

2020 年上海市闵行区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 如果把 $Rt\triangle ABC$ 的各边长都扩大到原来的 n 倍, 那么锐角 A 的四个三角比值()

- A. 都缩小到原来的 n 倍
B. 都扩大到原来的 n 倍;
C. 都没有变化
D. 不同三角比的变化不一致.

【答案】 C

【解析】

【分析】

根据题意易得边长扩大后的三角形与原三角形相似, 那么对应角相等, 相应的三角比值不变.

【详解】 $\because$ 各边都扩大 n 倍,

$\therefore$ 新三角形与原三角形的对应边的比为 $n:1$,

$\therefore$ 两三角形相似,

$\therefore \angle A$ 的三角比值不变,

故答案为 C.

【点睛】 本题考查锐角三角函数的定义, 用到的知识点有: 三边对应成比例, 两三角形相似;

相似三角形的对应角相等. 三角函数值只与角的大小有关, 与角的边的长短无关.

2. 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 那么下列比例式能成立的是()

- A. $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{BP}$ B. $\frac{AB}{AP} = \frac{BP}{AB}$ C. $\frac{BP}{AP} = \frac{AB}{BP}$ D. $\frac{AB}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】 A

【解析】

【分析】

由于点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，故有 $AP^2 = BP \times AB$ ，那么 $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{BP}$ 。

【详解】 $\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，

$$\therefore AP^2 = BP \times AB,$$

即 $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{BP}$ ，故 A 正确，B、C 错误；

$$\frac{BP}{AP} = \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故 D 错误；}$$

故答案为 A.

【点睛】本题考查了黄金分割的知识，把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC ($AC > BC$)，且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项，叫做把线段 AB 黄金分割。

3. k 为任意实数，抛物线 $y = a(x-k)^2 - k$ ($a \neq 0$) 的顶点总在()

- A. 直线 $y = x$ 上 B. 直线 $y = -x$ 上 C. x 轴上 D. y 轴上

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意首先求出顶点坐标，然后即可判定该点所在直线。

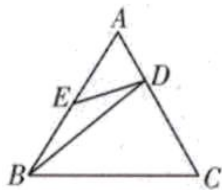
【详解】根据题意，得抛物线的顶点坐标为 $(k, -k)$

$\therefore$ 该点总在直线 $y = -x$ 上

故答案为 B.

【点睛】此题主要考查抛物线的性质，熟练掌握，即可解题。

4. 如图，在正三角形 ABC 中，分别在 AC，AB 上，且 $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ ， $AE = BE$ ，则有 ()



- A. $\triangle AED \sim \triangle BED$ B. $\triangle AED \sim \triangle CBD$ C. $\triangle AED \sim \triangle ABD$ D. $\triangle BAD \sim \triangle BCD$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题可以采用排除法，即根据已知中正三角形 ABC 中，D、E 分别在 AC、AB 上，

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ ， $AE = BE$ ，我们可以分别得到： $\triangle AED$ 、 $\triangle BCD$ 为锐角三角形， $\triangle BED$ 、 $\triangle ABD$

为钝角三角形，然后根据锐角三角形不可能与钝角三角形相似排除错误答案，得到正确答案。

【详解】由已知中正三角形 ABC 中，D、E 分别在 AC、AB 上， $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ ， $AE = BE$ ，

易判断出： $\triangle AED$ 为一个锐角三角形， $\triangle BED$ 为一个钝角三角形，故 A 错误；

$\triangle ABD$ 也是一个钝角三角形，故 C 也错误；

但 $\triangle BCD$ 为一个锐角三角形，故 D 也错误；

故选 B。

【点睛】本题考查的知识点是相似三角形的判定，其中在解答选择题时，我们可以直接根据相似三角形的定义，大小不同，形状相同，排除错误答案，得到正确结论。

5. 下列命题是真命题的是()

- A. 经过平面内任意三点可作一个圆
- B. 相等的圆心角所对的弧一定相等
- C. 相交两圆的公共弦一定垂直于两圆的连心线
- D. 内切两圆的圆心距等于两圆的半径的和

【答案】C

【解析】

【分析】

利用经过不在同一直线上的三点才可以确定一个圆；在同圆和等圆中，相等的圆心角所对的弧一定相等；相交圆的公共线垂直于连心线；内切两圆的圆心距等于两圆半径的和或差判断求解.

【详解】A 选项，经过平面上在同一直线上的三点不能确定一个圆，错误；

B 选项，需在同圆中才成立，错误；

C 选项，相交两圆的连心线垂直平分公共弦，正确；

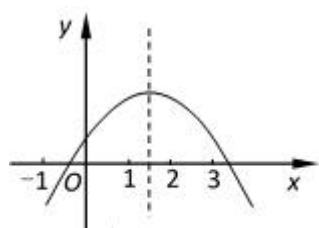
D 选项，不对，应为两圆半径之差；

故答案为 C.

【点睛】此题主要考查了与圆有关的定理和推论，解题的关键是准确记忆有关定理和推论.

6.二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像如图所示，现有以下结论：① $a < 0$ ；② $abc > 0$ ；

③ $a - b + c < 0$ ；④ $b^2 - 4ac < 0$ ；其中正确的结论有()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个.

【答案】B

【解析】

【分析】

根据二次函数图像的性质：抛物线开口向下；与 y 轴的交点；两根判别式；逐一判定即可.

【详解】①根据图像，开口向下，得出 $a < 0$ ，正确；

②根据图像，对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 1.5$ ， $b > 0$ ，与 y 轴的交点为 $(0, c)$ ， $c > 0$ ， $abc < 0$ 错误；

③根据图像，以及对称轴， $b = -3a$ ， $a - b + c < 0$ ，正确；

④根据图像，顶点坐标均大于 0，即 $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ ， $b^2 - 4ac > 0$ ，错误；

故答案为 B.

【点睛】此题主要考查二次函数图像的性质，熟练掌握，即可解题.

二、填空题

7. 已知线段 $a = 4$ ， $c = 9$ ，那么 a 和 c 的比例中项 $b =$ _____.

【答案】6；

【解析】

【分析】

根据比例中项的定义可得 $b^2 = ac$ ，从而易求 b .

【详解】 $\because b$ 是 a 、 c 的比例中项，

$$\therefore b^2 = ac,$$

$$\text{即 } b^2 = 36,$$

$$\therefore b = 6 \text{ (负数舍去),}$$

故答案是 6.

【点睛】本题考查了比例线段，解题的关键是理解比例中项的含义.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $\sin A = \frac{2}{5}$ ，则 $BC =$ _____

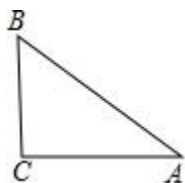
【答案】4

【解析】

【分析】

根据锐角三角函数的定义得出 $\sin A = \frac{2}{5} = \frac{BC}{AB}$ ，代入求出即可．

【详解】解：



$$\because \sin A = \frac{2}{5} = \frac{BC}{AB}, \quad AB = 10,$$

$$\therefore BC = 4,$$

故答案为 4.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义，能熟记锐角三角函数的定义的内容是解此题的关键．

9. 抛物线 $y = -2(x-1)^2 + 3$ 在对称轴右侧的部分是_____的.(填“上升”或“下降”)

【答案】下降

【解析】

【分析】

首先根据抛物线解析式判定开口向下，以及对称轴，然后即可得解．

【详解】根据题意，得

抛物线开口向下，对称轴为 $x = 1$

$\therefore$ 对称轴右侧的部分是下降的

【点睛】此题主要考查抛物线图像的增减性，熟练掌握，即可解题．

10. 如果两个相似三角形的相似比为 2：3，两个三角形的周长的和是 100cm，那么较小的三

角形的周长为_____cm.

【答案】 40

【解析】

【分析】

首先设两个三角形的周长分别为 x, y ，然后根据相似三角形的相似比等于周长比，列出二元一次方程组，求解即可.

【详解】 设两个三角形的周长分别为 x, y

由已知，得

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x + y = 100 \end{cases}$$

解得 $x = 40, y = 60$

$\therefore$ 较小的三角形的周长为 40 cm.

【点睛】 此题主要考查相似三角形的性质，利用相似三角形周长比等于相似比，求解即可.

11. $\vec{e}$ 为单位向量， $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相反，且长度为 6，那么 $\vec{a} = \underline{\hspace{1cm}} \vec{e}$.

【答案】 -6

【解析】

【分析】

根据向量的性质，方向和长度确定，即可得解.

【详解】 根据题意，得

$$\vec{a} = -6\vec{e}$$

故答案为-6.

【点睛】 此题主要考查对向量的理解，熟练掌握，即可解题.

12.某人从地面沿着坡度为 $i = 1:\sqrt{3}$ 的山坡走了100米, 这时他离地面的高度是_____米.

【答案】 50

【解析】

【分析】

垂直高度、水平距离和坡面距离构成一个直角三角形. 利用坡度比找到垂直高度和水平距离之间的关系后, 借助于勾股定理进行解答.

【详解】 $\because$ 坡度为 $i = 1:\sqrt{3}$,

$\therefore$ 设离地面的高度为 x , 那么水平距离为 $\sqrt{3}x$.

$\because x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 100^2$, 解得 $x=50$.

即这时他离地面的高度是 50 米.

故答案为 50.

【点睛】 考查解直角三角形的应用-坡度坡角问题, 根据勾股定理列出方程是解题的关键.

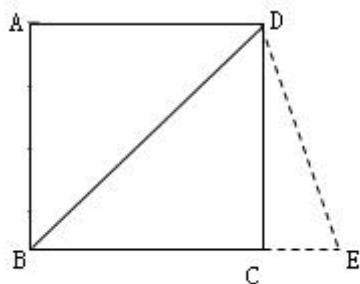
13.已知正方形 ABCD 的边长为 2, 如果将线段 BD 绕着点 B 旋转后, 点 D 落在 BC 的延长线上的点 E 处, 那么 $\tan \angle BAE =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

根据旋转不变性, $BD=BE$. 根据三角函数的定义可得 $\tan \angle BAE$ 的值.



【详解】

由题意，得

$$BD=BE=2\sqrt{2}$$

$$\tan \angle BAE = \frac{BE}{BA} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

故答案为 $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要突破两点：一是三角函数的定义；二是旋转图形的性质.

14. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ， $\odot C$ 与斜边 AB 相切，那么 $\odot C$ 的半径为 _____.

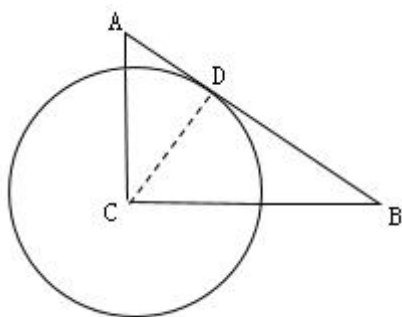
【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】

首先根据勾股定理求出 AB ，然后根据圆相切的性质得出 $CD \perp AB$ ， CD 即为 $\odot C$ 的半径，然后根据三角形面积列出等式，即可解得 CD .

【详解】 设切点为 D ，连接 CD ，如图所示



$$\because \angle C=90^\circ, AC=3, BC=4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

又 $\because \odot C$ 与斜边 AB 相切，

$\therefore CD \perp AB$ ， CD 即为 $\odot C$ 的半径

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot CD$$

$$\therefore CD = \frac{12}{5}$$

故答案为 $\frac{12}{5}$.

【点睛】此题主要考查圆相切的性质以及勾股定理的运用，熟练掌握，即可解题.

15. 设抛物线 $l: y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点为 D ，与 y 轴的交点是 C ，我们称以 C 为顶点，且过点 D 的抛物线为抛物线 l 的“伴随抛物线”，请写出抛物线 $y = x^2 - 4x + 1$ 的伴随抛物线的解析式_____.

【答案】 $y = -x^2 + 1$

【解析】

【分析】

首先根据题意求出抛物线的顶点坐标和与 y 轴的交点坐标，然后即可得出伴随抛物线的顶点坐标和所过点，列出顶点式解析式，代入所过点，即可得出其解析式.

【详解】根据题意，得

抛物线 $y = x^2 - 4x + 1$ 的顶点坐标为 $(2, -3)$ ，与 y 轴的交点是 $(0, 1)$

$\therefore$ 其伴随抛物线的顶点坐标为 $(0, 1)$ ，过点 $(2, -3)$

则其解析式为 $y = ax^2 + 1$ ，将点 $(2, -3)$ 代入，得

$$a = -1$$

$\therefore$ 其解析式为 $y = -x^2 + 1$

【点睛】此题主要考查抛物线的性质，熟练掌握，即可解题.

16. 半径分别为 3cm 与 $\sqrt{17}\text{cm}$ 的 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点，如果公共弦 $AB = 4\sqrt{2}\text{cm}$ ，那么圆心距 O_1O_2 的长为_____ cm .

【答案】 2 或 4

【解析】

【分析】

首先连接 O_1O_2 、 O_1A 、 O_2A ，令 O_1O_2 交 AB 于点 C ，根据垂径定理和勾股定理即可得解.

【详解】连接 O_1O_2 、 O_1A 、 O_2A ，令 O_1O_2 交 AB 于点 C ，如图所示

由已知得 $O_1A=3$ ， $O_2A=\sqrt{17}$ ， $AB=4\sqrt{2}$

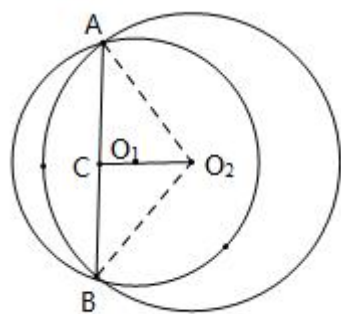
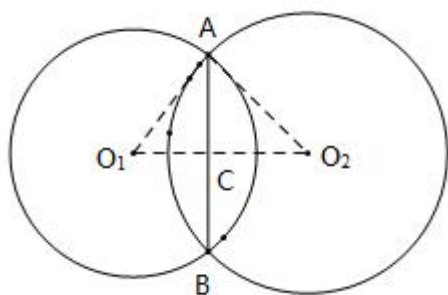
$$\therefore AC=BC=2\sqrt{2}$$

$$\therefore O_1C = \sqrt{O_1A^2 - AC^2} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

$$O_2C = \sqrt{O_2A^2 - AC^2} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\therefore O_1O_2 = O_1C + O_2C = 1 + 3 = 4$$

$$\text{或 } O_1O_2 = O_2C - O_1C = 3 - 1 = 2$$



$\therefore$ 答案为 2 或 4.

【点睛】此题主要考查垂径定理以及勾股定理的应用，注意有两种情况，不要遗漏.

17. 正五边形的边长与边心距的比值为_____.(用含三角比的代数式表示)

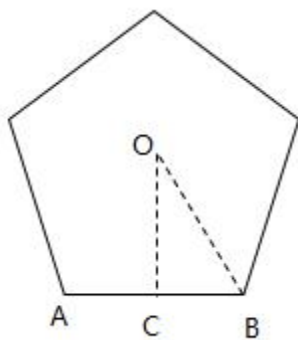
【答案】 $2 \tan 36^\circ$

【解析】

【分析】

本题应作出辅助线，构造出直角三角形来解决.

【详解】



经过正五边形的中心 O 作边 AB 的垂线 OC ，则 $\angle BOC = 36^\circ$ ，

在直角 $\triangle OBC$ 中，根据三角函数得到 $\frac{BC}{OC} = \tan 36^\circ$

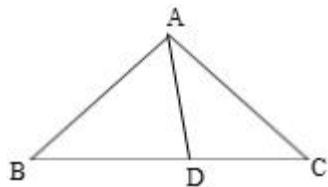
$$\frac{AB}{OC} = 2 \tan 36^\circ$$

故答案为 $2 \tan 36^\circ$

【点睛】正多边形的计算一般要经过中心作边的垂线，并连接中心与一个端点构造直角三角形，把正多边形的计算转化为解直角三角形的问题.

18. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4$ ， $BC = 6$ 点 D 在底边 BC 上，且 $\angle DAC = \angle ACD$ ，

将 $\triangle ACD$ 沿着 AD 所在直线翻折，使得点 C 落到点 E 处，联结 BE ，那么 BE 的长为_____.

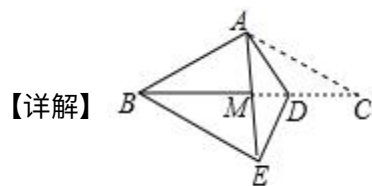


【答案】 1

【解析】

【分析】

只要证明 $\triangle ABD \sim \triangle MBE$, 得 $\frac{AB}{BM} = \frac{BD}{BE}$, 只要求出 BM、BD 即可解决问题.



$$\because AB=AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\because \angle DAC = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ABC,$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{CD}{4},$$

$$\therefore CD = \frac{8}{3}, \quad BD = BC - CD = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\because \angle DAM = \angle DAC = \angle DBA, \quad \angle ADM = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle ADM \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DM}{DA}, \quad \text{即} \quad \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{DM}{\frac{8}{3}},$$

$$\therefore DM = \frac{32}{15}, \quad MB = BD - DM = \frac{10}{3} - \frac{32}{15} = \frac{6}{5},$$

$$\because \angle ABM = \angle C = \angle MED,$$

$$\therefore A、B、E、D \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BEM, \quad \angle EBM = \angle EAD = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle MBE,$$

$$\therefore \frac{AB}{BM} = \frac{BD}{BE},$$

$$\therefore BE = \frac{BM \cdot BD}{AB} = \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 3} = 4.$$

【点睛】 本题考查翻折变换、等腰三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是充分利用相似三角形的性质解决问题，本题需要三次相似解决问题.

三、解答题

19. 已知二次函数图像的最高点是 $A(1, 4)$ ，且经过点 $B(0, 3)$ ，与 x 轴交于 C 、 D 两点(点 C 在点 D 的左侧). 求 $\triangle BCD$ 的面积.

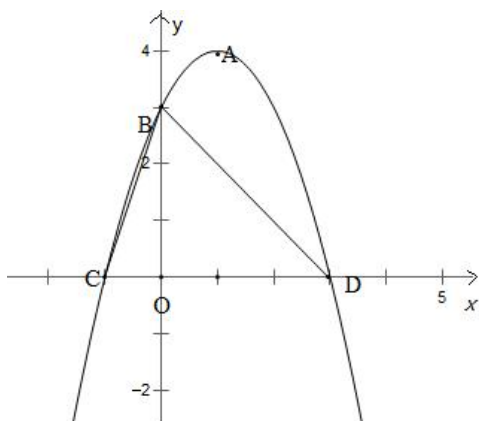
【答案】 $S_{\triangle BCD}=6$.

【解析】

【分析】

首先利用 B 点求出二次函数解析式，令 $y=0$ ，即可得出 $CD=4$ ，进而得出 $\triangle BCD$ 的面积.

【详解】



设所求的二次函数解析式为 $y = a(x-1)^2 + 4$ ($a \neq 0$),

把 $B(0, 3)$ 代入得 $3 = a(0-1)^2 + 4$

解得: $a = -1$.

令 $y = 0$, 那么 $-(x-1)^2 + 4 = 0$,

解得: $x_1 = 3, x_2 = -1$.

∴ CD=4.

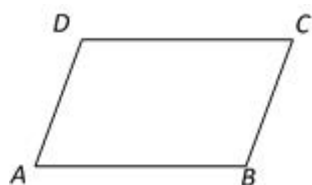
在△BCD 中, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot OB = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

【点睛】此题主要考查二次函数与三角形的综合应用, 熟练掌握, 即可解题.

20. 已知: 在平行四边形 ABCD 中, AB:BC=3:2.

(1) 根据条件画图: 作∠BCD 的平分线, 交边 AB 于点 E, 取线段 BE 的中点 F, 连接 DF 交 CE 于点 G.

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{CG} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示), 并在图中画出向量 $\overrightarrow{DG}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的分向量.



【答案】(1) 见解析; (2) $\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$, 画图见解析.

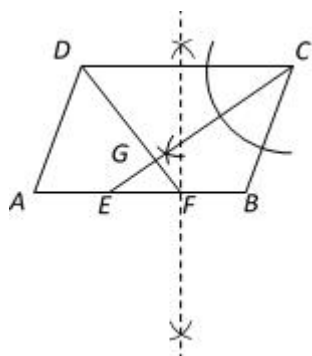
【解析】

【分析】

(1) 首先作∠BCD 的平分线, 然后作 BE 的垂直平分线即可;

(2) 首先判定 $\triangle GEF \sim \triangle GCD$, 然后根据 AB:BC=3:2, 得出 $\frac{EF}{CD} = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{3}$, 进而得出 $EF = \frac{1}{3}CD$, $CG = \frac{3}{4}CE$, 最后根据向量的运算, 即可得出 $\overrightarrow{CG}$ 和 $\overrightarrow{DG}$, 即可画出分向量.

【详解】(1) 根据已知条件, 作图如下:



(2) $\because CE$ 为 $\angle BCD$ 的平分线,

$$\therefore \angle BCE = \angle DCE$$

又 $\because AB \parallel CD$

$$\therefore \angle DCE = \angle BEC, \triangle GEF \sim \triangle GCD$$

又 $\because AB : BC = 3 : 2$

$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore EF = \frac{1}{3}CD, CG = \frac{3}{4}CE$$

又 $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$

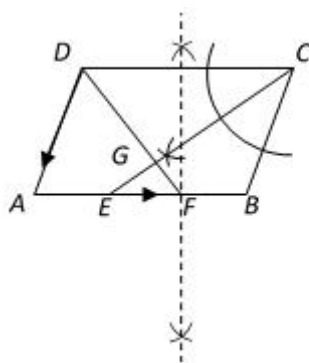
$$\therefore DC = AB = a, BC = AD = b$$

又 $\because EB + BC = EC, EC = -CG - GE$

$$\therefore CG = -\frac{3}{4}(EB + BC) = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}a + b\right) = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b$$

$$\text{同理可得, } DG = \frac{3}{4}DF = \frac{3}{4}(DA + AF) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}a - b\right) = \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b$$

$\overrightarrow{DG}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的分向量, 如图所示:

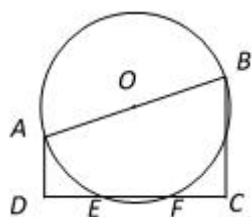


【点睛】此题主要考查角平分线的作图以及向量的运算, 熟练掌握, 即可解题.

21. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 4$, $\tan B = 3$. 以 AB 为直径作 $\odot O$, 交边 DC 于 E 、 F 两点.

(1)求证: $DE=CF$.

(2)求直径 AB 的长.



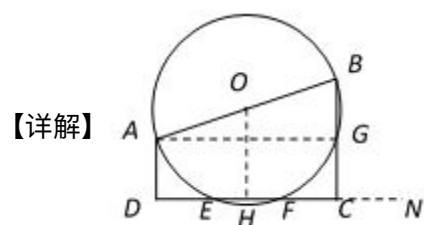
【答案】(1)证明见解析; (2) $AB=2\sqrt{10}$.

【解析】

【分析】

(1) 首先根据 $AD \parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $OH \perp DC$, 得出 $AD \parallel OH \parallel BC$, 进而根据 $OA=OB$ 得出 $DH=HC$, 然后根据垂径定理得出 $EH=HF$, 进而得出 $DE=CF$;

(2) 首先根据 $\angle AGB = \angle BCN = 90^\circ$, 得出 $AG \parallel DC$, 然后根据 $AD \parallel BC$, 得出 $AD=CG$., 进而得出 BG , 再根据三角函数得出 AG , 最后根据勾股定理得出 AB .



【详解】

(1)过点 O 作 $OH \perp DC$, 垂足为 H .

$\because AD \parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $OH \perp DC$,

$\therefore \angle BCN = \angle OHC = \angle ADC = 90^\circ$.

$\therefore AD \parallel OH \parallel BC$.

又 $\because OA=OB$.

$\therefore DH=HC$.

$\because OH \perp DC$, OH 过圆心,

$\therefore EH=HF$.

$$\therefore DH-EH=HC-HF.$$

即：DE=CF.

(2)过点 A 作 $AG \perp BC$ ，垂足为点 G， $\angle AGB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle AGB = \angle BCN = 90^\circ,$$

$$\therefore AG \parallel DC.$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore AD=CG.$$

$$\therefore AD=2, \quad BC=4,$$

$$\therefore BG=BC-CG=2.$$

在 $Rt\triangle AGB$ 中， $\therefore \tan B = 3$ ，

$$\therefore AG = BG \cdot \tan B = 2 \times 3 = 6.$$

在 $Rt\triangle AGB$ 中， $AB^2 = AG^2 + BG^2$

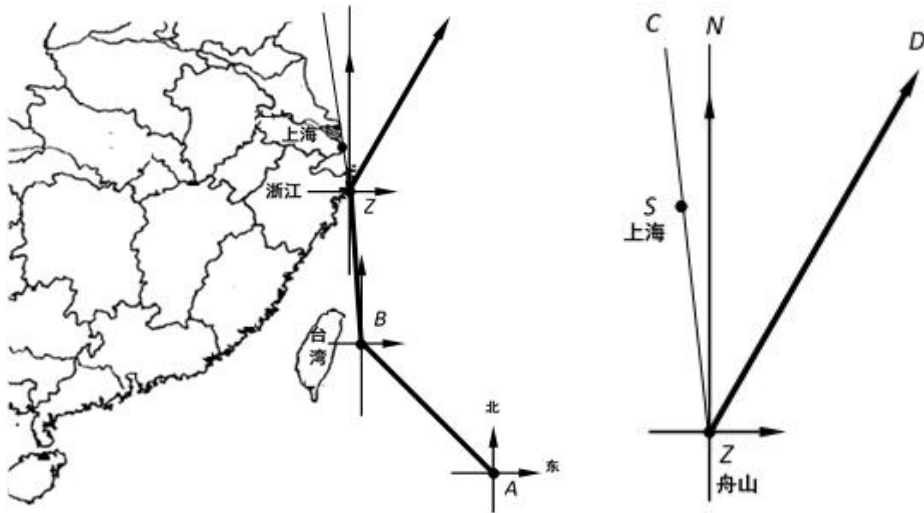
$$\therefore AB = 2\sqrt{10}.$$

【点睛】此题主要考查垂径定理、勾股定理以及三角函数的综合应用，熟练掌握，即可解题.

22.2019 年第 18 号台风“米娜”于 9 月 29 日早晨 5 点整，由位于台湾省周边的 B 岛东南方约 980 千米的西北太平洋洋面上(A 点)生成，向西北方向移动.并于 9 月 30 日 20 时 30 分到达 B 岛后风力增强且转向，一路向北于 24 小时后在浙江省舟山市登陆.“米娜”在登录后风力减弱且再一次转向，以每小时 20 千米的速度向北偏东 30° 的方向移动，距台风中心 170 千米的范围内是受台风影响的区域.已知上海位于舟山市北偏西 7° 方向，且距舟山市 250 千米.

(1)台风中心从生成点(A 点)到达 B 岛的速度是每小时多少千米？

(2)10 月 2 日上海受到“米娜”影响，那么上海遭受这次台风影响的时间有多长？(结果保留整数，参考数据： $\sin 23^\circ \approx 0.39$ ， $\cos 23^\circ \approx 0.92$ ， $\tan 23^\circ \approx 0.42$ ； $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$.)



【答案】 (1)台风中心从生成点(A 点)到达 B 岛的速度是每小时 25 千米；(2)上海遭受这次台风影响的时间为 8 小时.

【解析】

【分析】

(1) 由路程和时间可以求得速度；

(2) 首先求出 $Rt\triangle SHZ$ 中 $\angle CZD$ 的正弦函数，进而得出 SH ，即可设台风中心移动到 E 处时上海开始遭受台风影响，根据到 F 处影响结束，得出 $SE=SF=170$ ，然后利用勾股定理得出 EF ，即可得出上海遭受这次台风影响的时间.

【详解】 (1)由题意得， $AB=980$ 千米，台风中心到达 B 岛的时间是 39.5 小时.

$$\therefore v = \frac{980}{39.5} \approx 25 \text{ (千米)}.$$

答：台风中心从生成点(A 点)到达 B 岛的速度是每小时 25 千米.

(2)过点 S 作 $SH \perp ZD$ ，垂足为点 H，

$$\therefore \angle SHZ = 90^\circ,$$

$$\because \angle NZD = 30^\circ, \angle CZN = 7^\circ,$$

$$\therefore \angle CZD = \angle CZN + \angle NZD = 7^\circ + 30^\circ = 37^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle SHZ$ 中, $\sin \angle CZD = \frac{SH}{SZ}$.

$\because \angle CZD = 37^\circ$, $SZ = 250$ 千米,

$\therefore SH = SZ \cdot \sin \angle CZD = 250 \times \sin 37^\circ \approx 250 \times 0.60 \approx 150$ (千米).

$\because 150$ 千米 < 170 千米,

$\therefore$ 设台风中心移动到 E 处时上海开始遭受台风影响

到 F 处影响结束. 即 $SE = SF = 170$ (千米).

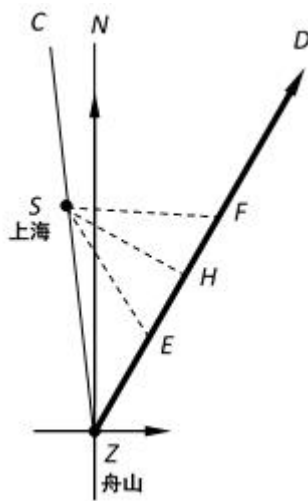
$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle SEH$ 中, $\angle SHE = 90^\circ$, $SE^2 = SH^2 + HE^2$,

$\therefore HE = \sqrt{SE^2 - SH^2} = \sqrt{170^2 - 150^2} \approx 80$.

$\therefore EF = 2EH \approx 160$ (千米).

$\therefore$ 上海遭受这次台风影响的时间为

$$\frac{EF}{20} = \frac{160}{20} \approx 8 \text{ (小时)}.$$



答: 上海遭受这次台风影响的时间为 8 小时.

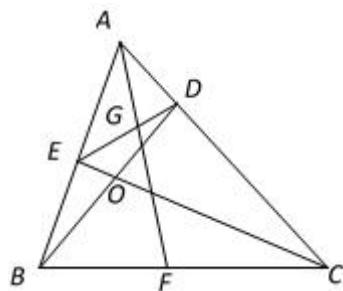
【点睛】此题主要考查三角函数与勾股定理的实际运用, 熟练掌握, 即可解题.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 AC 边上的高, 点 E 在边 AB 上, 联结 CE 交 BD 于点 O , 且

$AD \cdot OC = AB \cdot OD$, AF 是 $\angle BAC$ 的平分线, 交 BC 于点 F , 交 DE 于点 G .

(1) 求证: $CE \perp AB$.

(2)求证: $AF \cdot DE = AG \cdot BC$.



【答案】(1)证明见解析;(2)证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 首先判定 $\text{Rt}\triangle ADB \sim \text{Rt}\triangle ODC$, 得出 $\angle ABD = \angle OCD$, 然后通过三角形内角和转换得出 $\angle OEB = 90^\circ$, 进而得出 $CE \perp AB$;

(2) 首先判定 $\triangle ADB \sim \triangle AEC$, 得出 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$, 然后再判定 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$, 得出 $\frac{AG}{AF} = \frac{DE}{BC}$, 进而得出 $AF \cdot DE = AG \cdot BC$.

【详解】(1) $\because AD \cdot OC = AB \cdot OD$,

$$\therefore \frac{AD}{OD} = \frac{AB}{OC}.$$

$\because BD$ 是 AC 边上的高,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$, $\triangle ADB$ 和 $\triangle ODC$ 是直角三角形.

$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \sim \text{Rt}\triangle ODC$.

$\therefore \angle ABD = \angle OCD$.

又 $\because \angle EOB = \angle DOC$, $\angle DOC + \angle OCD + \angle ODC = 180^\circ$,

$\angle EOB + \angle ABD + \angle OEB = 180^\circ$.

$\therefore \angle OEB = 90^\circ$.

$\therefore CE \perp AB$.

(2)在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 中,

$$\because \angle BAD = \angle CAE, \angle ABD = \angle OCD,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle AEC.$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle BAC$ 中

$$\because \angle DAE = \angle BAC, \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC.$$

$\because AF$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{DE}{BC}, \text{ 即 } AF \cdot DE = AG \cdot BC.$$

【点睛】 此题主要考查相似三角形的判定与性质, 熟练掌握, 即可解题.

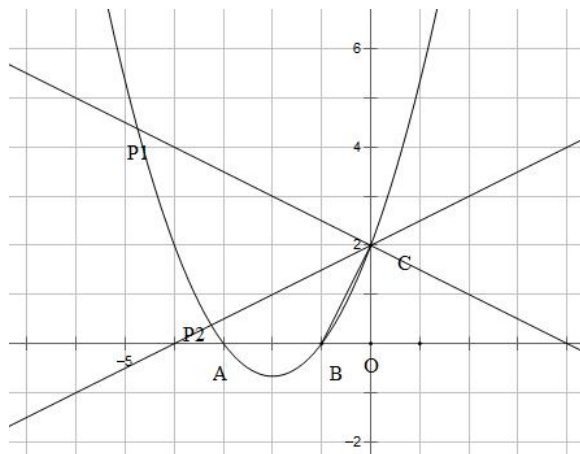
24. 已知: 在平面直角坐标系 xOy 中, 对称轴为直线 $x = -2$ 的抛物线经过点 $C(0, 2)$, 与 x

轴交于 $A(-3, 0)$ 、 B 两点(点 A 在点 B 的左侧).

(1) 求这条抛物线的表达式.

(2) 连接 BC , 求 $\angle BCO$ 的余切值.

(3) 如果过点 C 的直线, 交 x 轴于点 E , 交抛物线于点 P , 且 $\angle CEO = \angle BCO$, 求点 P 的坐标.



【答案】 (1) $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2$; (2) $\cot \angle BCO = 2$; (3) 点 P 坐标是 $(-\frac{13}{4}, \frac{3}{8})$ 或 $(-\frac{19}{4}, \frac{35}{8})$.

【解析】

【分析】

(1) 首先设抛物线的解析式，然后根据对称轴和所经过的点，列出方程，即可得出解析式；

(2) 首先求出 B 坐标，即可得出 $OB = 1$ ， $OC = 2$ ，进而得出 $\angle BCO$ 的余切值；

(3) 首先根据 $\angle CEO = \angle BCO$ 的余切值列出等式，得出点 E 的坐标，然后根据点 C 的坐标得出直线解析式，最后联立直线和抛物线的解析式即可得出点 P 坐标.

【详解】(1) 设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

$$\text{由题意得: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得: } a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{8}{3}.$$

$$\therefore \text{这条抛物线的表达式为 } y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2.$$

$$(2) \text{ 令 } y = 0, \text{ 那么 } \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -3, \quad x_2 = -1.$$

$$\therefore \text{点 A 的坐标是 } (-3, 0)$$

$$\therefore \text{点 B 的坐标是 } (-1, 0).$$

$$\therefore C(0, 2)$$

$$\therefore OB = 1, \quad OC = 2.$$

在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, $\angle BOC = 90^\circ$,

$$\therefore \cot \angle BCO = \frac{OC}{OB} = 2.$$

$$(3) \text{ 设点 E 的坐标是 } (x, 0), \text{ 得 } OE = |x|.$$

$$\therefore \angle CEO = \angle BCO,$$

$$\therefore \cot \angle CEO = \cot \angle BCO.$$

在 $\text{Rt}\triangle EOC$ 中, $\therefore \cot \angle CEO = \frac{OE}{OC} = \frac{|x|}{2} = 2$.

$\therefore |x|=4$, $\therefore$ 点 E 坐标是 $(4, 0)$ 或 $(-4, 0)$.

$\therefore$ 点 C 坐标是 $(0, 2)$,

$\therefore l_{CE}: y = \frac{1}{2}x + 2$ 或 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -\frac{13}{4} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (舍去), 或 } \begin{cases} x = -\frac{19}{4} \\ y = \frac{35}{8} \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (舍去);}$$

$\therefore$ 点 P 坐标是 $(-\frac{13}{4}, \frac{3}{8})$ 或 $(-\frac{19}{4}, \frac{35}{8})$.

【点睛】此题主要考查直线、抛物线解析式的求解以及综合应用, 熟练掌握, 即可解题.

25. 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ADC=90^\circ$, $CD=2$,

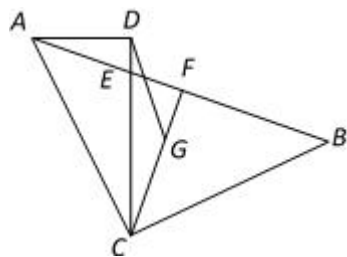
(点 A、B 分别在直线 CD 的左右两侧), 射线 CD 交边 AB 于点 E, 点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心,

射线 CG 交边 AB 于点 F, $AD=x$, $CE=y$.

(1) 求证: $\angle DAB = \angle DCF$.

(2) 当点 E 在边 CD 上时, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围.

(3) 如果 $\triangle CDG$ 是以 CG 为腰的等腰三角形, 试求 AD 的长.



【答案】(1) 证明见解析; (2) $y = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$ ($0 < x \leq 2$); (3) $AD=1$ 或 $\sqrt{14}$.

【解析】

【分析】

(1) 首先根据点 G 是 Rt△ABC 的重心, 得出 CF 是 Rt△ABC 的中线., 又由 AC=BC, ∠ACB=90°, 得出 CF ⊥ AB, 即 ∠AFC=90°, 然后等量转换即可得出 ∠DAB=∠DCF;

(2) 首先判定 △CAD ≅ △BCH, 得出 BH = CD, CH = AD, 又根据 ∠ADC=∠BHC=90°, 得出 AD // BH, 进而得出 $\frac{AD}{BH} = \frac{DE}{EH}$, 列出等式, 即可得出 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 分两种情况进行求解: ①当 GC=GD 时, 根据直角三角形斜边中线定理得出 MD=MC, 进而得出 MG ⊥ CD, 且直线 MG 经过点 B, 那么 BH 与 MG 共线, 即可得出 AD; ②当 CG=CD 时, CG=2, 点 G 为 △ABC 的重心, 然后运用勾股定理即可得出 AD.

【详解】(1)证明: ∵ 点 G 是 Rt△ABC 的重心,

∴ CF 是 Rt△ABC 的中线.

又 ∵ 在 Rt△ABC, AC=BC, ∠ACB=90°,

∴ CF ⊥ AB, 即 ∠AFC=90°.

∵ ∠DEF=∠ADE+∠DAE=∠EFC+∠ECF, 且 ∠ADE=∠EFC=90°,

∴ ∠DAB=∠DCF.

(2)解: 如图, 过点 B 作 BH ⊥ CD 于点 H.

$$\begin{cases} \angle DAC = \angle HCB \\ AC = CB \\ \angle DCA = \angle HBC \end{cases}$$

∴ △CAD ≅ △BCH (ASA) .

∴ BH = CD = 2, CH = AD = x, DH = 2-x.

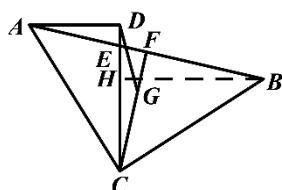
∵ ∠ADC=∠BHC=90°

∴ AD // BH.

$$\therefore \frac{AD}{BH} = \frac{DE}{EH}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{DE}{EH}, \quad \frac{x+2}{2} = \frac{DE+EH}{EH} = \frac{DH}{EH}, \quad EH = \frac{4-2x}{x+2}.$$

$$y = CE = CH + HE = x + \frac{4-2x}{x+2} = \frac{x^2+4}{x+2} (0 < x \leq 2).$$



(3)解：当 $GC=GD$ 时，如图 1，

取 AC 的中点 M ，联结 MD 。那么 $MD=MC$ ，

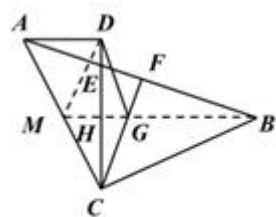
联结 MG ， $MG \perp CD$ ，且直线 MG 经过点 B 。那么 BH 与 MG 共线。

又 $CH=AD$ ，那么 $AD=CH=\frac{1}{2}CD=1$ 。

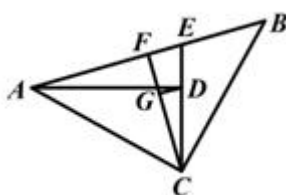
当 $CG=CD$ 时，如图 2，即 $CG=2$ ，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$CF = \frac{3}{2}CG = 3, \quad AB=2CF=6, \quad AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 3\sqrt{2},$$

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{18 - 4} = \sqrt{14}.$$



第 (3) 小题图 1



第 (3) 小题图 2

综上所述， $AD=1$ 或 $\sqrt{14}$ 。

【点睛】此题主要考查三角形与函数的综合应用，涉及到的知识点有直角三角形斜边中线定

理、重心、勾股定理等，熟练掌握，即可解题。