

2020-2021 学年上海市金山区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）已知二次函数 $y = (x - 2)^2 - 1$ ，那么该二次函数图象的对称轴是（ ）

- A. 直线 $x = 2$ B. 直线 $x = -2$ C. 直线 $x = 1$ D. 直线 $x = -1$

2.（4 分）下列各点在抛物线 $y = 2x^2$ 上的是（ ）

- A. (2, 2) B. (2, 4) C. (2, 8) D. (2, 16)

3.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么锐角 A 的正弦等于（ ）

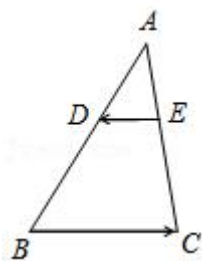
- A. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}$
B. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$
C. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$
D. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}$

4.（4 分）若 α 是锐角， $\sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么锐角 α 等于（ ）

- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

5.（4 分）如图，已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $BD = 3$ ，

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，那么 $\overrightarrow{ED}$ 等于（ ）



- A. $\frac{2}{3}\vec{a}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a}$ C. $\frac{2}{5}\vec{a}$ D. $-\frac{2}{5}\vec{a}$

6.（4 分）如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有公共点，那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是（ ）



- A. $0 \leq r \leq \frac{12}{5}$ B. $\frac{12}{5} \leq r \leq 3$ C. $\frac{12}{5} \leq r \leq 4$ D. $3 \leq r \leq 4$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 计算： $\vec{a} + 2\left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) =$ _____.

8. (4 分) 已知 $f(x) = x^2 + 3x$ ，那么 $f(-2) =$ _____.

9. (4 分) 抛物线 $y = -2x^2$ 沿着 x 轴正方向看，在 y 轴的左侧部分是_____。（填“上升”或“下降”）

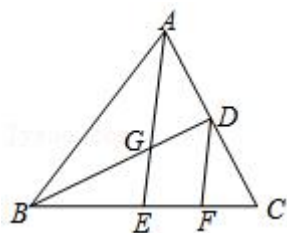
10. (4 分) 正十边形的中心角等于_____度.

11. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为 3 和 4，若 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切，那么圆心距 O_1O_2 的长等于_____.

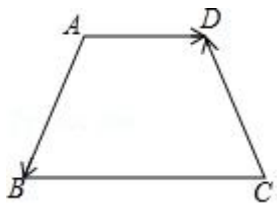
12. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 15$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ，那么 $BC =$ _____.

13. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB:AC:BC = 1:2:\sqrt{5}$ ，那么 $\tan B =$ _____.

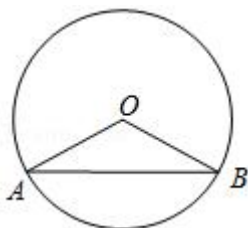
14. (4 分) 已知：如图， $\triangle ABC$ 的中线 AE 与 BD 交于点 G ， $DF \parallel AE$ 交 BC 于 F ，那么 $\frac{DF}{AG} =$ _____.



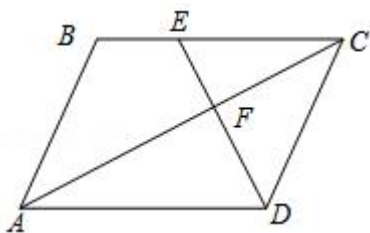
15. (4 分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{CD}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



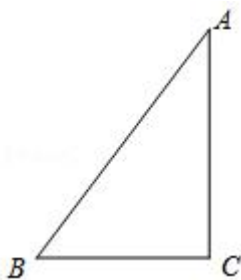
16. (4分) 如图, 已知 $\odot O$ 中, $\angle AOB = 120^\circ$, 弦 $AB = 18$, 那么 $\odot O$ 的半径长等于_____.



17. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, DE 交对角线 AC 于 F , 若 $CE = 2BE$, $\triangle ABC$ 的面积等于 15, 那么 $\triangle FEC$ 的面积等于_____.

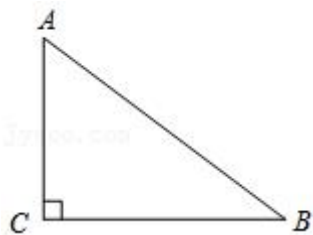


18. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 1$, $AC = 2$, 以点 C 为直角顶点的 $\text{Rt}\triangle DCE$ 的顶点 D 在 BA 的延长线上, DE 交 CA 的延长线于点 G , 若 $\tan \angle CED = \frac{1}{2}$, $CE = GE$, 那么 BD 的长等于_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

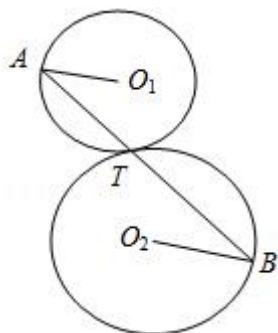
19. (10分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$. 求: $\tan B \sin A + |1 - \cos B| + \frac{\tan A}{4 \tan^2 30^\circ}$ 的值.



20. (10分) 已知: 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T , 经过点 T 的直线与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分别相交于点 A 和点 B .

(1) 求证: $O_1A \parallel O_2B$;

(2) 若 $O_1A = 2$, $O_2B = 3$, $AB = 7$, 求 AT 的长.



21. (10分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$.

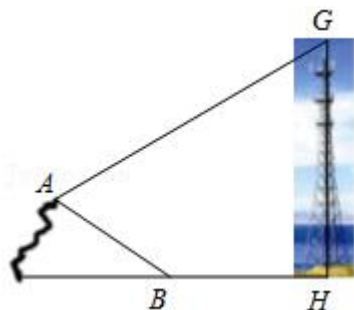
(1) 求抛物线的表达式;

(2) 把表达式化成 $y = -2(x+m)^2 + k$ 的形式, 并写出顶点坐标与对称轴.

22. (10分) 如图, 在距某输电铁塔 GH (GH 垂直地面) 的底部点 H 左侧水平距离 60 米的点 B 处有一个山坡, 山坡 AB 的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$, 山坡坡底点 B 到坡顶 A 的距离 AB 等于 40 米, 在坡顶 A 处测得铁塔顶点 G 的仰角为 30° (铁塔 GH 与山坡 AB 在同一平面内).

(1) 求山坡的高度;

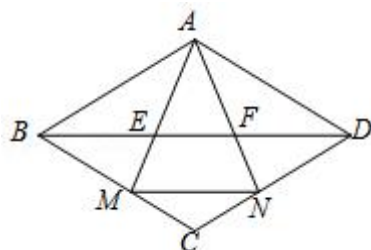
(2) 求铁塔的高度 GH . (结果保留根号)



23. (12分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上, 联结 AM 、 AN 交对角线 BD 于 E 、 F 两点, 且 $\angle MAN = \angle ABD$.

(1) 求证: $AB^2 = BF \cdot DE$;

(2) 若 $\frac{BE}{DE} = \frac{DN}{DC}$, 求证: $EF \parallel MN$.

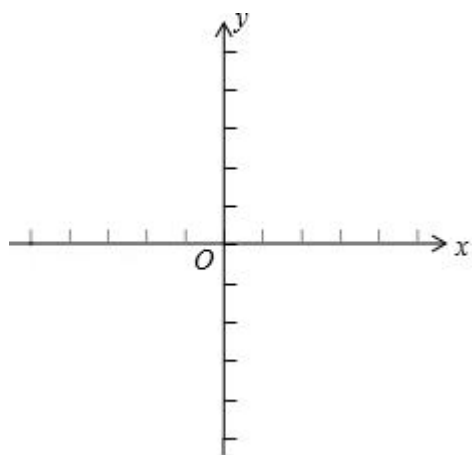


24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 2$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 相交于点 A , 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 经过点 A .

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 向上平移两个单位后, 经过点 $(1, -2)$, 求抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式;

(3) 若抛物线 $y = a'x^2 + b'x + c$ ($a' < 0$) 与 $y = ax^2 + bx - 1$ 关于 x 轴对称, 且这两条抛物线的顶点分别是点 P' 与点 P , 当 $S_{\triangle OPP'} = 3$ 时, 求抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式.



25. (14 分) 定理: 一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半. 如图 1, $\angle A = \frac{1}{2} \angle O$.

已知: 如图 2, AC 是 $\odot O$ 的一条弦, 点 D 在 $\odot O$ 上 (与 A 、 C 不重合), 联结 DC 交射线 AO 于点 E , 联结 OD , $\odot O$ 的半径为 5, $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$.

(1) 求弦 AC 的长.

(2) 当点 E 在线段 OA 上时, 若 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似, 求 $\angle DCA$ 的正切值.

(3) 当 $OE = 1$ 时, 求点 A 与点 D 之间的距离 (直接写出答案).

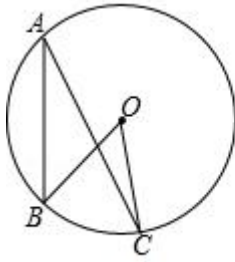


图1

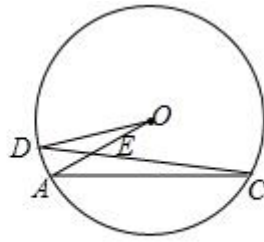
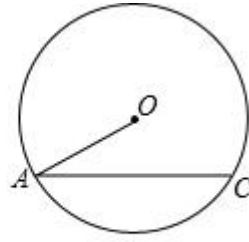


图2



备用图

2020-2021 学年上海市金山区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上．】

1.（4 分）已知二次函数 $y = (x - 2)^2 - 1$ ，那么该二次函数图象的对称轴是（ ）

- A. 直线 $x = 2$ B. 直线 $x = -2$ C. 直线 $x = 1$ D. 直线 $x = -1$

【分析】根据抛物线的顶点式，可求抛物线的对称轴．

【解答】解：∵ $y = (x - 2)^2 - 1$ ，

∴ 对称轴是：直线 $x = 2$ ．

故选：A．

【点评】本题考查了二次函数的解析式与对称轴的关系，利用二次函数的性质解答．

2.（4 分）下列各点在抛物线 $y = 2x^2$ 上的是（ ）

- A. (2, 2) B. (2, 4) C. (2, 8) D. (2, 16)

【分析】把 $x = 2$ 代入抛物线解析式中，求得函数值，即可判断．

【解答】解：把 $x = 2$ 代入 $y = 2x^2$ 得 $y = 2 \times 2^2 = 8$ ，

故点 (2, 8) 在抛物线上．

故选：C．

【点评】本题考查二次函数图象上点的坐标特征，图象上点的坐标适合解析式．

3.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么锐角 A 的正弦等于（ ）

- A. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}$
B. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$
C. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$
D. $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}$

【分析】根据锐角三角函数的定义得出答案即可．

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，锐角 A 的正弦表示的是锐角 A 的对边与斜边的比，即： $\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$ ，

故选：B．

【点评】 本题考查锐角三角函数的定义，掌握锐角三角函数的意义是正确选择的前提.

4. (4分) 若 α 是锐角， $\sin(\alpha+15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么锐角 α 等于 ()

- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

【分析】 根据特殊锐角三角函数值先得出 $\alpha+15^\circ$ ，再求出 α 即可.

【解答】 解： $\because \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \alpha+15^\circ = 45^\circ,$$

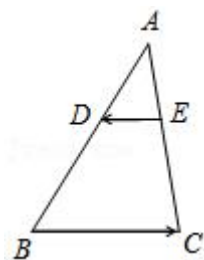
$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

故选：B.

【点评】 本题考查特殊锐角三角函数值，掌握特殊锐角三角函数值是正确解答的前提.

5. (4分) 如图，已知点D、E分别在 $\triangle ABC$ 的边AB、AC上， $DE \parallel BC$ ， $AD=2$ ， $BD=3$ ，

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，那么 $\overrightarrow{ED}$ 等于 ()



- A. $\frac{2}{3}\vec{a}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a}$ C. $\frac{2}{5}\vec{a}$ D. $-\frac{2}{5}\vec{a}$

【分析】 利用平行线分线段成比例定理，求解即可.

【解答】 解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{2+3},$$

$$\therefore DE = \frac{2}{5}BC,$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \vec{a},$$

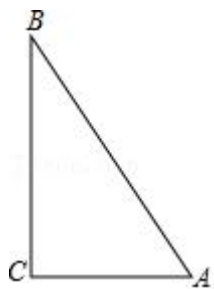
$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{5}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = -\frac{2}{5}\vec{a},$$

故选：D.

【点评】 本题考查平面向量，平行线的性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

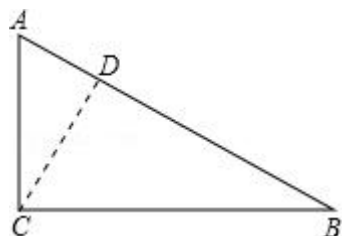
6. (4分) 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有公共点, 那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是 ()



- A. $0 \leq r \leq \frac{12}{5}$ B. $\frac{12}{5} \leq r \leq 3$ C. $\frac{12}{5} \leq r \leq 4$ D. $3 \leq r \leq 4$

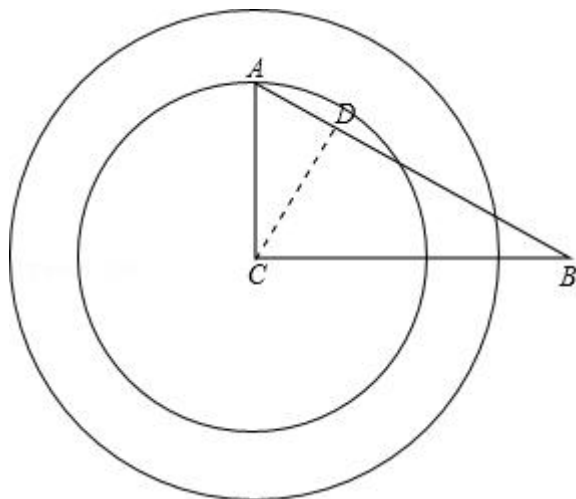
【分析】 根据直线与圆的位置关系得出相切时有一交点, 再结合图形得出另一种有一个交点的情况, 即可得出答案.

【解答】 解: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



$\because AC = 3$, $BC = 4$. 如果以点 C 为圆心, r 为半径的圆与斜边 AB 只有一个公共点,

$\therefore AB = 5$,



当直线与圆相切时, $d = r$, 圆与斜边 AB 只有一个公共点, 圆与斜边 AB 只有一个公共点,

$\therefore CD \times AB = AC \times BC$,

$\therefore CD = r = \frac{12}{5}$,

当直线与圆如图所示也可以有交点,

$$\therefore \frac{12}{5} \leq r \leq 4.$$

故选：C.

【点评】此题主要考查了直线与圆的位置关系，结合题意画出符合题意的图形，从而得出答案，此题比较容易漏解.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 计算： $\vec{a} + 2\left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \underline{4\vec{a} - 2\vec{b}}$.

【分析】先利用乘法结合律去括号，然后计算加减法.

【解答】解：原式 $= \vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{b} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$.

故答案是： $4\vec{a} - 2\vec{b}$.

【点评】本题主要考查了平面向量，实数的运算法则同样能应用于平面向量的计算.

8. (4 分) 已知 $f(x) = x^2 + 3x$ ，那么 $f(-2) = \underline{-2}$.

【分析】计算自变量为 -2 对应的函数值即可.

【解答】解：把 $x = -2$ 代入 $f(x) = x^2 + 3x$ 得 $f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) = 4 - 6 = -2$.

故答案为： -2 .

【点评】本题考查了函数值. 解题的关键是明确函数图象上点的坐标特征：函数图象上点的坐标满足其解析式.

9. (4 分) 抛物线 $y = -2x^2$ 沿着 x 轴正方向看，在 y 轴的左侧部分是 上升. (填“上升”或“下降”)

【分析】根据二次函数的性质解答即可.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = -2x^2$ 的开口向下，对称轴为 y 轴，

$\therefore$ 在对称轴左侧 y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 抛物线 $y = -2x^2$ 在 y 轴左侧的部分是上升的，

故答案为：上升.

【点评】本题考查二次函数的图象及性质；熟练掌握二次函数的图象及性质是解题的关键.

10. (4 分) 正十边形的中心角等于 36 度.

【分析】根据正多边形的圆心角定义可知：正 n 边形的圆中心角为： $\frac{360^\circ}{n}$ ，则代入求

解即可．

【解答】解：正十边形的中心角为： $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ ．

故答案为： 36° ．

【点评】此题考查了正多边形的中心角的知识．题目比较简单，注意熟记定义．

11. (4分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为3和4, 若 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切, 那么圆心距 O_1O_2 的长等于 1．

【分析】根据两圆内切，圆心距等于半径之差．

【解答】解： $\because \odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为3和4， $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切，

$\therefore$ 圆心距 O_1O_2 的长 $= 4 - 3 = 1$ ，

故答案为：1．

【点评】本题考查圆与圆的位置关系，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

12. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 15$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ，那么 $BC =$ 12．

【分析】根据正弦的定义得到 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$ ，然后把 $AB = 15$ 代入计算即可．

【解答】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BC = \frac{4}{5}AB = \frac{4}{5} \times 15 = 12.$$

故答案为12．

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ．锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$ ．

13. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB:AC:BC = 1:2:\sqrt{5}$ ，那么 $\tan B =$ 2．

【分析】设 $AB = k$ ，则 $AC = 2k$ ， $BC = \sqrt{5}k$ ，根据勾股定理的逆定理推知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，然后根据锐角三角函数的定义作答．

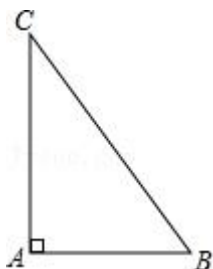
【解答】解：根据题意，可设 $AB = k$ ，则 $AC = 2k$ ， $BC = \sqrt{5}k$ ，

$$\therefore AC^2 + AB^2 = BC^2 = 5k^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle A = 90^\circ$ ．

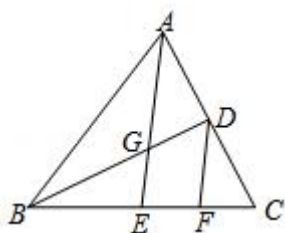
$$\therefore \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{2k}{k} = 2.$$

故答案是：2.



【点评】 本题主要考查了解直角三角形，根据题意，运用勾股定理的逆定理推知 $\triangle ABC$ 是直角三角形是解题的关键.

14. (4分) 已知：如图， $\triangle ABC$ 的中线 AE 与 BD 交于点 G ， $DF \parallel AE$ 交 BC 于 F ，那么 $\frac{DF}{AG} = \frac{3}{4}$.



【分析】 根据三角形中位线定理可得 $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$ ，再根据相似三角形的性质可得 $\frac{DE}{AB} = \frac{GE}{GA} = \frac{GD}{GB} = \frac{1}{2}$ ，设辅助常数，表示 AG ， AE ，最后根据平行线分线段成比例得出答案.

【解答】 解：连接 DE ，

$\because AE$ 、 BD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore AD = DC$ ， $BE = EC$ ，

$\therefore DE \parallel AB$ ， $DE = \frac{1}{2}AB$ ，

$\therefore \angle DEG = \angle BAG$ ， $\angle EDG = \angle ABG$ ，

$\therefore \triangle DEG \sim \triangle BAG$ ，

$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{GE}{GA} = \frac{GD}{GB} = \frac{1}{2}$ ，

设 $GE = k$ ，则 $AG = 2k$ ， $AE = k + 2k = 3k$ ，

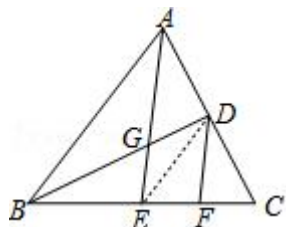
又 $\because DF \parallel AE$ ， $AD = DC$ ，

$\therefore \frac{DF}{AE} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore DF = \frac{3}{2}k,$$

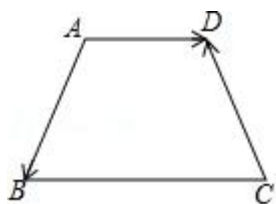
$$\therefore \frac{DF}{AG} = \frac{\frac{3}{2}k}{2k} = \frac{3}{4},$$

故答案为: $\frac{3}{4}$.



【点评】本题考查三角形中位线定理、相似三角形的性质和判断，得出线段的比，利用参数代换是解决问题的关键.

15. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{CD}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 $-\vec{a} - \vec{b}$.



【分析】首先根据题意画出图形, 然后过点 D 作 $DE \parallel AB$, 交 BC 于点 E , 易得四边形 $ABED$ 是平行四边形, 则可求得 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{EC}$, 再利用三角形法则求解即可求得答案.

【解答】解: 如图, 过点 D 作 $DE \parallel AB$, 交 BC 于点 E ,

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABED \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore BE = AD, DE = AB,$$

$$\because BC = 2AD,$$

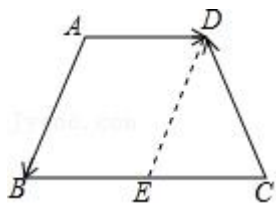
$$\therefore AD = EC.$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

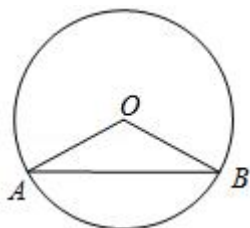
$$\therefore \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) = -\vec{a} - \vec{b}.$$

故答案为: $-\vec{a}-\vec{b}$.



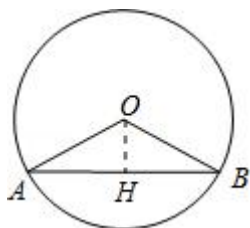
【点评】此题考查了平面向量的知识以及平行四边形的判定与性质. 注意结合题意画出图形, 利用图形求解是关键.

16. (4分) 如图, 已知 $\odot O$ 中, $\angle AOB = 120^\circ$, 弦 $AB = 18$, 那么 $\odot O$ 的半径长等于 $6\sqrt{3}$.



【分析】如图, 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H . 直角三角形求出 OA 即可.

【解答】解: 如图, 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H .



$$\because OH \perp AB,$$

$$\therefore AH = BH = \frac{1}{2}AB = 9,$$

$$\because OA = OB, \angle AOB = 120^\circ,$$

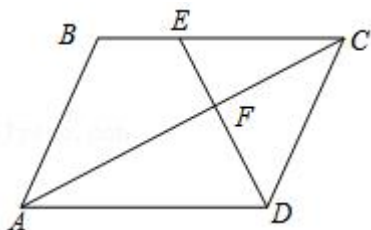
$$\therefore \angle A = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore OA = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}.$$

故答案为: $6\sqrt{3}$.

【点评】本题考查圆心角, 弧, 弦的关系, 勾股定理, 垂径定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题.

17. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, DE 交对角线 AC 于 F , 若 $CE = 2BE$, $\triangle ABC$ 的面积等于 15, 那么 $\triangle FEC$ 的面积等于 4 .



【分析】根据平行四边形的性质证明 $\triangle ADF \sim \triangle CEF$, 可得对应边成比例, 根据 $CE = 2BE$, $\triangle ABC$ 的面积等于 15, 进而可得 $\triangle FEC$ 的面积.

【解答】解: 在 $\square ABCD$ 中,

$$AD \parallel CE, AD = BC$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CEF,$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{FD}{EF} = \frac{AF}{FC},$$

$$\because CE = 2EB,$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{FD}{EF} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = 15,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CFD} = 15,$$

$$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle CFD}} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AFD} = 9, S_{\triangle CFD} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle FEC} = 4.$$

故答案为: 4.

【点评】本题考查相似三角形的判定与性质, 解题的关键是熟练运用相似三角形的性质与判定, 本题属于中等题型.

18. (4 分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 1$, $AC = 2$, 以点 C 为直角顶点的 $\text{Rt}\triangle DCE$ 的顶点 D 在 BA 的延长线上, DE 交 CA 的延长线于点 G , 若 $\tan \angle CED = \frac{1}{2}$, $CE = GE$, 那么 BD 的长等于 $2 + \sqrt{5}$.

【解答】 解：如图，过点 A 作 $AH \perp CE$ 于 H .

$$\therefore \tan \angle CED = \frac{1}{2} = \tan \angle BAC,$$

$$\because CE = EG,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle GAK = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE + \angle AKE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AKC = \angle CGE,$$

$$\therefore AC = AK = 2,$$

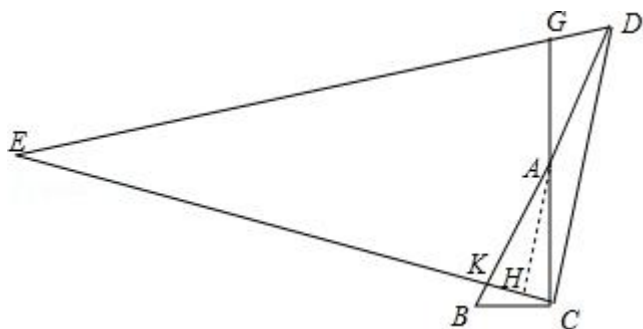
$$\therefore KH = CH,$$

$$\therefore AH \parallel CD,$$

$$\therefore DK = 2AK = 4, \quad AD = AK = 2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

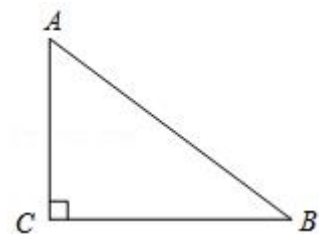
故答案为: $2+\sqrt{5}$.



【点评】 本题考查解直角三角形，勾股定理，三角形的中位线定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造三角形的中位线解决问题．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

- 19.（10 分）如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ．求： $\tan B \sin A + |1 - \cos B| + \frac{\tan A}{4 \tan^2 30^\circ}$ 的值．



【分析】 根据勾股定理求得 AB ，然后求得直角三角函数值，代入求得即可求得．

【解答】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，由勾股定理得， $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}; \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}; \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}; \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3},$$

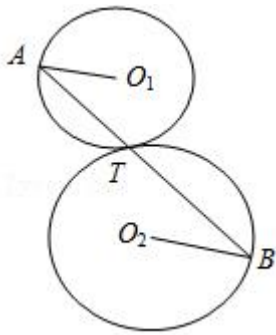
$$\therefore \text{原式} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + |1 - \frac{4}{5}| + \frac{\frac{4}{3}}{4 \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}.$$

【点评】 本题考查了解直角三角形，锐角三角函数定义，正确把握其定义是解题关键．

- 20.（10 分）已知：如图， $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T ，经过点 T 的直线与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分别相交于点 A 和点 B ．

（1）求证： $O_1A \parallel O_2B$ ；

（2）若 $O_1A = 2$ ， $O_2B = 3$ ， $AB = 7$ ，求 AT 的长．



【分析】(1) 联结 O_1O_2 ，即 O_1O_2 为连心线，欲证明 $O_1A \parallel O_2B$ ，只需推知 $\angle A = \angle B$ ；

(2) 利用 (1) 中的结论，结合平行线截线段成比例得到 $\frac{2}{3} = \frac{AT}{7-AT}$ ，通过计算求得 AT 的值.

【解答】(1) 证明：联结 O_1O_2 ，即 O_1O_2 为连心线，

又 $\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T ，

$\therefore O_1O_2$ 经过点 T .

$\because O_1A = O_1T$, $O_2B = O_2T$.

$\therefore \angle A = \angle O_1TA$, $\angle B = \angle O_2TB$.

$\because \angle O_1TA = \angle O_2TB$,

$\therefore \angle A = \angle B$.

$\therefore O_1A \parallel O_2B$;

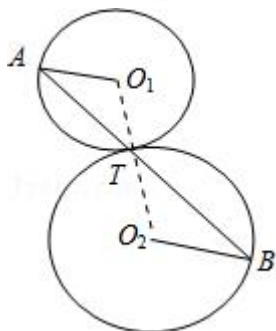
(2) $\because O_1A \parallel O_2B$,

$$\therefore \frac{AO_1}{BO_2} = \frac{AT}{BT}.$$

$\because O_1A = 2$, $O_2B = 3$, $AB = 7$,

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{AT}{7-AT},$$

$$\text{解得: } AT = \frac{14}{5}.$$



【点评】此题考查了相切两圆的性质，平行线的判定与性质，作出相应的辅助线是解本题的关键.

21. (10分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 把表达式化成 $y = -2(x+m)^2 + k$ 的形式, 并写出顶点坐标与对称轴.

【分析】(1) 将点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$ 代入解析式求出 b 、 c 的值即可得;

(2) 将二次函数配方成顶点式后确定其顶点坐标与对称轴.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, -5)$,

$$\therefore \begin{cases} c=1 \\ -2+b+c=-5 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=-4 \\ c=1 \end{cases};$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -2x^2 - 4x + 1$;

(2) $\because y = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x+1)^2 + 3$,

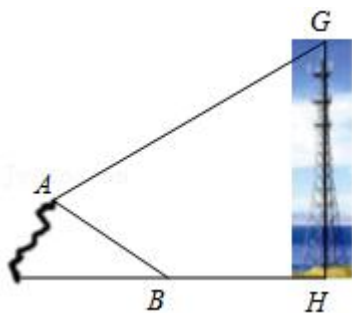
$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为: $(-1, 3)$, 对称轴为: 直线 $x = -1$.

【点评】本题主要考查二次函数的性质, 解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式及配方法求抛物线的顶点坐标.

22. (10分) 如图, 在距某输电铁塔 GH (GH 垂直地面) 的底部点 H 左侧水平距离 60 米的点 B 处有一个山坡, 山坡 AB 的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$, 山坡坡底点 B 到坡顶 A 的距离 AB 等于 40 米, 在坡顶 A 处测得铁塔顶点 G 的仰角为 30° (铁塔 GH 与山坡 AB 在同一平面内).

(1) 求山坡的高度;

(2) 求铁塔的高度 GH . (结果保留根号)



【分析】(1) 过点 A 作 AD 垂直 HB 于 D , 作 $AE \parallel BH$ 交 GH 于点 E , 由坡度的定义和锐角三角函数定义分别计算出 BD , 根据勾股定理求出 AD ;

(2) 作 $AE \parallel BH$ 交 GH 于点 E , 根据题意得到四边形 $ADHE$ 是平行四边形, 解直角三角形即可得到结论.

【解答】解: (1) 过点 A 作 AD 垂直 HB , 交 HB 的延长线于点 D ,

即 $\angle ADB = 90^\circ$,

由题意得: $i = 1 : \sqrt{3}$, $AB = 60$ (米),

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

即 $BD = \sqrt{3}AD$;

$$\text{又} \because AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

$$\text{即 } 40^2 = AD^2 + (\sqrt{3}AD)^2,$$

$$\therefore AD = 20 \text{ (米)},$$

答: 山坡的高度为 20 米;

(2) 作 $AE \parallel BH$ 交 GH 于点 E ,

$$\because AD \perp BH, GH \perp BH,$$

$$\therefore AD \parallel GH,$$

即: 四边形 $ADHE$ 是平行四边形,

由题意可知: $\angle GAE = 30^\circ$, $BH = 60$ (米),

$$\therefore BD = \sqrt{3}AD = 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore AE = DH = 60 + 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

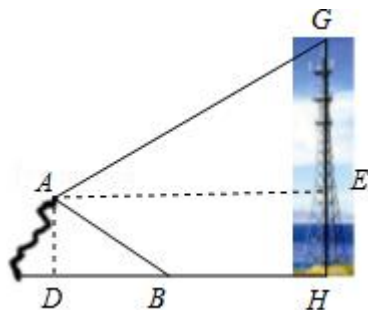
$$\text{在 Rt}\triangle AGE \text{ 中, } \tan \angle GAE = \frac{GE}{AE},$$

$$\therefore GE = 20 + 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\text{又} \because EH = AD = 20 \text{ (米)},$$

$$\therefore GH = GE + EH = 40 + 20\sqrt{3} \text{ (米)},$$

答: 铁塔的高度 GH 为 $(40 + 20\sqrt{3})$ 米.



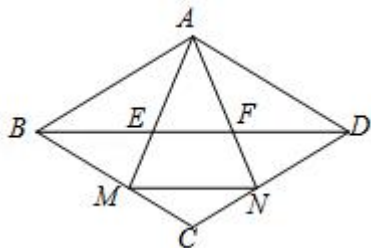
【点评】 此题考查了仰角、坡度的定义, 勾股定理, 能够正确地构建出直角三角形, 将实际问题化归为解直角三角形的问题是解答此类题的关键.

23. (12 分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上, 联结 AM 、

AN 交对角线 BD 于 E 、 F 两点，且 $\angle MAN = \angle ABD$ 。

(1) 求证： $AB^2 = BF \cdot DE$ ；

(2) 若 $\frac{BE}{DE} = \frac{DN}{DC}$ ，求证： $EF \parallel MN$ 。



【分析】(1) 由菱形的性质得 $AB = AD$ ，则 $\angle ABD = \angle ADB$ ，易证 $\angle AED = \angle BAF$ ，则 $\triangle AED \sim \triangle FAB$ ，得 $\frac{AD}{BF} = \frac{DE}{AB}$ ，即 $AD \cdot AB = BF \cdot DE$ ，即可得出结论；

(2) 由菱形的性质得 $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\triangle BME \sim \triangle DAE$ ，得 $\frac{BE}{DE} = \frac{BM}{AD}$ ，进而证出 $\frac{BM}{BC} = \frac{DN}{DC}$ ，则 $MN \parallel BD$ 即可。

【解答】证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\because \angle AED = \angle ABD + \angle BAE, \angle BAF = \angle MAN + \angle BAE, \angle MAN = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BAF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle FAB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{DE}{AB},$$

$$\text{即 } AD \cdot AB = BF \cdot DE,$$

$$\therefore AB^2 = BF \cdot DE;$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle BME \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{BM}{AD},$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{DN}{DC},$$

$$\therefore \frac{BM}{AD} = \frac{DN}{DC},$$

$$\therefore \frac{BM}{BC} = \frac{DN}{DC},$$

$$\therefore MN \parallel BD,$$

$$\therefore EF \parallel MN.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质、菱形的性质、平行线的判定与性质等知识；熟练掌握菱形的性质，证明三角形相似是解题的关键.

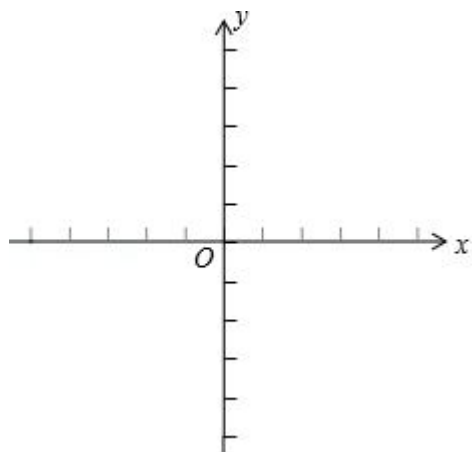
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -\frac{3}{4}x + 2$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 相交于点 A ，抛

物线 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 经过点 A .

(1) 求点 A 的坐标；

(2) 若抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 向上平移两个单位后，经过点 $(1, -2)$ ，求抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式；

(3) 若抛物线 $y = a'x^2 + b'x + c$ ($a' < 0$) 与 $y = ax^2 + bx - 1$ 关于 x 轴对称，且这两条抛物线的顶点分别是点 P' 与点 P ，当 $S_{\triangle OPP'} = 3$ 时，求抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式.



【分析】(1) 联立两直线解析式，解二元一次方程组即可得出答案；

(2) 由抛物线经过点 A 可得出 $b = -4a$ ，由平移的性质可得出答案；

(3) 求出顶点 P 的坐标为 $(2, -4a - 1)$ ，由轴对称的性质可得出 P' 的坐标，求出 PP' 的长，根据三角形的面积公式可得出方程，解方程可得出答案.

【解答】解：(1) $\because$ 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 2$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 相交于点 A ,

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases};$$

∴ 点 A 的坐标为 $(4, -1)$.

(2) ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(4, -1)$,

$$\therefore 16a + 4b - 1 = -1,$$

$$\text{即 } b = -4a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 4ax - 1,$$

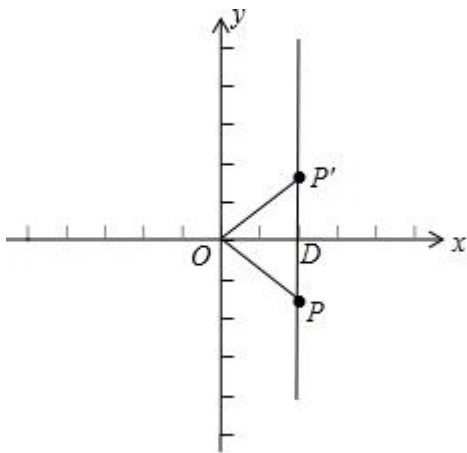
∴ 平移后的抛物线的表达式是 $y = ax^2 - 4ax + 1$,

$$\therefore -2 = a - 4a + 1,$$

$$\text{解得: } a = 1,$$

∴ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式是: $y = x^2 - 4x - 1$.

(3) 如图,



$$\therefore y = ax^2 - 4ax - 1 = a(x - 2)^2 - 4a - 1,$$

$$\therefore P(2, -4a - 1),$$

∵ 抛物线 $y = a'x^2 + b'x + c$ ($a' < 0$) 与 $y = ax^2 - 4ax - 1$ 关于 x 轴对称,

$$\therefore P'(2, 4a + 1),$$

$$\therefore a' < 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore PP' = 8a + 2,$$

$$\text{又 } \because OD = 2, S_{\triangle OPP'} = \frac{1}{2} \times OD \times PP',$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times (8a + 2) = 5,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{8},$$

∴ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 的表达式是 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$.

【点评】本题是二次函数综合题，考查了求两直线的交点坐标，二次函数的性质，待定系数法，平移的性质，轴对称的性质，三角形的面积公式，利用参数列出方程是本题的关键．

25. (14 分) 定理：一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半．如图 1， $\angle A = \frac{1}{2} \angle O$ ．

已知：如图 2， AC 是 $\odot O$ 的一条弦，点 D 在 $\odot O$ 上（与 A 、 C 不重合），联结 DC 交射线 AO 于点 E ，联结 OD ， $\odot O$ 的半径为 5， $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$ ．

(1) 求弦 AC 的长．

(2) 当点 E 在线段 OA 上时，若 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AEC$ 相似，求 $\angle DCA$ 的正切值．

(3) 当 $OE = 1$ 时，求点 A 与点 D 之间的距离（直接写出答案）．

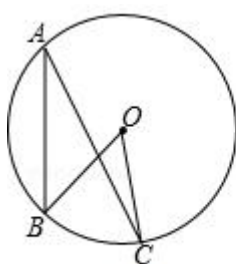


图1

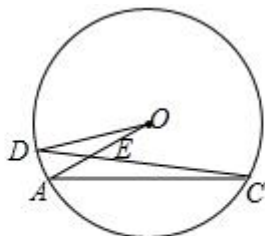
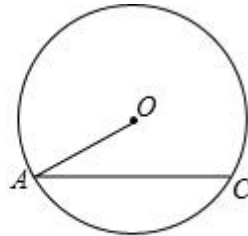


图2



备用图

【分析】(1) 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H ，由垂径定理可得 $AH = BH = \frac{1}{2}AC$ ，由锐角三角函数和勾股定理可求解；

(2) 分两种情况讨论，由相似三角形的性质可求 AG ， EG ， CG 的长，即可求解；

(3) 分两种情况讨论，由相似三角形和勾股定理可求解．

【解答】解：(1) 如图 2，过点 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H ，

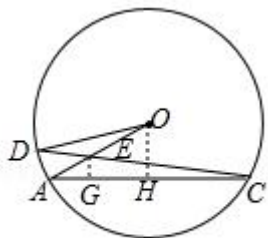


图2

由垂径定理得： $AH = CH = \frac{1}{2}AC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中， $\tan \angle OAC = \frac{OH}{AH} = \frac{3}{4}$ ，

$$\therefore \text{设 } OH = 3x, AH = 4x,$$

$$\therefore OH^2 + AH^2 = OA^2,$$

$$\therefore (3x)^2 + (4x)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得: } x = \pm 1, (x = -1 \text{ 舍去}),$$

$$\therefore OH = 3, AH = 4,$$

$$\therefore AC = 2AH = 8;$$

(2) 如图 2, 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于 H , 过 E 作 $EG \perp AC$ 于 G ,

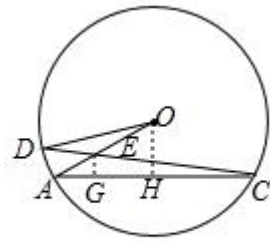


图2

$$\therefore \angle DEO = \angle AEC,$$

$$\therefore \text{当 } \triangle DOE \text{ 与 } \triangle AEC \text{ 相似时可得: } \angle DOE = \angle A \text{ 或者 } \angle DOE = \angle ACD;$$

由定理: 一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半. 可知: $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle DOE$,

$$\therefore \angle ACD \neq \angle DOE$$

$$\therefore \text{当 } \triangle DOE \text{ 与 } \triangle AEC \text{ 相似时, 不存在 } \angle DOE = \angle ACD \text{ 情况,}$$

$$\therefore \text{当 } \triangle DOE \text{ 与 } \triangle AEC \text{ 相似时, } \angle DOE = \angle A,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{OD}{AC} = \frac{OE}{AE},$$

$$\therefore OD = OA = 5, AC = 8,$$

$$\therefore \frac{5}{8} = \frac{5-AE}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{40}{13},$$

$$\therefore \angle AGE = \angle AHO = 90^\circ,$$

$$\therefore GE \parallel OH,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle AOH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{EG}{OH} = \frac{AG}{AH},$$

$$\therefore \frac{\frac{40}{13}}{5} = \frac{EG}{3} = \frac{AG}{4},$$

$$\therefore EG = \frac{24}{13},$$

$$\therefore AG = \frac{32}{13}, CG = 8 - \frac{32}{13} = \frac{72}{13},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEG \text{ 中, } \tan \angle DCA = \frac{EG}{CG} = \frac{\frac{24}{13}}{\frac{72}{13}} = \frac{1}{3};$$

(3) 当点 E 在线段 OA 上时, 如图 3, 过点 E 作 $EG \perp AC$ 于 G , 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于 H , 延长 AO 交 $\odot O$ 于 M , 连接 AD , DM ,

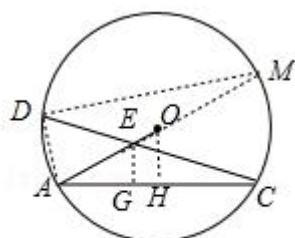


图3

由 (1) 可得 $OH = 3$, $AH = 4$, $AC = 8$,

$$\therefore OE = 1,$$

$$\therefore AE = 4, ME = 6,$$

$$\therefore EG \parallel OH,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle AOH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{AG}{AH} = \frac{EG}{OH} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AG = \frac{16}{5}, EG = \frac{12}{5},$$

$$\therefore GC = \frac{24}{5},$$

$$\therefore EC = \sqrt{GC^2 + EG^2} = \sqrt{\frac{576}{25} + \frac{144}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore AM$ 是直径,

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ = \angle EGC,$$

又 $\therefore \angle M = \angle C$,

$$\therefore \triangle EGC \sim \triangle ADM,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{EC}{AM} &= \frac{EG}{AD}, \\ \frac{\frac{12\sqrt{5}}{5}}{10} &= \frac{12}{AD},\end{aligned}$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{5};$$

当点 E 在线段 AO 的延长线上时, 如图 4, 延长 AO 交 $\odot O$ 于 M , 连接 AD , DM , 过点 E 作 $EG \perp AC$ 于 G ,

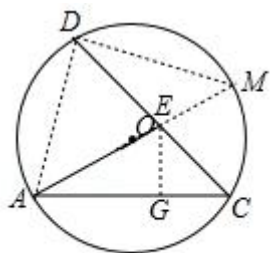


图4

$$\text{同理可求 } EG = \frac{18}{5}, AG = \frac{24}{5}, AE = 6, GC = \frac{16}{5},$$

$$\therefore EC = \sqrt{GC^2 + EG^2} = \sqrt{\frac{324}{25} + \frac{256}{25}} = \frac{2\sqrt{145}}{5},$$

$\because AM$ 是直径,

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ = \angle EGC,$$

又 $\because \angle M = \angle C$,

$$\therefore \triangle EGC \sim \triangle ADM,$$

$$\therefore \frac{EC}{AM} = \frac{EG}{AD},$$

$$\therefore \frac{\frac{2\sqrt{145}}{5}}{10} = \frac{18}{AD},$$

$$\therefore AD = \frac{18\sqrt{145}}{29},$$

综上所述: AD 的长是 $2\sqrt{5}$ 或 $\frac{18}{29}\sqrt{145}$.

【点评】 本题是圆的综合题, 考查了圆的有关性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 锐角三角函数等知识, 难度比较大, 需要有较强的数形结合能力, 添加恰当辅助线构造相似三角形是本题的关键.