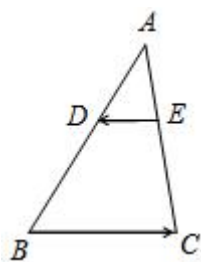


2020-2021 学年上海市金山区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 已知二次函数 $y = (x - 2)^2 - 1$ ，那么该二次函数图象的对称轴是（ ）
- A. 直线 $x = 2$ B. 直线 $x = -2$ C. 直线 $x = 1$ D. 直线 $x = -1$
2. 下列各点在抛物线 $y = 2x^2$ 上的是（ ）
- A. (2, 2) B. (2, 4) C. (2, 8) D. (2, 16)
3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么锐角 A 的正弦等于（ ）
- A. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}$
B. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$
C. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$
D. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}$
4. 若 α 是锐角， $\sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么锐角 α 等于（ ）
- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°
5. 如图，已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $BD = 3$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，那么 $\overrightarrow{ED}$ 等于（ ）



- A. $\frac{2}{3}\vec{a}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a}$ C. $\frac{2}{5}\vec{a}$ D. $-\frac{2}{5}\vec{a}$
6. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有公共点，那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是（ ）



- A. $0 \leq r \leq \frac{12}{5}$ B. $\frac{12}{5} \leq r \leq 3$ C. $\frac{12}{5} \leq r \leq 4$ D. $3 \leq r \leq 4$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. 计算： $\vec{a} + 2\left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) =$ _____.

8. 已知 $f(x) = x^2 + 3x$ ，那么 $f(-2) =$ _____.

9. 抛物线 $y = -2x^2$ 沿着 x 轴正方向看，在 y 轴的左侧部分是_____。（填“上升”或“下降”）

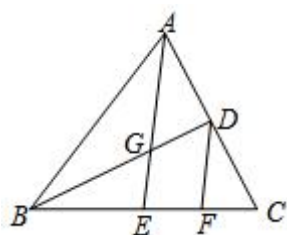
10. 正十边形的中心角等于_____度.

11. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为 3 和 4，若 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切，那么圆心距 O_1O_2 的长等于_____.

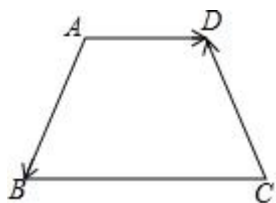
12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 15$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ，那么 $BC =$ _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB:AC:BC = 1:2:\sqrt{5}$ ，那么 $\tan B =$ _____.

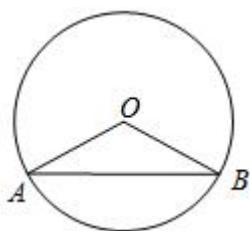
14. 已知：如图， $\triangle ABC$ 的中线 AE 与 BD 交于点 G ， $DF \parallel AE$ 交 BC 于 F ，那么 $\frac{DF}{AG} =$ _____.



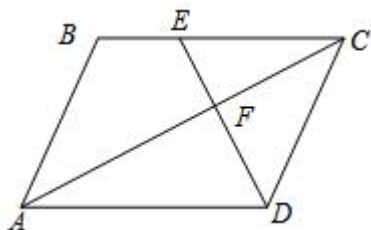
15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{CD}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



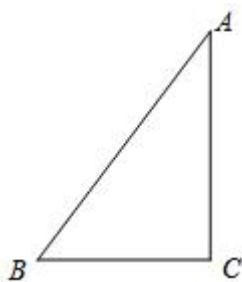
16. 如图，已知 $\odot O$ 中， $\angle AOB = 120^\circ$ ，弦 $AB = 18$ ，那么 $\odot O$ 的半径长等于_____.



17. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上， DE 交对角线 AC 于 F ，若 $CE = 2BE$ ， $\triangle ABC$ 的面积等于 15，那么 $\triangle FEC$ 的面积等于_____.

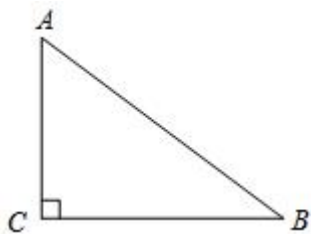


18. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AC = 2$ ，以点 C 为直角顶点的 $\text{Rt}\triangle DCE$ 的顶点 D 在 BA 的延长线上， DE 交 CA 的延长线于点 G ，若 $\tan \angle CED = \frac{1}{2}$ ， $CE = GE$ ，那么 BD 的长等于_____.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

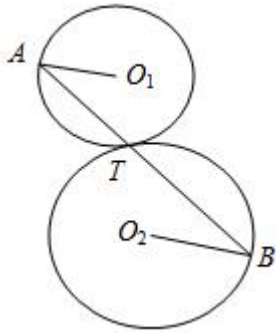
19. (10 分) 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$. 求： $\tan B \sin A + |1 - \cos B| + \frac{\tan A}{4 \tan^2 30^\circ}$ 的值.



20. (10 分) 已知：如图， $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T ，经过点 T 的直线与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分别相交于点 A 和点 B .

(1) 求证： $O_1A \parallel O_2B$;

(2) 若 $O_1A = 2$ ， $O_2B = 3$ ， $AB = 7$ ，求 AT 的长.



21. (10分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$.

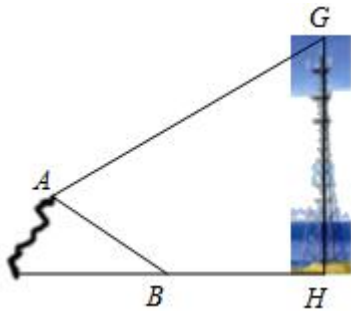
(1) 求抛物线的表达式;

(2) 把表达式化成 $y = -2(x+m)^2 + k$ 的形式, 并写出顶点坐标与对称轴.

22. (10分) 如图, 在距某输电铁塔 GH (GH 垂直地面) 的底部点 H 左侧水平距离 60 米的点 B 处有一个山坡, 山坡 AB 的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$, 山坡坡底点 B 到坡顶 A 的距离 AB 等于 40 米, 在坡顶 A 处测得铁塔顶点 G 的仰角为 30° (铁塔 GH 与山坡 AB 在同一平面内).

(1) 求山坡的高度;

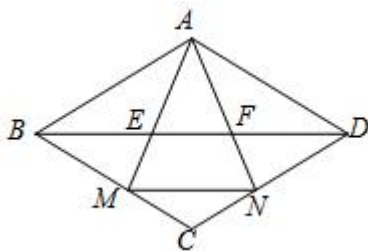
(2) 求铁塔的高度 GH . (结果保留根号)



23. (12分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上, 联结 AM 、 AN 交对角线 BD 于 E 、 F 两点, 且 $\angle MAN = \angle ABD$.

(1) 求证: $AB^2 = BF \cdot DE$;

(2) 若 $\frac{BE}{DE} = \frac{DN}{DC}$, 求证: $EF \parallel MN$.

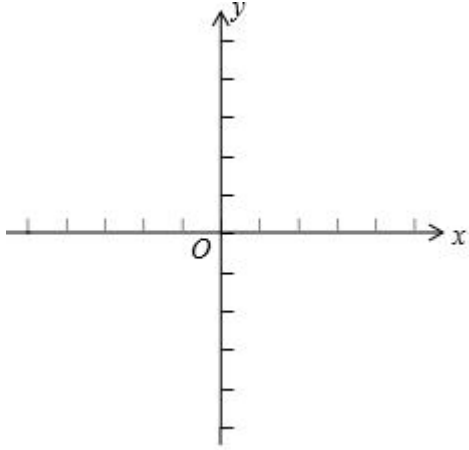


24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 2$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 相交于点 A , 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 经过点 A .

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 向上平移两个单位后, 经过点 $(1, -2)$, 求抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式;

(3) 若抛物线 $y = a'x^2 + b'x + c$ ($a' < 0$) 与 $y = ax^2 + bx - 1$ 关于 x 轴对称, 且这两条抛物线的顶点分别是点 P' 与点 P , 当 $S_{\triangle OPP'} = 3$ 时, 求抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式.



25. (14 分) 定理: 一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半. 如图 1, $\angle A = \frac{1}{2} \angle O$.

已知: 如图 2, AC 是 $\odot O$ 的一条弦, 点 D 在 $\odot O$ 上 (与 A 、 C 不重合), 联结 DE 交射线 AO 于点 E , 联结 OD , $\odot O$ 的半径为 5, $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$.

(1) 求弦 AC 的长.

(2) 当点 E 在线段 OA 上时, 若 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似, 求 $\angle DCA$ 的正切值.

(3) 当 $OE = 1$ 时, 求点 A 与点 D 之间的距离 (直接写出答案).

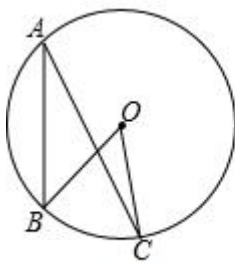


图1

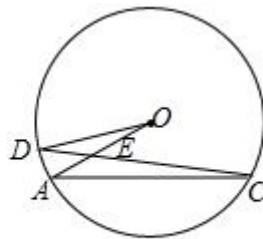
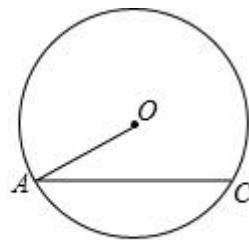


图2



备用图

2020-2021 学年上海市金山区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上．】

1. 已知二次函数 $y = (x - 2)^2 - 1$ ，那么该二次函数图象的对称轴是（ ）

- A. 直线 $x = 2$ B. 直线 $x = -2$ C. 直线 $x = 1$ D. 直线 $x = -1$

【分析】根据抛物线的顶点式，可求抛物线的对称轴．

【解答】解：∵ $y = (x - 2)^2 - 1$ ，

∴ 对称轴是：直线 $x = 2$ ．

故选：A．

2. 下列各点在抛物线 $y = 2x^2$ 上的是（ ）

- A. (2, 2) B. (2, 4) C. (2, 8) D. (2, 16)

【分析】把 $x = 2$ 代入抛物线解析式中，求得函数值，即可判断．

【解答】解：把 $x = 2$ 代入 $y = 2x^2$ 得 $y = 2 \times 2^2 = 8$ ，

故点 (2, 8) 在抛物线上．

故选：C．

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么锐角 A 的正弦等于（ ）

- A. $\frac{\text{锐角} A \text{ 的对边}}{\text{锐角} A \text{ 的邻边}}$
B. $\frac{\text{锐角} A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$
C. $\frac{\text{锐角} A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$
D. $\frac{\text{锐角} A \text{ 的邻边}}{\text{锐角} A \text{ 的对边}}$

【分析】根据锐角三角函数的定义得出答案即可．

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，锐角 A 的正弦表示的是锐角 A 的对边与斜边的比，即： $\frac{\text{锐角} A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$ ，

故选：B．

4. 若 α 是锐角， $\sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么锐角 α 等于（ ）

A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

【分析】根据特殊锐角三角函数值先得出 $\alpha+15^\circ$ ，再求出 α 即可.

【解答】解： $\because \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

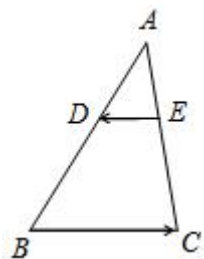
$$\therefore \alpha + 15^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

故选：B.

5. 如图，已知点D、E分别在 $\triangle ABC$ 的边AB、AC上， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $BD = 3$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，

那么 $\overrightarrow{ED}$ 等于（ ）



A. $\frac{2}{3}\vec{a}$

B. $-\frac{2}{3}\vec{a}$

C. $\frac{2}{5}\vec{a}$

D. $-\frac{2}{5}\vec{a}$

【分析】利用平行线分线段成比例定理，求解即可.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{2+3},$$

$$\therefore DE = \frac{2}{5}BC,$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{5}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = -\frac{2}{5}\vec{a},$$

故选：D.

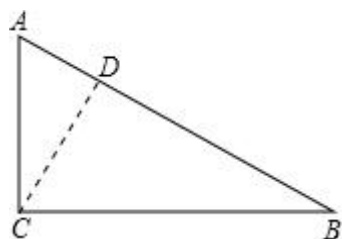
6. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，如果以点C为圆心的圆与斜边AB有公共点，那么 $\odot C$ 的半径r的取值范围是（ ）



- A. $0 \leq r \leq \frac{12}{5}$ B. $\frac{12}{5} \leq r \leq 3$ C. $\frac{12}{5} \leq r \leq 4$ D. $3 \leq r \leq 4$

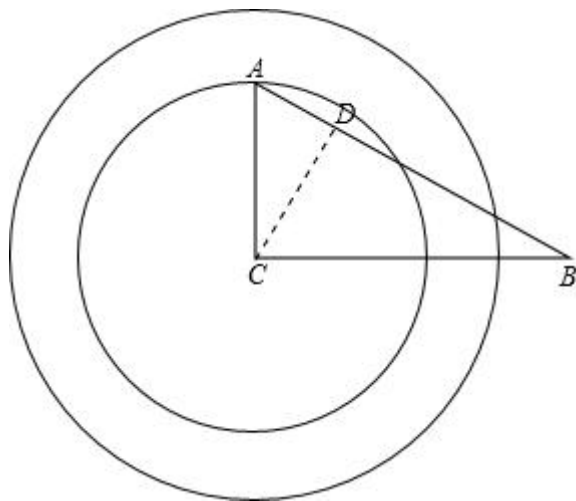
【分析】根据直线与圆的位置关系得出相切时有一交点，再结合图形得出另一种有一个交点的情况，即可得出答案．

【解答】解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，



$\because AC = 3, BC = 4$. 如果以点 C 为圆心, r 为半径的圆与斜边 AB 只有一个公共点,

$\therefore AB = 5$,



当直线与圆相切时, $d = r$, 圆与斜边 AB 只有一个公共点, 圆与斜边 AB 只有一个公共点,

$\therefore CD \times AB = AC \times BC$,

$\therefore CD = r = \frac{12}{5}$,

当直线与圆如图所示也可以有交点,

$\therefore \frac{12}{5} \leq r \leq 4$.

故选: C.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. 计算： $\vec{a} + 2\left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \underline{4\vec{a} - 2\vec{b}}$.

【分析】先利用乘法结合律去括号，然后计算加减法.

【解答】解：原式 $= \vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{b} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$.

故答案是： $4\vec{a} - 2\vec{b}$.

8. 已知 $f(x) = x^2 + 3x$ ，那么 $f(-2) = \underline{-2}$.

【分析】计算自变量为 -2 对应的函数值即可.

【解答】解：把 $x = -2$ 代入 $f(x) = x^2 + 3x$ 得 $f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) = 4 - 6 = -2$.

故答案为： -2 .

9. 抛物线 $y = -2x^2$ 沿着 x 轴正方向看，在 y 轴的左侧部分是 上升.（填“上升”或“下降”）

【分析】根据二次函数的性质解答即可.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = -2x^2$ 的开口向下，对称轴为 y 轴，

$\therefore$ 在对称轴左侧 y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 抛物线 $y = -2x^2$ 在 y 轴左侧的部分是上升的，

故答案为：上升.

10. 正十边形的中心角等于 36 度.

【分析】根据正多边形的圆心角定义可知：正 n 边形的圆中心角为： $\frac{360^\circ}{n}$ ，则代入求解即可.

【解答】解：正十边形的中心角为： $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

故答案为： 36° .

11. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为 3 和 4，若 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切，那么圆心距 O_1O_2 的长等于 1.

【分析】根据两圆内切，圆心距等于半径之差.

【解答】解： $\because \odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为 3 和 4， $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切，

$\therefore$ 圆心距 O_1O_2 的长 $= 4 - 3 = 1$,

故答案为：1.

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 15$, $\sin A = \frac{4}{5}$, 那么 $BC = \underline{12}$.

【分析】根据正弦的定义得到 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$, 然后把 $AB = 15$ 代入计算即可.

【解答】解: $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BC = \frac{4}{5}AB = \frac{4}{5} \times 15 = 12.$$

故答案为 12.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB:AC:BC = 1:2:\sqrt{5}$, 那么 $\tan B = \underline{2}$.

【分析】设 $AB = k$, 则 $AC = 2k$, $BC = \sqrt{5}k$, 根据勾股定理的逆定理推知 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 然后根据锐角三角函数的定义作答.

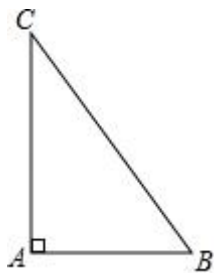
【解答】解: 根据题意, 可设 $AB = k$, 则 $AC = 2k$, $BC = \sqrt{5}k$,

$$\therefore AC^2 + AB^2 = BC^2 = 5k^2,$$

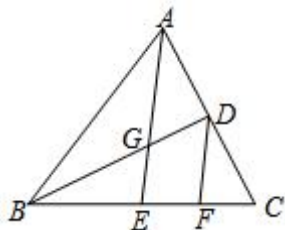
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle A = 90^\circ$.

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{2k}{k} = 2.$$

故答案是: 2.



14. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 的中线 AE 与 BD 交于点 G , $DF \parallel AE$ 交 BC 于 F , 那么 $\frac{DF}{AG} = \underline{\frac{3}{4}}$.



【分析】根据三角形中位线定理可得 $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$, 再根据相似三角形的性质可得 $\frac{DE}{AB} = \frac{GE}{GA} =$

$\frac{GD}{GB} = \frac{1}{2}$, 设辅助常数, 表示 AG , AE , 最后根据平行线分线段成比例得出答案.

【解答】解：连接 DE ，

$\because AE$ 、 BD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore AD = DC$ ， $BE = EC$ ，

$\therefore DE \parallel AB$ ， $DE = \frac{1}{2}AB$ ，

$\therefore \angle DEG = \angle BAG$ ， $\angle EDG = \angle ABG$ ，

$\therefore \triangle DEG \sim \triangle BAG$ ，

$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{GE}{GA} = \frac{GD}{GB} = \frac{1}{2}$ ，

设 $GE = k$ ，则 $AG = 2k$ ， $AE = k + 2k = 3k$ ，

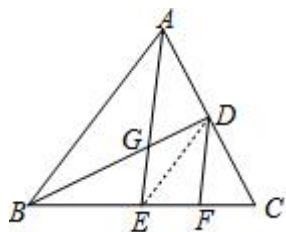
又 $\because DF \parallel AE$ ， $AD = DC$ ，

$\therefore \frac{DF}{AE} = \frac{1}{2}$ ，

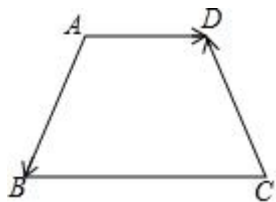
$\therefore DF = \frac{3}{2}k$ ，

$\therefore \frac{DF}{AG} = \frac{\frac{3}{2}k}{2k} = \frac{3}{4}$ ，

故答案为： $\frac{3}{4}$ 。



15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{CD}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 $-\vec{a} - \vec{b}$ 。



【分析】首先根据题意画出图形，然后过点 D 作 $DE \parallel AB$ ，交 BC 于点 E ，易得四边形 $ABED$ 是平行四边形，则可求得 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ ，再利用三角形法则求解即可求得答案。

【解答】解：如图，过点 D 作 $DE \parallel AB$ ，交 BC 于点 E ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BE = AD, DE = AB,$

$\therefore BC = 2AD,$

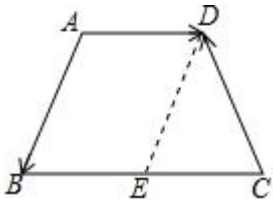
$\therefore AD = EC.$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$

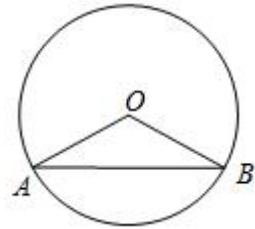
$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b},$

$\therefore \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) = -\vec{a} - \vec{b}.$

故答案为: $-\vec{a} - \vec{b}.$

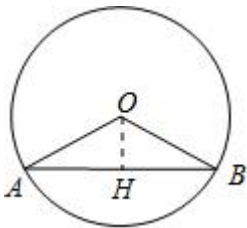


16. 如图, 已知 $\odot O$ 中, $\angle AOB = 120^\circ$, 弦 $AB = 18$, 那么 $\odot O$ 的半径长等于 $6\sqrt{3}$.



【分析】 如图, 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H . 直角三角形求出 OA 即可.

【解答】 解: 如图, 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H .



$\therefore OH \perp AB,$

$\therefore AH = BH = \frac{1}{2}AB = 9,$

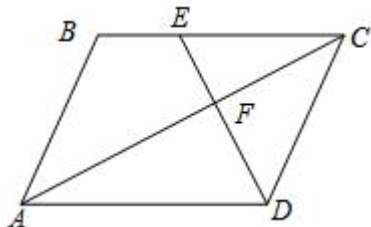
$\therefore OA = OB, \angle AOB = 120^\circ,$

$\therefore \angle A = \angle B = 30^\circ,$

$\therefore OA = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}.$

故答案为: $6\sqrt{3}$.

17. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, DE 交对角线 AC 于 F , 若 $CE = 2BE$, $\triangle ABC$ 的面积等于 15, 那么 $\triangle FEC$ 的面积等于 4.



【分析】根据平行四边形的性质证明 $\triangle ADF \sim \triangle CEF$, 可得对应边成比例, 根据 $CE = 2BE$, $\triangle ABC$ 的面积等于 15, 进而可得 $\triangle FEC$ 的面积.

【解答】解: 在 $\square ABCD$ 中,

$$AD \parallel CE, AD = BC$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CEF,$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{FD}{EF} = \frac{AF}{FC},$$

$$\because CE = 2EB,$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{FD}{EF} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = 15,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CFD} = 15,$$

$$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle CFD}} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2},$$

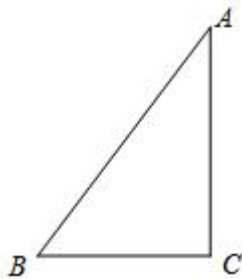
$$\therefore S_{\triangle AFD} = 9, S_{\triangle CFD} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle FEC} = 4.$$

故答案为: 4.

18. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 1$, $AC = 2$, 以点 C 为直角顶点的 $\text{Rt}\triangle DCE$ 的顶点 D 在 BA 的延长线上, DE 交 CA 的延长线于点 G , 若 $\tan \angle CED = \frac{1}{2}$, $CE = GE$, 那

么 BD 的长等于 $2+\sqrt{5}$.



【分析】如图，过点 A 作 $AH \perp CE$ 于 H . 想办法证明 $AK = AC$ ，推出 $HK = CH$ ，推出 $AK = AD = 2$ ，即可解决问题.

【解答】解：如图，过点 A 作 $AH \perp CE$ 于 H .

$$\because \tan \angle CED = \frac{1}{2} = \tan \angle BAC,$$

$$\therefore \angle E = \angle BAC,$$

$$\because CE = EG,$$

$$\therefore \angle CGE = \angle ECG,$$

$$\because \angle BAC + \angle GAK = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle E + \angle GAK = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE + \angle AKE = 180^\circ,$$

$$\because \angle AKE + \angle AKC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AKC = \angle CGE,$$

$$\therefore \angle AKC = \angle ACK,$$

$$\therefore AC = AK = 2,$$

$$\because AH \perp CK,$$

$$\therefore KH = CH,$$

$$\because \angle AHE = \angle DCK = 90^\circ,$$

$$\therefore AH \parallel CD,$$

$$\therefore KA = AD,$$

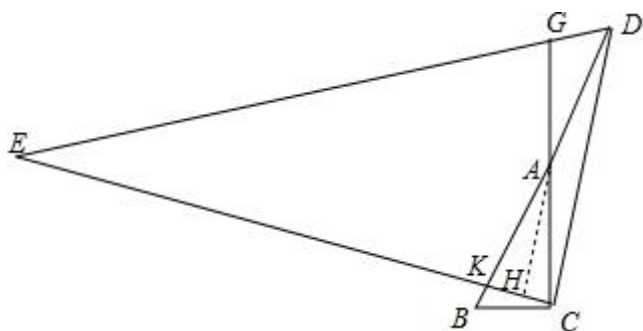
$$\therefore DK = 2AK = 4, \quad AD = AK = 2,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad BC = 1, \quad AC = 2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

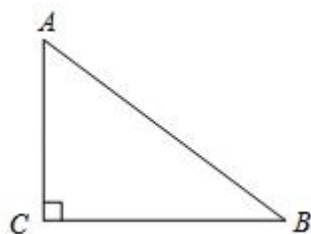
$$\therefore BD = AB + AD = 2 + \sqrt{5},$$

故答案为: $2+\sqrt{5}$.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$. 求: $\tan B \sin A + |1 - \cos B| + \frac{\tan A}{4 \tan^2 30^\circ}$ 的值.



【分析】 根据勾股定理求得 AB , 然后求得直角三角函数值, 代入求得即可求得.

【解答】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 由勾股定理得, $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

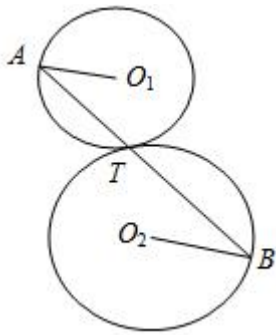
$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}; \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}; \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}; \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + \left| 1 - \frac{4}{5} \right| + \frac{\frac{4}{3}}{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}.$$

20. (10 分) 已知: 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T , 经过点 T 的直线与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分别相交于点 A 和点 B .

(1) 求证: $O_1A \parallel O_2B$;

(2) 若 $O_1A = 2$, $O_2B = 3$, $AB = 7$, 求 AT 的长.



【分析】(1) 联结 O_1O_2 , 即 O_1O_2 为连心线, 欲证明 $O_1A \parallel O_2B$, 只需推知 $\angle A = \angle B$;

(2) 利用 (1) 中的结论, 结合平行线截线段成比例得到 $\frac{2}{3} = \frac{AT}{7-AT}$, 通过计算求得 AT 的值.

【解答】(1) 证明: 联结 O_1O_2 , 即 O_1O_2 为连心线,

又 $\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T ,

$\therefore O_1O_2$ 经过点 T .

$\because O_1A = O_1T, O_2B = O_2T$.

$\therefore \angle A = \angle O_1TA, \angle B = \angle O_2TB$.

$\because \angle O_1TA = \angle O_2TB$,

$\therefore \angle A = \angle B$.

$\therefore O_1A \parallel O_2B$;

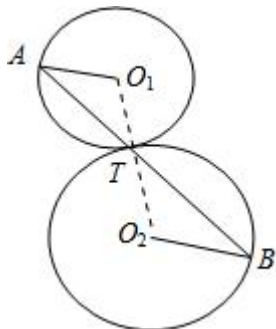
(2) $\because O_1A \parallel O_2B$,

$$\therefore \frac{AO_1}{BO_2} = \frac{AT}{BT}.$$

$\because O_1A = 2, O_2B = 3, AB = 7$,

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{AT}{7-AT},$$

解得: $AT = \frac{14}{5}$.



21. (10分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 把表达式化成 $y = -2(x+m)^2 + k$ 的形式, 并写出顶点坐标与对称轴.

【分析】 (1) 将点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$ 代入解析式求出 b 、 c 的值即可得;

(2) 将二次函数配方成顶点式后确定其顶点坐标与对称轴.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$,

$$\therefore \begin{cases} c=1 \\ -2+b+c=-5 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=-4 \\ c=1 \end{cases};$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -2x^2 - 4x + 1$;

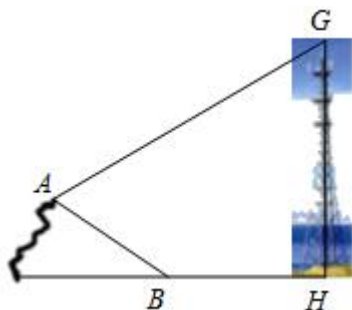
(2) $\because y = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x+1)^2 + 3$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为: $(-1, 3)$, 对称轴为: 直线 $x = -1$.

22. (10分) 如图, 在距某输电铁塔 GH (GH 垂直地面) 的底部点 H 左侧水平距离 60 米的点 B 处有一个山坡, 山坡 AB 的坡度 $i = 1: \sqrt{3}$, 山坡坡底点 B 到坡顶 A 的距离 AB 等于 40 米, 在坡顶 A 处测得铁塔顶点 G 的仰角为 30° (铁塔 GH 与山坡 AB 在同一平面内).

(1) 求山坡的高度;

(2) 求铁塔的高度 GH . (结果保留根号)



【分析】 (1) 过点 A 作 AD 垂直 HB 于 D , 作 $AE \parallel BH$ 交 GH 于点 E , 由坡度的定义和锐角三角函数定义分别计算出 BD , 根据勾股定理求出 AD ;

(2) 作 $AE \parallel BH$ 交 GH 于点 E , 根据题意得到四边形 $ADHE$ 是平行四边形, 解直角三角形即可得到结论.

【解答】 解: (1) 过点 A 作 AD 垂直 HB , 交 HB 的延长线于点 D ,

即 $\angle ADB = 90^\circ$,

由题意得: $i = 1: \sqrt{3}$, $AB = 40$ (米),

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

即 $BD = \sqrt{3}AD$;

$$\text{又} \because AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

$$\text{即 } 40^2 = AD^2 + (\sqrt{3}AD)^2,$$

$$\therefore AD = 20 \text{ (米)},$$

答：山坡的高度为 20 米；

(2) 作 $AE \parallel BH$ 交 GH 于点 E ,

$$\because AD \perp BH, GH \perp BH,$$

$$\therefore AD \parallel GH,$$

即：四边形 $ADHE$ 是平行四边形，

由题意可知： $\angle GAE = 30^\circ$ ， $BH = 60$ (米)，

$$\therefore BD = \sqrt{3}AD = 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore AE = DH = 60 + 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

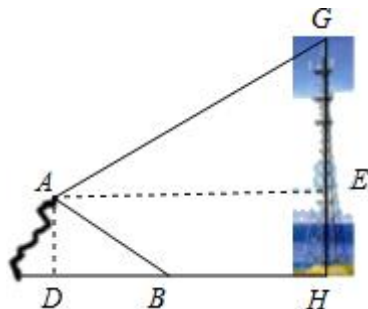
在 $\text{Rt}\triangle AGE$ 中， $\tan \angle GAE = \frac{GE}{AE}$,

$$\therefore GE = 20 + 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\text{又} \because EH = AD = 20 \text{ (米)},$$

$$\therefore GH = GE + EH = 40 + 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

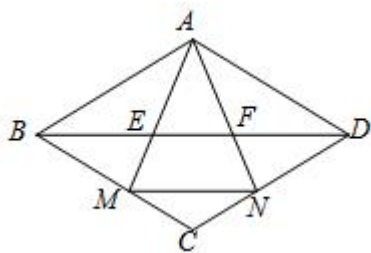
答：铁塔的高度 GH 为 $(40 + 20\sqrt{3})$ 米.



23. (12 分) 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上，联结 AM 、 AN 交对角线 BD 于 E 、 F 两点，且 $\angle MAN = \angle ABD$.

(1) 求证： $AB^2 = BF \cdot DE$;

(2) 若 $\frac{BE}{DE} = \frac{DN}{DC}$ ，求证： $EF \parallel MN$.



【分析】(1) 由菱形的性质得 $AB = AD$ ，则 $\angle ABD = \angle ADB$ ，易证 $\angle AED = \angle BAF$ ，则 $\triangle AED \sim \triangle FAB$ ，得 $\frac{AD}{BF} = \frac{DE}{AB}$ ，即 $AD \cdot AB = BF \cdot DE$ ，即可得出结论；

(2) 由菱形的性质得 $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\triangle BME \sim \triangle DAE$ ，得 $\frac{BE}{DE} = \frac{BM}{AD}$ ，进而证出 $\frac{BM}{BC} = \frac{DN}{DC}$ ，则 $MN \parallel BD$ 即可．

【解答】证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\because \angle AED = \angle ABD + \angle BAE, \quad \angle BAF = \angle MAN + \angle BAE, \quad \angle MAN = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BAF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle FAB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{DE}{AB},$$

$$\text{即 } AD \cdot AB = BF \cdot DE,$$

$$\therefore AB^2 = BF \cdot DE;$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AD = BC, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle BME \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{BM}{AD},$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{DN}{DC},$$

$$\therefore \frac{BM}{AD} = \frac{DN}{DC},$$

$$\therefore \frac{BM}{BC} = \frac{DN}{DC},$$

$$\therefore MN \parallel BD,$$

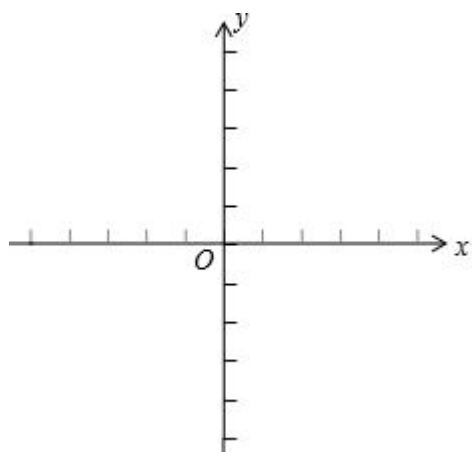
$$\therefore EF \parallel MN.$$

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{3}{4}x+2$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x-3$ 相交于点 A , 抛物线 $y = ax^2+bx-1$ ($a \neq 0$) 经过点 A .

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若抛物线 $y = ax^2+bx-1$ 向上平移两个单位后, 经过点 $(1, -2)$, 求抛物线 $y = ax^2+bx-1$ 的表达式;

(3) 若抛物线 $y = a'x^2+b'x+c$ ($a' < 0$) 与 $y = ax^2+bx-1$ 关于 x 轴对称, 且这两条抛物线的顶点分别是点 P' 与点 P , 当 $S_{\triangle OPP'} = 3$ 时, 求抛物线 $y = ax^2+bx-1$ 的表达式.



【分析】 (1) 联立两直线解析式, 解二元一次方程组即可得出答案;

(2) 由抛物线经过点 A 可得出 $b = -4a$, 由平移的性质可得出答案;

(3) 求出顶点 P 的坐标为 $(2, -4a-1)$, 由轴对称的性质可得出 P' 的坐标, 求出 PP' 的长, 根据三角形的面积公式可得出方程, 解方程可得出答案.

【解答】 解: (1) $\because$ 直线 $y = -\frac{3}{4}x+2$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x-3$ 相交于点 A ,

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x+2 \\ y = \frac{1}{2}x-3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases};$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4, -1)$.

(2) $\because$ 抛物线 $y = ax^2+bx-1$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(4, -1)$,

$$\therefore 16a+4b-1 = -1,$$

即 $b = -4a$,

$$\therefore y = ax^2 - 4ax - 1,$$

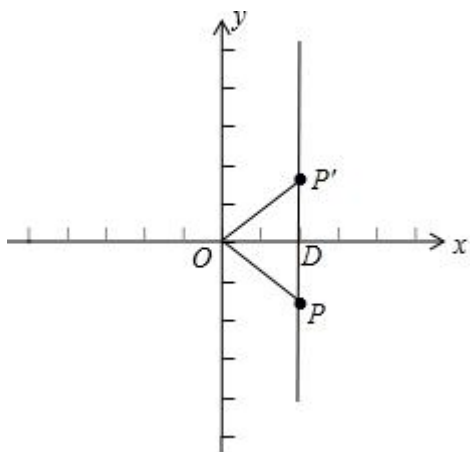
$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式是 $y = ax^2 - 4ax + 1$,

$$\therefore -2 = a - 4a + 1,$$

解得： $a = 1$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式是： $y = x^2 - 4x - 1$.

(3) 如图,



$$\because y = ax^2 - 4ax - 1 = a(x - 2)^2 - 4a - 1,$$

$$\therefore P(2, -4a - 1),$$

$\because$ 抛物线 $y = a'x^2 + b'x + c$ ($a' < 0$) 与 $y = ax^2 - 4ax - 1$ 关于 x 轴对称,

$$\therefore P'(2, 4a + 1),$$

$$\because a' < 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore PP' = 8a + 2,$$

$$\text{又} \because OD = 2, S_{\triangle OPP'} = \frac{1}{2} \times OD \times PP',$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times (8a + 2) = 3,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{8},$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式是 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$.

25. (14分) 定理：一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半．如图1， $\angle A = \frac{1}{2}$

$\angle O$.

已知：如图2， AC 是 $\odot O$ 的一条弦，点 D 在 $\odot O$ 上（与 A 、 C 不重合），联结 DE 交射线

AO 于点 E ，联结 OD ， $\odot O$ 的半径为 5， $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$.

(1) 求弦 AC 的长．

(2) 当点 E 在线段 OA 上时, 若 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似, 求 $\angle DCA$ 的正切值.

(3) 当 $OE = 1$ 时, 求点 A 与点 D 之间的距离 (直接写出答案).

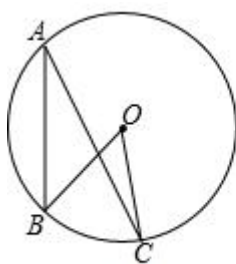


图1

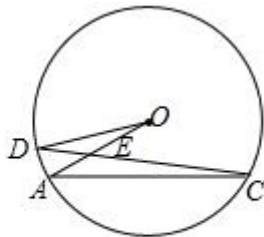
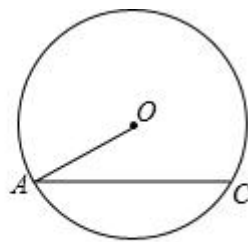


图2



备用图

【分析】(1) 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H , 由垂径定理可得 $AH = BH = \frac{1}{2}AC$, 由锐角三角函数和勾股定理可求解;

(2) 分两种情况讨论, 由相似三角形的性质可求 AG , EG , CG 的长, 即可求解;

(3) 分两种情况讨论, 由相似三角形和勾股定理可求解.

【解答】解: (1) 如图 1, 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H ,

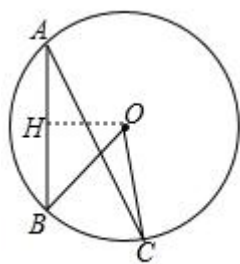


图1

由垂径定理得: $AH = BH = \frac{1}{2}AC$,

在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中, $\tan \angle OAC = \frac{OH}{AH} = \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 设 $OH = 3x$, $AH = 4x$,

$\because OH^2 + AH^2 = OA^2$,

$\therefore (3x)^2 + (4x)^2 = 5^2$,

解得: $x = \pm 1$, ($x = -1$ 舍去),

$\therefore OH = 3$, $AH = 4$,

$\therefore AC = 2AH = 8$;

(2) 如图 2, 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于 H , 过 E 作 $EG \perp AC$ 于 G ,

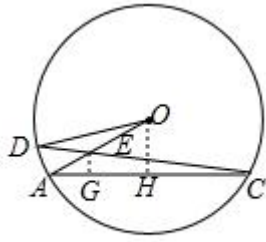


图2

$$\because \angle DEO = \angle AEC,$$

$\therefore$ 当 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似时可得: $\angle DOE = \angle A$ 或者 $\angle DOE = \angle ACD$;

由定理: 一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半. 可知: $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle DOE$,

$$\therefore \angle ACD \neq \angle DOE$$

$\therefore$ 当 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似时, 不存在 $\angle DOE = \angle ACD$ 情况,

$\therefore$ 当 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似时, $\angle DOE = \angle A$,

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{OD}{AC} = \frac{OE}{AE},$$

$$\because OD = OA = 5, AC = 8,$$

$$\therefore \frac{5}{8} = \frac{5-AE}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{40}{13},$$

$$\because \angle AGE = \angle AHO = 90^\circ,$$

$$\therefore GE \parallel OH,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle AOH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{EG}{OH} = \frac{AG}{AH},$$

$$\therefore \frac{\frac{40}{13}}{5} = \frac{EG}{3} = \frac{AG}{4},$$

$$\therefore EG = \frac{24}{13},$$

$$\therefore AG = \frac{32}{13}, CG = 8 - \frac{32}{13} = \frac{72}{13},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEG \text{ 中, } \tan \angle DCA = \frac{EG}{CG} = \frac{\frac{24}{13}}{\frac{72}{13}} = \frac{1}{3};$$

(3) 当点 E 在线段 OA 上时, 如图 3, 过点 E 作 $EG \perp AC$ 于 G , 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于 H , 延长 AO 交 $\odot O$ 于 M , 连接 AD , DM ,

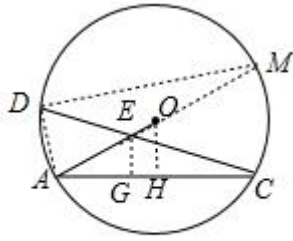


图3

由 (1) 可得 $OH=3$, $AH=4$, $AC=8$,

$$\therefore OE=1,$$

$$\therefore AE=4, ME=6,$$

$$\therefore EG \parallel OH,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle AOH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{AG}{AH} = \frac{EG}{OH} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AG = \frac{16}{5}, EG = \frac{12}{5},$$

$$\therefore GC = \frac{24}{5},$$

$$\therefore EC = \sqrt{GC^2 + EG^2} = \sqrt{\frac{576}{25} + \frac{144}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore AM$ 是直径,

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ = \angle EGC,$$

又 $\therefore \angle M = \angle C$,

$$\therefore \triangle EGC \sim \triangle ADM,$$

$$\therefore \frac{EC}{AM} = \frac{EG}{AD},$$

$$\therefore \frac{\frac{12\sqrt{5}}{5}}{10} = \frac{\frac{12}{5}}{AD},$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{5};$$

当点 E 在线段 AO 的延长线上时, 如图 4, 延长 AO 交 $\odot O$ 于 M , 连接 AD , DM , 过点 E 作 $EG \perp AC$ 于 G ,

