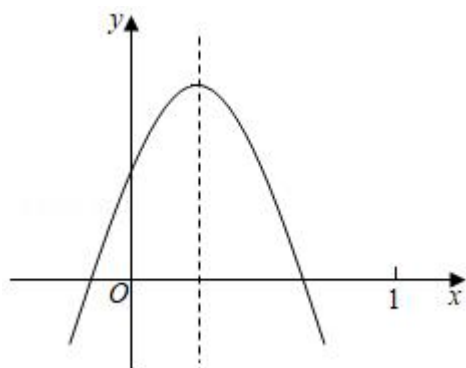


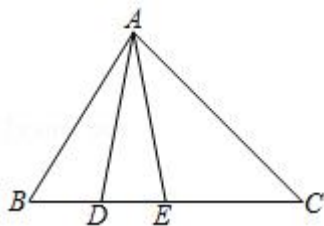
2020-2021 学年上海市长宁区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 50^\circ$ ， $AB = 10$ ，那么 BC 的长为 ()
- A. $10\cos 50^\circ$ B. $10\sin 50^\circ$ C. $10\tan 50^\circ$ D. $10\cot 50^\circ$
2. (4 分) 下列命题中，说法正确的是 ()
- A. 四条边对应成比例的两个四边形相似
- B. 四个内角对应相等的两个四边形相似
- C. 两边对应成比例且有一个角相等的两个三角形相似
- D. 斜边与一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似
3. (4 分) 已知 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是两个单位向量，向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1$ ， $\vec{b} = -3\vec{e}_2$ ，那么下列结论正确的是 ()
- A. $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ B. $\vec{a} = -\vec{b}$ C. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ D. $|\vec{a}| = -|\vec{b}|$
4. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，那么 a 、 c 满足 ()



- A. $a > 0$, $c > 0$ B. $a > 0$, $c < 0$ C. $a < 0$, $c > 0$ D. $a < 0$, $c < 0$
5. (4 分) 已知点 P 、点 Q 是线段 AB 的两个黄金分割点，且 $AB = 10$ ，那么 PQ 的长为 ()
- A. $5(3 - \sqrt{5})$ B. $10(\sqrt{5} - 2)$ C. $5(\sqrt{5} - 1)$ D. $5(\sqrt{5} + 1)$
6. (4 分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、点 E 是边 BC 上的两点，联结 AD 、 AE ，且 $AD = AE$ ，如果 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$ ，那么下列等式错误的是 ()



A. $AB^2 = BE \cdot BC$

B. $CD \cdot AB = AD \cdot AC$

C. $AE^2 = CD \cdot BE$

D. $AB \cdot AC = BE \cdot CD$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）[在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{x-y}$ 的值为_____.

8. (4 分) 计算: $\frac{1}{2}(2\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} =$ _____.

9. (4 分) 计算: $\sqrt{2}\cos 45^\circ + \sin^2 60^\circ =$ _____.

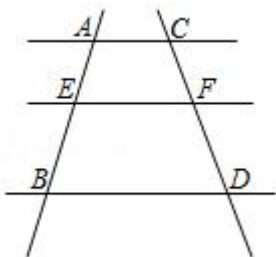
10. (4 分) 如果两个相似三角形对应边上的中线之比为 5:4. 那么这两个三角形的周长之比为_____.

11. (4 分) 将抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 向下平移 3 个单位后, 所得抛物线的表达式是_____.

12. (4 分) 一辆汽车沿着坡度 $i = 1: \sqrt{3}$ 的斜坡向下行驶 50 米, 那么它距离地面的垂直高度下降了_____米.

13. (4 分) 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 和 $B(2, y_2)$, 比较 y_1 与 y_2 的大小: y_1 _____ y_2 (选择 “>” 或 “<” 或 “=” 填入空格).

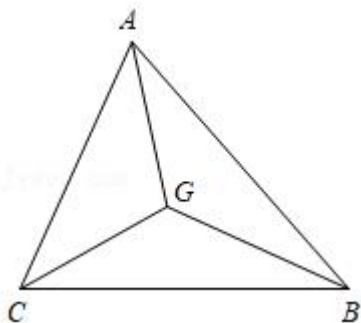
14. (4 分) 如图, 已知 $AC \parallel EF \parallel BD$. 如果 $AE:EB = 2:3$, $CF = 6$. 那么 CD 的长等于_____.



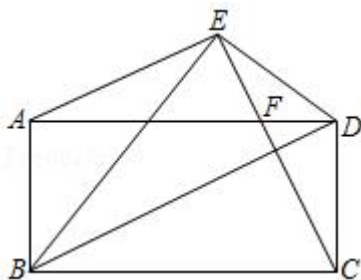
15. (4 分) 已知, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的部分对应值如下表, 则 $f(-3) =$ _____.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

16. (4 分) 如图, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 如果 $AG = CG$, $BG = 2$, $AC = 4$, 那么 AB 的长等于_____.



17. (4分) 如图, 矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 翻折后, 点 C 落在点 E 处. 联结 CE 交边 AD 于点 F . 如果 $DF = 1$, $BC = 4$, 那么 AE 的长等于_____.



18. (4分) 如果一条对角线把凸四边形分成两个相似的三角形, 那么我们把这条对角线叫做这个凸四边形的相似对角线, 在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC = \sqrt{3}$, $AD = CD = \frac{3}{2}$, 点 E 、点 F 分别是边 AD , 边 BC 上的中点. 如果 AC 是凸四边形 $ABCD$ 的相似对角线, 那么 EF 的长等于_____.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

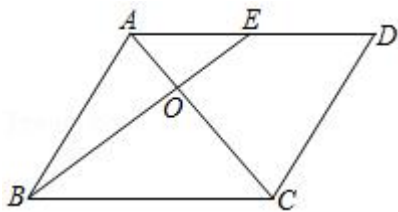
19. (10分) 已知二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{2}$.

- (1) 用配方法把该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式;
- (2) 写出该二次函数图象的开口方向、顶点坐标和对称轴, 并说明函数值 y 随自变量 x 的变化而变化的情况.

20. (10分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 是边 AD 的中点 AC 、 BE 相交于点 O . 设

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CB} = \vec{b}.$$

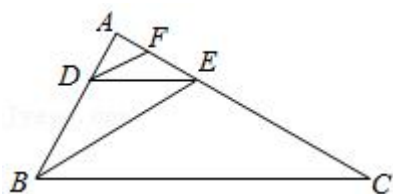
- (1) 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BO}$;
 - (2) 在图中作出 $\overrightarrow{CO}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 上的分向量, 并直接用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CO}$.
- (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并写明结论)



21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 点 E 、点 F 在边 AC 上, 且 $DE \parallel BC$, $\frac{AF}{FE} = \frac{AE}{EC}$.

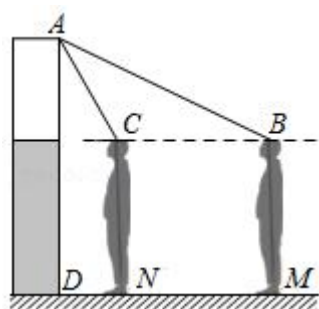
(1) 求证: $DF \parallel BE$;

(2) 如果 $AF = 2$, $EF = 4$, $AB = 6\sqrt{3}$, 求 $\frac{DE}{BE}$ 的值.



22. (10分) 某校为检测师生体温, 在校门安装了某型号的测温门, 如图为该“测温门”截面示意图.

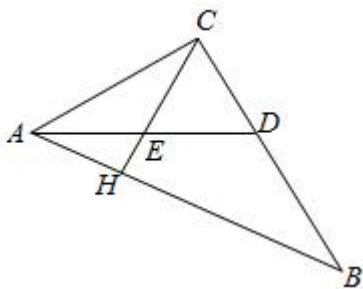
身高 1.6 米的小聪做了如下实验: 当他在地面 M 处时“测温门”开始显示额头温度, 此时在额头 B 处测得 A 的仰角为 30° ; 当他在地面 N 处时, “测温门”停止显示额头温度, 此时在额头 C 处测得 A 的仰角为 53° . 如果测得小聪的有效测温区间 MN 的长度是 0.98 米, 求测温门顶部 A 处距地面的高度约为多少米? (注: 额头到地面的距离以身高计, $\sin 53^\circ \approx 0.8$, $\cos 53^\circ \approx 0.6$, $\cot 53^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.73$.)



23. (12分) 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CH \perp AB$, 垂足为点 H . 点 D 在边 BC 上, 联结 AD , 交 CH 于点 E , 且 $CE = CD$.

(1) 求证: $\triangle ACE \sim \triangle ABD$;

(2) 求证: $\triangle ACD$ 的面积是 $\triangle ACE$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积的比例中项.



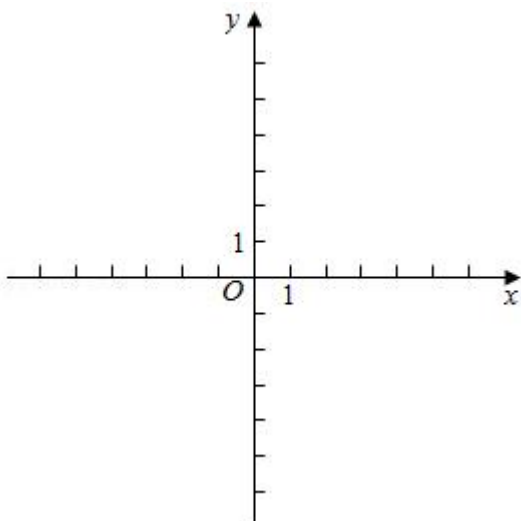
24. (12分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(-3, -6)$ 、 $B(6, 0)$, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 D 是抛物线上的点, 且位于线段 BC 上方, 联结 CD .

①如果点 D 的横坐标为 2, 求 $\cot \angle DCB$ 的值;

②如果 $\angle DCB = 2\angle CBO$, 求点 D 的坐标.



25. (14分) 已知, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 M 是边 AB 上的一个点 (与点 A 、 B 不重合), 联结 CM , 作 $\angle CMF = 90^\circ$, 且 MF 分别交边 AD 于点 E 、交边 CD 的延长线于点 F . 点 G 为线段 MF 的中点, 联结 DG .

(1) 如图 1, 如果 $AD = AM = 4$, 当点 E 与点 G 重合时, 求 $\triangle MFC$ 的面积;

(2) 如图 2, 如果 $AM = 2$, $BM = 4$. 当点 G 在矩形 $ABCD$ 内部时, 设 $AD = x$, $DG^2 = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 如果 $AM = 6$, $CD = 8$, $\angle F = \angle EDG$, 求线段 AD 的长. (直接写出计算结果)

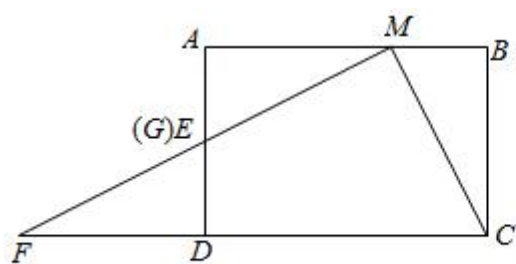


图1

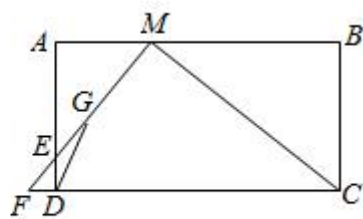


图2

2020-2021 学年上海市长宁区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1.（4 分）已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 50^\circ$ ， $AB = 10$ ，那么 BC 的长为（ ）

- A. $10\cos 50^\circ$ B. $10\sin 50^\circ$ C. $10\tan 50^\circ$ D. $10\cot 50^\circ$

【分析】根据直角三角形的边角关系可得结论.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because \cos B = \frac{BC}{AB}, \quad \angle B = 50^\circ, \quad AB = 10,$$

$$\therefore BC = AB \cdot \cos B = 10 \cdot \cos 50^\circ,$$

故选：A.

【点评】本题考查直角三角形的边角关系，选择合适的边角关系是得出正确答案的关键.

2.（4 分）下列命题中，说法正确的是（ ）

- A. 四条边对应成比例的两个四边形相似
B. 四个内角对应相等的两个四边形相似
C. 两边对应成比例且有一个角相等的两个三角形相似
D. 斜边与一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似

【分析】根据三角形相似和相似多边形的判定解答.

【解答】解：A、四个角对应相等，四条边对应成比例的两个四边形相似，原命题是假命题；

B、四个内角对应相等，四条边对应成比例的两个四边形相似，原命题是假命题；

C、两边对应成比例且其夹角相等的两个三角形相似，原命题是假命题；

D、斜边与一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似，是真命题；

故选：D.

【点评】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解三角形相似和相似多边形，难度不大.

3.（4 分）已知 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是两个单位向量，向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1$ ， $\vec{b} = -3\vec{e}_2$ ，那么下列结论正确的是（ ）

- A. $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ B. $\vec{a} = -\vec{b}$ C. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ D. $|\vec{a}| = -|\vec{b}|$

【分析】根据题意可以得到： $\vec{a}$ 与 $\vec{e}_1$ 方向相同， $\vec{b}$ 与 $\vec{e}_2$ 方向相同。

【解答】解：根据题意知， $\vec{a}$ 与 $\vec{e}_1$ 方向相同， $\vec{b}$ 与 $\vec{e}_2$ 方向相同。

A、当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反时， $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ ，故本选项不符合题意。

B、当 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是两个单位向量方向相同时， $\vec{a} = -\vec{b}$ ，故本选项不符合题意。

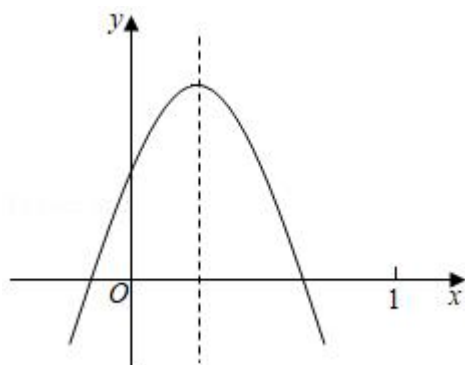
C、由向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1$ ， $\vec{b} = -3\vec{e}_2$ 知， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，故本选项符合题意。

D、由向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1$ ， $\vec{b} = -3\vec{e}_2$ 知， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，故本选项不符合题意。

故选：C。

【点评】本题主要考查了平面向量，注意：平面向量既有大小又有方向，平面向量的模只有大小，没有方向。

4. (4分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，那么 a 、 c 满足 ()



- A. $a > 0, c > 0$ B. $a > 0, c < 0$ C. $a < 0, c > 0$ D. $a < 0, c < 0$

【分析】根据抛物线开口方向以及与 y 轴的交点情况即可进行判断。

【解答】解： $\because$ 抛物线开口向下，

$\therefore a < 0$ ，

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴的上方，

$\therefore c > 0$ ，故选项 A、B、D 错误，选项 C 正确。

故选：C。

【点评】本题考查了二次函数图象与系数的关系：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，二次项系数 a 决定抛物线的开口方向。当 $a > 0$ 时，抛物线向上开口；当 $a < 0$ 时，抛物线向下开口；常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点：抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$ 。

5. (4分) 已知点 P 、点 Q 是线段 AB 的两个黄金分割点, 且 $AB = 10$, 那么 PQ 的长为 ()

- A. $5(3 - \sqrt{5})$ B. $10(\sqrt{5} - 2)$ C. $5(\sqrt{5} - 1)$ D. $5(\sqrt{5} + 1)$

【分析】先由黄金分割的比值求出 $BP = AQ = 5(\sqrt{5} - 1)$, 再由 $PQ = AQ + BP - AB$ 进行计算即可.

【解答】解: 如图, $\because$ 点 P 、 Q 是线段 AB 的黄金分割点, $AB = 10$,

$$\therefore BP = AQ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = 5(\sqrt{5}-1),$$

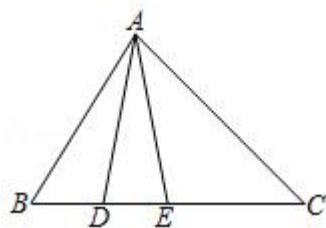
$$\therefore PQ = AQ + BP - AB = 10(\sqrt{5}-1) - 10 = 10(\sqrt{5}-2),$$

故选: B.



【点评】本题考查了黄金分割: 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC ($AC > BC$), 且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项 (即 $AB:AC = AC:BC$), 叫做把线段 AB 黄金分割, 点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点, 熟记黄金比是解题的关键.

6. (4分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、点 E 是边 BC 上的两点, 联结 AD 、 AE , 且 $AD = AE$, 如果 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$, 那么下列等式错误的是 ()



- A. $AB^2 = BE \cdot BC$ B. $CD \cdot AB = AD \cdot AC$
C. $AE^2 = CD \cdot BE$ D. $AB \cdot AC = BE \cdot CD$

【分析】根据相似三角形的性质, 由 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$ 得到 $AB:BC = BE:AB$, 则可对 A 选项进行判断; 由 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$ 得到 $\angle BAE = \angle C$, $\angle AEB = \angle BAC$, 则证明 $\triangle CAD \sim \triangle CBA$, 利用相似三角形的性质得 $CD:AC = AD:AB$, 则可对 B 选项进行判断; 证明 $\triangle CAD \sim \triangle ABE$ 得到 $AD:BE = CD:AE$, 加上 $AD = AE$, 则可对 C 选项进行判断; 利用 $\triangle CBA \sim \triangle ABE$ 得到 $AB \cdot AC = AE \cdot CB$, 由于 $AE^2 = CD \cdot BE$, $AE \neq CB$, 则可对 D 选项进行判断.

【解答】解: $\because \triangle ABE \sim \triangle CBA$,

$$\therefore AB:BC = BE:AB,$$

$$\therefore AB^2 = BE \cdot BC, \text{ 所以 A 选项的结论正确;}$$

$$\because \triangle ABE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle C, \angle AEB = \angle BAC,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED, \angle ACD = \angle BCA,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BAC,$$

$$\because \angle ADC = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore CD: AC = AD: AB,$$

即 $CD \cdot AB = AD \cdot AC$, 所以 B 选项的结论正确;

$$\because \triangle ABE \sim \triangle CBA, \triangle CAD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore AD: BE = CD: AE,$$

即 $AD \cdot AE = CD \cdot BE$,

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore AE^2 = CD \cdot BE, \text{ 所以 C 选项的结论正确;}$$

$$\because \triangle CBA \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore AC: AE = CB: AB,$$

$$\therefore AB \cdot AC = AE \cdot CB,$$

$$\because AE^2 = CD \cdot BE, AE \neq CB,$$

$$\therefore AB \cdot AC \neq BE \cdot CD, \text{ 所以 D 选项的结论不正确.}$$

故选: D.

【点评】 本题考查了相似三角形的性质: 相似三角形的对应角相等, 对应边的比相等;

相似三角形 (多边形) 的周长的比等于相似比. 也考查了相似三角形的判定.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{x-y}$ 的值为 -3.

【分析】 利用比例性质得到 $y = 2x$, 把 $y = 2x$ 代入 $\frac{x+y}{x-y}$, 然后进行分式的化简.

【解答】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore y = 2x,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{x+2x}{x-2x} = -\frac{3x}{x} = -3.$$

故答案为 -3.

【点评】 本题考查了比例的性质：灵活应用比例性质（内项之积等于外项之积、合比性质、分比性质、合分比性质、等比性质）进行计算.

8. (4分) 计算: $\frac{1}{2}(2\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

【分析】 先利用乘法结合律去括号, 然后计算加减法.

【解答】 解: 原式 $= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

故答案是: $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

【点评】 本题主要考查了平面向量, 实数的运算法则同样能应用于平面向量的计算.

9. (4分) 计算: $\sqrt{2}\cos 45^\circ + \sin^2 60^\circ = \frac{7}{4}$.

【分析】 将 $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入求解.

【解答】 解: 原式 $= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

故答案为: $\frac{7}{4}$.

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值, 解答本题的关键是熟记几个特殊角的三角函数值.

10. (4分) 如果两个相似三角形对应边上的中线之比为 5:4, 那么这两个三角形的周长之比为 5:4.

【分析】 根据相似三角形的性质可直接得出结论.

【解答】 解: $\because$ 两个相似三角形的对应中线的比为 5:4,

$\therefore$ 其相似比为 5:4,

$\therefore$ 这两个相似三角形的周长的比为 5:4,

故答案为: 5:4.

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质, 熟知相似三角形(多边形)的周长的比等于相似比是解答此题的关键.

11. (4分) 将抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 向下平移 3 个单位后, 所得抛物线的表达式是 $y = 2x^2 - 4$.

【分析】 先确定抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的顶点坐标为 (0, -1), 再根据点平移的规律得到点

(0, -1) 平移后所得对应点的坐标为 (0, -4), 然后利用顶点式写出平移后的抛物线的表达式.

【解答】解: 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的顶点坐标为 (0, -1), 点 (0, -1) 向下平移 3 个单位后所得对应点的坐标为 (0, -4), 所以平移后的抛物线的表达式是 $y = 2x^2 - 4$.

故答案为 $y = 2x^2 - 4$.

【点评】 本题考查了二次函数与几何变换: 由于抛物线平移后的形状不变, 故 a 不变, 所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法: 一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标, 利用待定系数法求出解析式; 二是只考虑平移后的顶点坐标, 即可求出解析式.

12. (4 分) 一辆汽车沿着坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$ 的斜坡向下行驶 50 米, 那么它距离地面的垂直高度下降了 25 米.

【分析】 设出垂直高度, 表示出水平距离, 利用勾股定理求解即可.

【解答】 解: $\because$ 坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$,

$\therefore$ 设垂直高度下降了 x 米, 则水平前进了 $\sqrt{3}x$ 米.

根据勾股定理可得: $x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 50^2$.

解得 $x = 25$ (负值舍去),

即它距离地面的垂直高度下降了 25 米.

故答案为: 25.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 解决本题的关键是掌握坡度坡角定义.

13. (4 分) 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 和 $B(2, y_2)$, 比较 y_1 与 y_2 的大小: y_1 > y_2 (选择 “>” 或 “<” 或 “=” 填入空格).

【分析】 把点 A 、 B 的坐标分别代入已知抛物线解析式, 并分别求得 y_1 与 y_2 的值, 然后比较它们的大小.

【解答】 解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 和 $B(2, y_2)$,

$\therefore y_1 = (-1)^2 - 2 \times (-1) + c = 3 + c$, $y_2 = 2^2 - 2 \times 2 + c = c$,

$\therefore y_1 - y_2 = 3 > 0$,

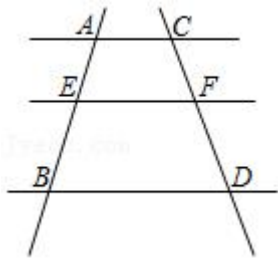
$\therefore y_1 > y_2$,

故答案是: >.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征. 抛物线上的点关于对称轴对称, 且

都满足函数关系式.

14. (4分) 如图, 已知 $AC \parallel EF \parallel BD$. 如果 $AE:EB = 2:3$, $CF = 6$. 那么 CD 的长等于 15.



【分析】根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} = \frac{2}{3}$, 这样可求出 FD 的长, 然后

计算 $CF+FD$ 即可.

【解答】解: $\because AC \parallel EF \parallel BD$,

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore FD = \frac{3}{2}CF = \frac{3}{2} \times 6 = 9,$$

$$\therefore CD = CF + FD = 6 + 9 = 15.$$

故答案为 15.

【点评】本题考查了平行线分线段成比例: 三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例.

15. (4分) 已知, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的部分对应值如下表, 则 $f(-3) =$ 12.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

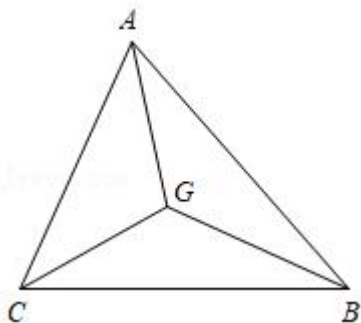
【分析】根据二次函数的对称性结合图表数据可知, $x = -3$ 时的函数值与 $x = 5$ 时的函数值相同.

【解答】解: 由图可知, $f(-3) = f(5) = 12$.

故答案为: 12.

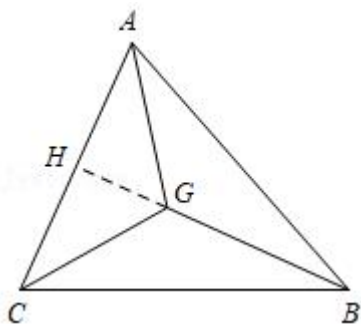
【点评】本题考查了二次函数的性质, 主要利用了二次函数的对称性, 理解图表并准确获取信息是解题的关键.

16. (4分) 如图, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 如果 $AG = CG$, $BG = 2$, $AC = 4$, 那么 AB 的长等于 $\sqrt{13}$.



【分析】根据题意画出图形，延长 BG 交 AC 于点 H ，由等腰三角形的性质可得出 $BH \perp AC$ ，由重心的性质可得 GH 的长，最后由勾股定理求出 AB 的长即可。

【解答】解：如图所示：延长 BG 交 AC 于点 H ，



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心， $AC = 4$ ，

$\therefore AH = CH = 2$ ，

$\because AG = CG$ ，

$\therefore BH \perp AH$ ，

$\therefore \angle AHB = 90^\circ$ ，

$\because BG = 2$ ，

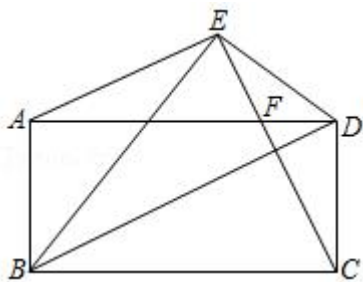
$\therefore GH = 1$ ，

由勾股定理得： $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ 。

故答案为： $\sqrt{13}$ 。

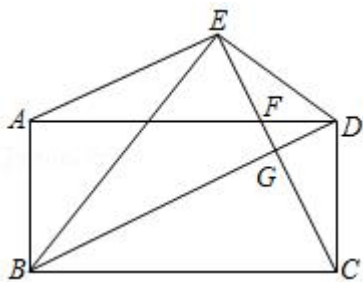
【点评】本题考查的是三角形的重心和等腰三角形的性质，熟知重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1 是解答此题的关键。

17. (4 分) 如图，矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 翻折后，点 C 落在点 E 处。联结 CE 交边 AD 于点 F 。如果 $DF = 1$ ， $BC = 4$ ，那么 AE 的长等于 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 。



【分析】首先根据题意得到 $EG = CG$, $CE \perp BD$, 证明 $\triangle CDF \sim \triangle BCD$ 和 $\triangle CDG \sim \triangle BDC$, 可计算 CD 和 CG 的长, 再证明 $\triangle EFD \sim \triangle AED$, 可得 AE 的长.

【解答】解: 由折叠得: $CE \perp BD$, $CG = EG$,



$$\therefore \angle DGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFG + \angle FDG = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG + \angle CDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle DFG,$$

$$\because \angle CDF = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DF}{CD},$$

$$\because AB = 4, DF = 1,$$

$$\therefore \frac{CD}{4} = \frac{1}{CD},$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\text{由勾股定理得: } CF = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

同理得: $\triangle CDG \sim \triangle BDC$,

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CG}{BC},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{CG}{4}, \\
&\therefore CG = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore CE = 2CG = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore EF = CE - CF = \frac{8\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore \frac{DF}{ED} = \frac{1}{2}, \frac{ED}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 且 } \angle EDF = \angle AED, \\
&\therefore \triangle EFD \sim \triangle AED, \\
&\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{DF}{DE}, \text{ 即 } \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{AE} = \frac{1}{2}, \\
&\therefore AE = \frac{6\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

【点评】 本题主要考查了几何变换中的翻折变换、相似三角形的性质和判定、矩形的性质、勾股定理；熟练掌握翻折变换和矩形的性质，利用相似三角形列比例式是本题的关键.

18. (4分) 如果一条对角线把凸四边形分成两个相似的三角形，那么我们把这条对角线叫做这个凸四边形的相似对角线，在凸四边形 $ABCD$ 中， $AB = AC = \sqrt{3}$ ， $AD = CD = \frac{3}{2}$ ，点 E 、点 F 分别是边 AD ，边 BC 上的中点. 如果 AC 是凸四边形 $ABCD$ 的相似对角线，那么 EF 的长等于 $\frac{\sqrt{41}}{4}$.

【分析】 利用相似三角形的性质求出 BC 长，再利用等腰三角形的性质和勾股定理计算出 EF 的长即可.

【解答】 解：如图所示：

$$\because AB = AC, AD = CD, \triangle ABC \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore AC^2 = BC \cdot AD,$$

$$\because AC = \sqrt{3}, AD = \frac{3}{2},$$

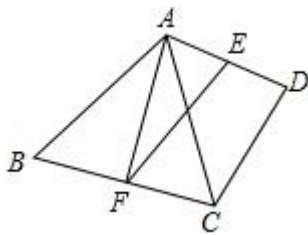
$$\therefore CB = 2,$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CAD,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore CB \parallel AD, \\
&\because AB = AC, F \text{ 为 } BC \text{ 中点}, \\
&\therefore AF \perp CB, BF = CF = 1, \\
&\therefore \angle AFC = 90^\circ, \\
&\because CB \parallel AD, \\
&\therefore \angle FAE = \angle AFC = 90^\circ, \\
&\because AC = \sqrt{3}, \\
&\therefore AF = \sqrt{2}, \\
&\because AD = \frac{3}{2}, E \text{ 为 } AD \text{ 中点}, \\
&\therefore AE = \frac{3}{4}, \\
&\therefore EF = \sqrt{AF^2 + AE^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{4}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{41}}{4}$.



【点评】此题主要考查了相似三角形的性质，以及等腰三角形的性质和勾股定理，关键是掌握相似三角形对应边成比例、对应角相等．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）[将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上]

19.（10 分）已知二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{2}$.

- （1）用配方法把该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式；
- （2）写出该二次函数图象的开口方向、顶点坐标和对称轴，并说明函数值 y 随自变量 x 的变化而变化的情况．

【分析】（1）直接利用配方法进而将二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式；

（2）根据二次函数的二次项系数判断该函数图象的开口方向，由二次函数的顶点式关系式找出其顶点坐标、对称轴，由二次函数的单调性来判断 y 随自变量 x 的变化而变化的情况．

$$\begin{aligned}
 \text{【解答】解: (1) } y &= -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{2} + \frac{7}{2}, \\
 &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4;
 \end{aligned}$$

$$(2) \because a = -\frac{1}{2} < 0,$$

$\therefore$ 二次函数图象的开口向下,

顶点坐标为 $(-1, 4)$,

对称轴为直线 $x = -1$, 图象在直线 $x = -1$ 左侧, y 随 x 的增大而增大, 在直线 $x = -1$ 右侧, y 随 x 的增大而减小.

【点评】 本题主要考查的是二次函数的一般式与顶点式的转化方法, 及二次函数的性质.

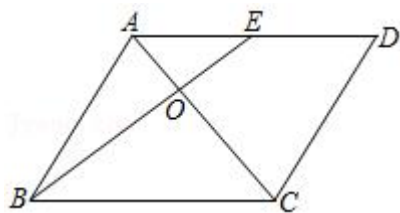
20. (10 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 是边 AD 的中点 AC 、 BE 相交于点 O . 设

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CB} = \vec{b}.$$

(1) 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BO}$;

(2) 在图中作出 $\overrightarrow{CO}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 上的分向量, 并直接用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CO}$.

(不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并写明结论)



【分析】 (1) 首先证明 $BO = \frac{2}{3}BE$, 求出 $\overrightarrow{BE}$ 即可解决问题.

(2) 证明 $OC = \frac{2}{3}AC$, 求出 $\overrightarrow{CA}$ 即可解决问题.

【解答】 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC,$$

$$\because AE = EC,$$

$$\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BO = \frac{2}{3}BE,$$

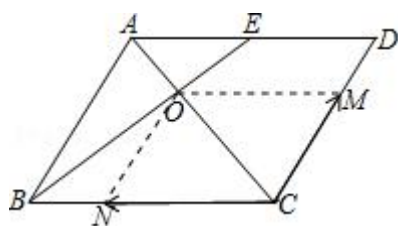
$$\therefore \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3} (\vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}) = \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}.$$

(2) $\because AE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{CO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3} (\vec{b} + \vec{a}) = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}.$$

如图, $\overrightarrow{CO}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 上的分向量分别为 $\overrightarrow{CN}$ 和 $\overrightarrow{CM}$.

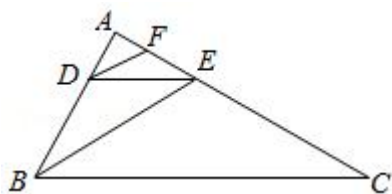


【点评】 本题考查作图 - 复杂作图, 平行四边形的性质, 平面向量等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 点 E 、点 F 在边 AC 上, 且 $DE \parallel BC$, $\frac{AF}{FE} = \frac{AE}{EC}$.

(1) 求证: $DF \parallel BE$;

(2) 如果 $AF = 2$, $EF = 4$, $AB = 6\sqrt{3}$, 求 $\frac{DE}{BE}$ 的值.



【分析】 (1) 先由平行线分线段成比例定理得 $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD}$, 再证 $\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FE}$, 即可得出结论;

(2) 先证 $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AE}$, 再证 $\triangle ADE \sim \triangle AEB$, 即可得出答案.

【解答】 (1) 证明: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore \frac{AF}{FE} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FE},$$

$$\therefore DF \parallel BE;$$

$$(2) \text{ 解: } \because AF = 2, EF = 4,$$

$$\therefore AE = AF + EF = 6, \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AD = \frac{1}{3}AB = 2\sqrt{3}, BD = 2AD = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AE},$$

$$\text{又 } \because \angle A = \angle A,$$

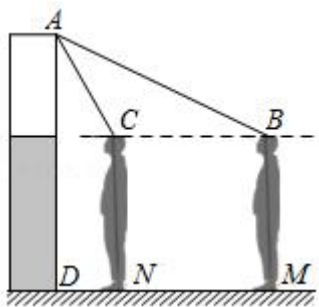
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AEB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、平行线分线段成比例等知识熟练掌握平行线分线段成比例定理，证明三角形相似是解题的关键。

22. (10分) 某校为检测师生体温，在校门安装了某型号的测温门，如图为该“测温门”截面示意图。

身高 1.6 米的小聪做了如下实验：当他在地面 M 处时“测温门”开始显示额头温度，此时在额头 B 处测得 A 的仰角为 30° ；当他在地面 N 处时，“测温门”停止显示额头温度，此时在额头 C 处测得 A 的仰角为 53° 。如果测得小聪的有效测温区间 MN 的长度是 0.98 米，求测温门顶部 A 处距地面的高度约为多少米？（注：额头到地面的距离以身高计， $\sin 53^\circ \approx 0.8$ ， $\cos 53^\circ = 0.6$ ， $\cot 53^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ 。）



【分析】 延长 BC 交 AD 于点 E ，构造直角 $\triangle ABE$ 和矩形 $EDNB$ ，设 $AE = x$ 米。通过解直角三角形分别表示出 BE 、 CE 的长度，根据 $BC = BE - CE$ 得到 $1.73x - 0.75x = 0.98$ ，解得

即可求得 AE 进而即可求得.

【解答】解：延长 BC 交 AD 于点 E ，设 $AE = x$ 米.

$$\because \tan 53^\circ = \frac{AE}{CE}, \tan 30^\circ = \frac{AE}{BE},$$

$$\therefore CE = \frac{x}{\tan 53^\circ} \approx 0.75x, BE = \frac{x}{\tan 30^\circ} \approx 1.73x,$$

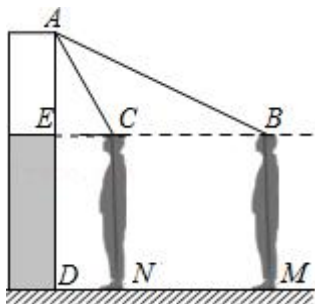
$$\therefore BC = BE - CE = 1.73x - 0.75x = 0.98.$$

解得 $x = 1$,

$$\therefore AE = 1,$$

$$\therefore AD = AE + ED = 1 + 1.6 = 2.6 \text{ (米)}.$$

答：测温门顶部 A 处距地面的高度约为 2.6 米.

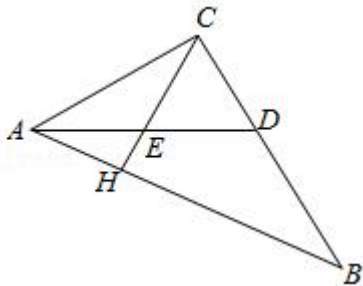


【点评】本题主要考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

23. (12分) 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CH \perp AB$ ，垂足为点 H . 点 D 在边 BC 上，联结 AD ，交 CH 于点 E ，且 $CE = CD$.

(1) 求证： $\triangle ACE \sim \triangle ABD$;

(2) 求证： $\triangle ACD$ 的面积是 $\triangle ACE$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积的比例中项.



【分析】(1) 根据同角的余角相等得到 $\angle ACH = \angle CBH$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle CED = \angle CDE$ ，进而得到 $\angle AEC = \angle ADB$ ，根据相似三角形的判定定理证明结论；

(2) 过点 B 作 $BG \parallel AC$ 交 AD 的延长线于点 G ，根据相似三角形的性质得到 $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CD}$,

根据相似三角形的面积公式计算，证明结论.

【解答】证明：（1） $\because AC \perp BC, CH \perp AB$,

$$\therefore \angle ACB = \angle AHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle CBH,$$

$$\because CE = CD,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABD;$$

（2）过点 B 作 $BG \parallel AC$ 交 AD 的延长线于点 G ,

$$\therefore \angle CAD = \angle G,$$

$$\because \triangle ACE \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}, \quad \angle CAD = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle G,$$

$$\therefore AB = BG,$$

$$\because BG \parallel AC,$$

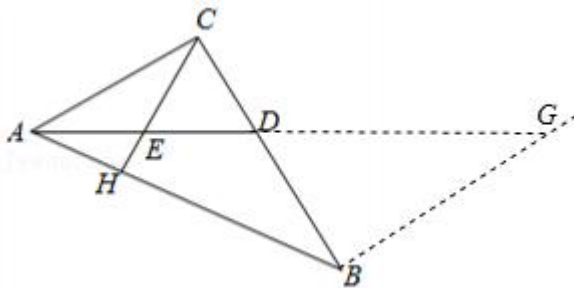
$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle GDB,$$

$$\therefore \frac{BG}{AC} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}},$$

$\therefore \triangle ACD$ 的面积是 $\triangle ACE$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积的比例中项.



【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

24. (12分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(-3, -6)$ 、 B

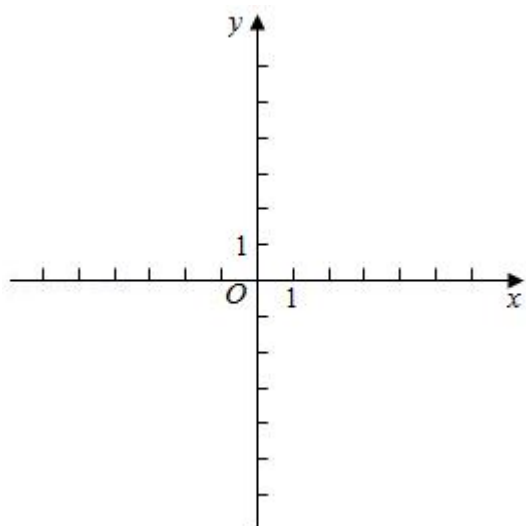
(6, 0), 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 D 是抛物线上的点, 且位于线段 BC 上方, 联结 CD .

①如果点 D 的横坐标为 2. 求 $\cot \angle DCB$ 的值;

②如果 $\angle DCB = 2\angle CBO$, 求点 D 的坐标.



【分析】(1) 将点 A, B 坐标代入抛物线解析式中, 解方程组, 即可得出结论;

(2) ①先求出点 D 坐标, 进而求出 BC, CD, DB , 判断出 $\triangle BDC$ 是直角三角形, 即可得出结论;

②构造出等腰三角形, 利用对称性求出点 F 的坐标, 进而求出直线 CF 的解析式, 进而联立抛物线解析式, 解方程组, 即可得出结论.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(-3, -6), B(6, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 9a - 3b + 2 = -6 \\ 36a + 6b + 2 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$;

(2) ①如图 1,

由 (1) 知, 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$,

$$\therefore C(0, 2), \text{ 当 } x=2 \text{ 时, } y = -\frac{1}{3} \times 4 + \frac{5}{3} \times 2 + 2 = 4,$$

$$\therefore D(2, 4),$$

$$\therefore B(6, 0),$$

$$\therefore CD^2 = (2-0)^2 + (4-2)^2 = 8, \quad BC^2 = (6-0)^2 + (0-2)^2 = 40,$$

$$DB^2 = (6-2)^2 + (0-4)^2 = 32,$$

$$\therefore CD^2 + BC^2 = DB^2,$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 是直角三角形, } \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDC \text{ 中, } CD = 2\sqrt{2}, \quad BD = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \cot \angle DCB = \frac{CD}{DB} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

②如图 2,

过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴, 则 $\angle BCE = \angle CBO$,

$$\therefore \angle DCB = 2\angle CBO,$$

$\therefore \angle DCE = \angle BCE$, 过点 B 作 $BE \perp CE$, 并延长交 CD 的延长线于 F ,

$$\therefore C(0, 2), \quad B(6, 0),$$

$$\therefore F(6, 4), \text{ 设直线 } CF \text{ 的解析式为 } y = kx + 2,$$

$$\therefore 6k + 2 = 4,$$

$$\therefore k = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } CF \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{3}x + 2 \text{ ①},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2 \text{ ②},$$

$$\text{联立①②, 解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{10}{3} \end{cases},$$

$$\therefore D\left(4, \frac{10}{3}\right).$$

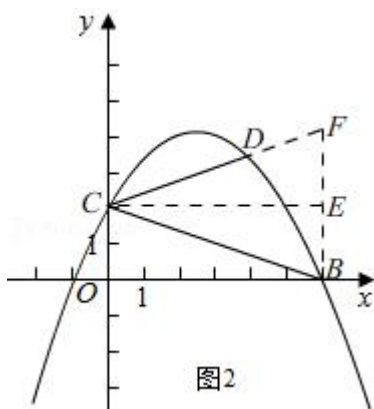


图2

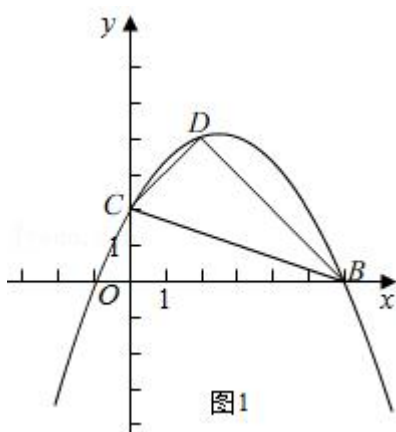


图1

【点评】此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，勾股定理的逆定理，等腰三角形的性质，构造出等腰三角形是解本题的关键。

25. (14分) 已知，在矩形 $ABCD$ 中，点 M 是边 AB 上的一个点（与点 A 、 B 不重合），联结 CM ，作 $\angle CMF = 90^\circ$ ，且 MF 分别交边 AD 于点 E 、交边 CD 的延长线于点 F 。点 G 为线段 MF 的中点，联结 DG 。

(1) 如图 1，如果 $AD = AM = 4$ ，当点 E 与点 G 重合时，求 $\triangle MFC$ 的面积；

(2) 如图 2，如果 $AM = 2$ ， $BM = 4$ 。当点 G 在矩形 $ABCD$ 内部时，设 $AD = x$ ， $DG^2 = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

(3) 如果 $AM = 6$ ， $CD = 8$ ， $\angle F = \angle EDG$ ，求线段 AD 的长。（直接写出计算结果）

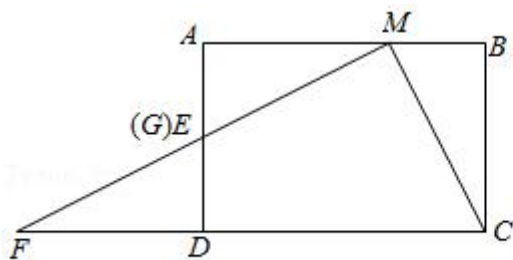


图1

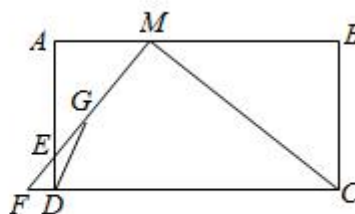


图2

【分析】(1) 由“ AAS ”可证 $\triangle AGM \cong \triangle DGF$ ，可得 $AM = DF = 4$ ， $AG = GD = \frac{1}{2}AD = 2$ ，

由勾股定理可求 GF 的长，由锐角三角函数可求 MC 的长，即可求解；

(2) 过点 M 作 $MH \perp CD$ 于 H ，过点 G 作 $GP \perp CD$ 于 P ，通过证明 $\triangle FHM \sim \triangle MHC$ ，可得 $\frac{FH}{MH} = \frac{MH}{HC}$ ，可求 $FH = \frac{x^2}{4}$ ， $PH = \frac{x^2}{8}$ ， $DP = 2 - \frac{x^2}{8}$ ， $GP = \frac{1}{2}x$ ，由勾股定理可求解；

(3) 分两种情况讨论，通过全等三角形的性质和相似三角形的性质可求解。

【解答】解：(1) $\because$ 点 G 为线段 MF 的中点，

$$\therefore GF = MG,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle FDG = 90^\circ, \angle AGM = \angle FGD,$$

$$\therefore \triangle AGM \cong \triangle DGF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AM = DF = 4, AG = GD = \frac{1}{2}AD = 2,$$

$$\therefore GF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore FM = 2GF = 4\sqrt{5},$$

$$\because \tan F = \frac{ED}{DF} = \frac{MC}{FM},$$

$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{MC}{4\sqrt{5}},$$

$$\therefore MC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle MFC} = \frac{1}{2} \times FM \times MC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20;$$

(2) 过点 M 作 $MH \perp CD$ 于 H ，过点 G 作 $GP \perp CD$ 于 P ，

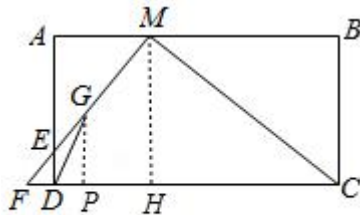


图2

$$\therefore GP \parallel MH, MH = AD = x,$$

$$\therefore \frac{GP}{HM} = \frac{FG}{FM} = \frac{FP}{FH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore GP = \frac{1}{2}MH = \frac{1}{2}x, FP = \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2}FH,$$

$$\because \angle CMF = 90^\circ = \angle FHM = \angle CHM,$$

$$\therefore \angle F + \angle FCM = 90^\circ = \angle F + \angle FMH = \angle FCM + \angle CMH,$$

$$\therefore \angle F = \angle CMH, \angle FCM = \angle CMH,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle FHM \sim \triangle MHC, \\
&\therefore \frac{FH}{MH} = \frac{MH}{HC}, \\
&\therefore MH^2 = FH \cdot HC, \\
&\therefore FH = \frac{x^2}{4}, \\
&\therefore PH = \frac{x^2}{8}, \\
&\therefore DP = 2 - \frac{x^2}{8}, \quad GP = \frac{1}{2}x, \\
&\therefore DG^2 = DP^2 + GP^2, \\
&\therefore y = \frac{x^4}{64} - \frac{x^2}{4} + 4 \quad (2\sqrt{2} < x < 4);
\end{aligned}$$

(3) 如图 3, 当点 G 在矩形的内部时, 延长 DG 交 AB 于 J , 连接 AG , AF ,

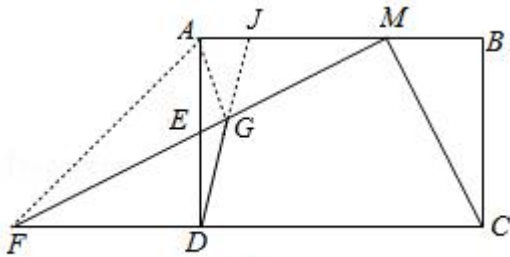


图3

$$\begin{aligned}
&\because \angle FMC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AME + \angle CMB = 90^\circ = \angle CMB + \angle BCM, \\
&\therefore \angle AME = \angle MCB, \\
&\because \angle EDG = \angle EFD = \angle AME = \angle MCB, \quad AD = BC, \quad \angle DAJ = \angle B = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle ADJ \cong \triangle BCM \quad (ASA), \\
&\therefore AJ = BM = 2, \\
&\therefore JM = 4, \\
&\because AB \parallel CD, \\
&\therefore \frac{MJ}{DF} = \frac{GJ}{DG} = \frac{MG}{FG} = 1, \\
&\therefore MJ = FD = 4, \quad GJ = DG, \\
&\therefore AG = DG = GJ, \\
&\therefore \angle GAD = \angle GDA = \angle GFD, \\
&\text{又} \because \angle AEG = \angle FED,
\end{aligned}$$

$$\therefore \angle AGE = \angle FDE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because FG = GM,$$

$$\therefore AF = AM = 6,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AF^2 - FD^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5},$$

当点 G 在矩形的外部时，延长 DG 交 BA 的延长线于 L ，连接 DM ，

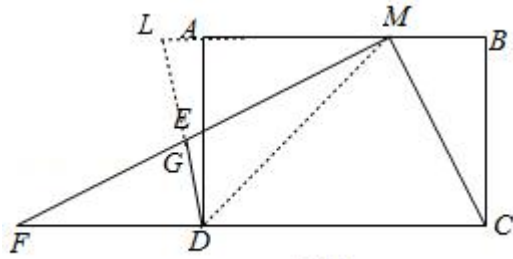


图4

同理可求 $AD = 2\sqrt{7}$ ，

综上所述： $AD = 2\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{7}$ ．

【点评】 本题是四边形综合题，考查了全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，勾股定理等知识，添加恰当辅助线是解题的关键．