当 } x = -2 \text{ 时, } y = -4 - 4 + 4 = -4,$$

$\therefore$ 点 M' 在抛物线上，

$\therefore$ 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 4$ 是回归抛物线；

(2) $\because$ 点 C 为回归抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 的顶点，

$$\therefore \text{点 } C(-1, c+1),$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 关于原点 } O \text{ 的对称点 } C'(1, -c-1),$$

$\because$ 点 C 是这条抛物线的回归点，

$$\therefore -c-1 = -1 - 2 + c,$$

$$\therefore c = 1,$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = -x^2 - 2x + 1;$$

(3) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 1$,

∴ 对称点为 $x = -1$,

∴ 点 $D(-1, 0)$, 点 $C(-1, 2)$,

∴ 直线 CO 解析式为 $y = -2x$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = -x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases},$$

点 $E(1, -2)$,

在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle CDE$ 中, $\angle CFE = \angle CED$, $\angle FCE = \angle ECD$,

∴ $\triangle CEF \sim \triangle CDE$,

$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore CE^2 = CD \cdot CF,$$

$$\therefore (-1-1)^2 + (2+2)^2 = 2CF,$$

$$\therefore CF = 10,$$

$$\therefore F(-1, -8).$$

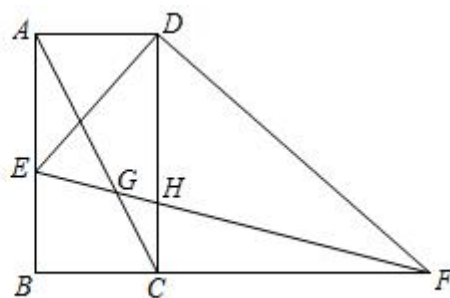
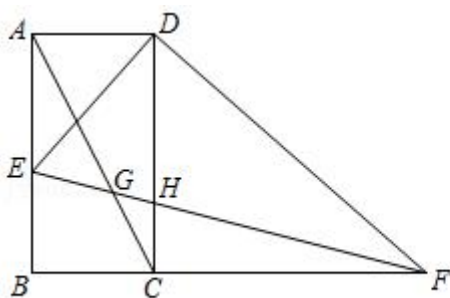
【点评】 本题是二次函数综合题, 考查了二次函数的性质, 相似三角形的判定和性质, 理解新定义并运用是解题的关键.

25. (14分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 1$, 点 E 在边 AB 上 (点 E 与端点 A 、 B 不重合), 联结 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F , 联结 EF , 与对角线 AC 、边 CD 分别交于点 G 、 H . 设 $AE = x$, $DH = y$.

(1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle CDF$, 并求 $\angle EFD$ 的正切值;

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出该函数的定义域;

(3) 联结 BG , 当 $\triangle BGE$ 与 $\triangle DEH$ 相似时, 求 x 的值.



备用图

【分析】(1) 根据矩形的性质得到 $\angle ADC = \angle DCB = 90^\circ$ ，根据余角的性质得到 $\angle ADE = \angle CDF$ ，由相似三角形的判定定理即可得到结论；

(2) 根据矩形的性质和相似三角形的判定和性质解答；

(3) 根据相似三角形的性质分两种情况解答．

【解答】解：(1) $\because \angle ADE + \angle CDE = 90^\circ$ ， $\angle CDF + \angle CDE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF,$$

在 $\text{Rt}\triangle EAD$ 与 $\text{Rt}\triangle FCD$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CDF \\ \angle EAD = \angle FCD = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EAD \sim \triangle FCD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle EFD = \frac{DE}{DF} = \frac{1}{2},$$

(2) 由 (1) 可知 $FC = 2EA = 2x$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle FCH \sim \triangle FBE,$$

$$\therefore \frac{FC}{FB} = \frac{CH}{BE},$$

$$\therefore \frac{2x}{2x+1} = \frac{2-y}{2-x},$$

$$\text{可得: } y = \frac{2x^2+2}{2x+1} \quad (0 < x < 2);$$

$$(3) \quad BE = 2 - x, \quad DH = y, \quad DE = \sqrt{1+x^2}, \quad EH = \sqrt{1+(y-x)^2},$$

$$\therefore \frac{EG}{GH} = \frac{AE}{CH},$$

$$\therefore EG = \frac{AE}{AE+CH} \cdot EH,$$

$$\because \angle BEG = \angle DHE,$$

若 $\triangle BEG \sim \triangle DHE$ ，则有两种情况，

第一种：

$$\because \angle EGB = \angle HED,$$

$$\therefore \frac{BE}{DH} = \frac{EG}{HE},$$

$$\therefore \frac{BE}{DH} = \frac{AE}{AE+CH},$$

$$\text{即 } \frac{2-x}{y} = \frac{x}{x+2-y},$$

$$\text{解得: } x = \frac{-5+\sqrt{89}}{4} \text{ 或 } \frac{-5-\sqrt{89}}{4} (\text{舍去}),$$

第二种:

$$\because \angle EGB = \angle HDE,$$

$$\therefore \frac{BE}{HE} = \frac{EG}{HD},$$

$$\therefore BE \cdot HD = \frac{AE}{AE+CH} \cdot HE^2,$$

$$\text{即 } (2-x)y = \frac{x}{x+2-y} \cdot [1+(y-x)^2],$$

$$\text{解得: } x = 1.5.$$

$$\text{综上所述, } x \text{ 的值为 } \frac{-5+\sqrt{89}}{4} \text{ 或 } 1.5.$$

【点评】 本题考查了相似综合题, 综合运用了相似三角形的判定和性质, 求函数的解析式, 矩形的性质等知识点, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.