

上海市虹口区 2020-2021 学年九年级上学期一模数学试题

一、选择题

1. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 则 $\tan A$ 的值为 ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

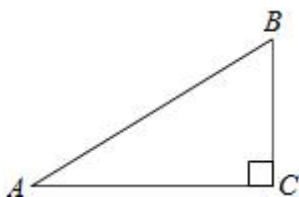
D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】锐角 A 的对边 a 与邻边 b 的比叫做 $\angle A$ 的正切, 记作 $\tan A$, 据此进行计算即可.

【详解】解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,



$\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$,

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}.$$

故选: B.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义的应用, 解题时注意: 在 $Rt\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\tan A = \frac{a}{b}$.

2. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 那么下列等式成立的是 ()

A. $\vec{a} = \vec{b}$

B. $\vec{a} + \vec{b} = 2$

C. $\vec{a} - \vec{b} = 0$

D. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 可知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 由此即可判断.

【详解】解: A、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 但方向不一定相同, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ 不一定成立, 故本选项错误.

B、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 但方向不一定相同, 则 $\vec{a} + \vec{b} = 2$ 不一定成立, 故本选项错误.

C、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 但方向不一定相同, 则 $\vec{a} - \vec{b} = 0$ 不一定成立, 故本选项错误.

D、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 故本选项正确.

故选: D.

【点睛】本题考查平面向量、单位向量, 属于概念题目, 记住概念是解题的关键

3. 下列函数中，属于二次函数的是（ ）

A. $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

B. $y = \sqrt{x^2 - 2}$

C. $y = x^2 - 2$

D. $y = (x - 2)^2 - x^2$

【答案】C

【解析】

【分析】形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)， a ， b ， c 是常数的函数叫做二次函数，其中 a 称为二次项系数， b 称为一次项系数， c 为常数项， x 为自变量， y 为因变量，据此解题.

【详解】A. $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ 右边不是整式，不是二次函数，故 A 错误；

B. $y = \sqrt{x^2 - 2}$ 右边是二次根式，不是整式，不是二次函数，故 B 错误；

C. $y = x^2 - 2$ 是二次函数，故 C 正确；

D. $y = (x - 2)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4x + 4$ 是一次函数，故 D 错误，

故选：C.

【点睛】本题考查二次函数的定义，是基础考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

4. 将抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移 2 个单位后得到的新抛物线表达式是（ ）

A. $y = x^2 - 1$

B. $y = x^2 - 5$

C. $y = (x + 2)^2 - 3$

D. $y = (x - 2)^2 - 3$

【答案】D

【解析】

【分析】先利用顶点式得到抛物线 $y = x^2 - 3$ 的顶点坐标为 $(0, -3)$ ，再利用点平移的坐标规律得到点 $(0, -3)$ 平移后所得对应点的坐标为 $(2, -3)$ ，然后利用顶点式写出平移后得到的抛物线的解析式.

【详解】解：∵原抛物线的顶点坐标为 $(0, -3)$ ，

∴ $y = x^2 - 3$ 向右平移 2 个单位后得到的新抛物线的顶点坐标为 $(2, -3)$ ，

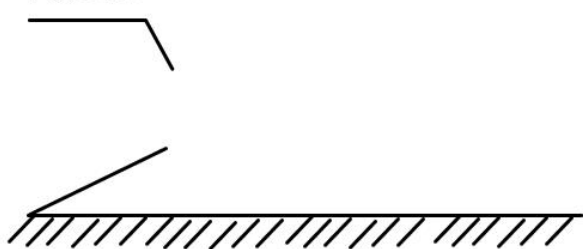
∴新抛物线表达式是 $y = (x - 2)^2 - 3$.

故答案为：D.

【点睛】本题考查了二次函数的平移；得到新抛物线的顶点是解决本题的突破点，用到的知识点为：二次函数的平移不改变二次项的系数.

5. 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度 $i = 1:2.4$ ，如果它把某物体从地面送到离地面 10 米高的地方，那么该物体所经过的路程是（ ）

传送带



A. 10 米

B. 24 米

C. 25 米

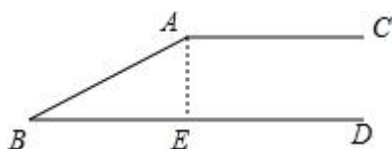
D. 26 米

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据坡度的定义，由勾股定理即可求得答案.

【详解】 解：如图，



由题意得：斜坡 AB 的坡度： $i=1:2.4$ ， $AE=10$ 米， $AE \perp BD$ ，

$$\therefore i = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2.4},$$

$\therefore BE=24$ 米，

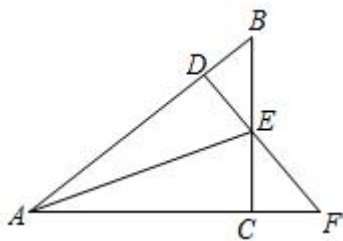
$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 26$ (米).

故选： D.

【点睛】 此题考查了坡度坡角问题. 此题比较简单，注意掌握数形结合思想的应用，注意理解坡度的定义.

6. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AB 上一点，过 D 作 $DF \perp AB$ 交边 BC 于点 E ，交 AC 的延

长线于点 F ，联结 AE ，如果 $\tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ， $S_{\triangle CEF} = 1$ ，那么 $S_{\triangle ABC}$ 的值是 ()



A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

【答案】 C

【解析】

【分析】根据 $\tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ，可得 $\frac{EC}{AC} = \frac{1}{3}$ ，由 $\triangle EFC \sim \triangle ABC$ ，可得相似比为 $\frac{1}{3}$ ，从而得到面积比为 $\frac{1}{9}$ ，进而求出答案.

【详解】 $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC + \angle B = 90^\circ$,

又 $\because DF \perp AB$,

$\therefore \angle ADF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC + \angle F = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle F$,

又 $\because \angle ECF = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ECF \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{EC}{AC} = \frac{CF}{BC} = \tan \angle EAC = \frac{1}{3}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{1}{9}$,

又 $\because S_{\triangle ECF} = 1$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = 9$,

故选: C.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的意义,相似三角形的性质和判断,掌握相似三角形的性质是解决问题的关键.

二、填空题

7. 如果 $a:b=3:2$, 那么 $\frac{a}{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】设 $a=3k$, 然后用 k 表示出 b , 最后代入 $\frac{a}{a+b}$ 计算即可.

【详解】解: 设 $a=3k$

$\because a:b=3:2$

$\therefore 3k:b=3:2$, 即 $3b=6k$, 解得 $b=2k$

$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{3k}{3k+2k} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$.

故答案为 $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题主要考查了比例化简求值，设出中间量、分别表示出 a、b 成为解答本题的关键.

8. 计算: $3\vec{a} - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据向量的线性运算法则进行运算，从而可得答案.

【详解】 解: $3\vec{a} - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

故答案为: $2\vec{a} + 2\vec{b}$.

【点睛】 本题考查的向量的线性运算，掌握向量的加，减，数乘运算是解题的关键.

9. 如果抛物线 $y = x^2 - a$ 经过点 $(2, 0)$ ，那么 a 的值是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 将点 $(2, 0)$ 代入抛物线解析式 $y = x^2 - a$ 即可求得 a 的值.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 - a$ 经过点 $(2, 0)$,

得: $0 = 4 - a$.

解得, $a = 4$,

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质，代入已知量即可求得未知量.

10. 如果抛物线 $y = (k+1)x^2$ 有最高点，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -1$

【解析】

【分析】 根据二次函数 $y = (k+1)x^2$ 有最高点，得出抛物线开口向下，即 $k+1 < 0$ ，即可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = (k+1)x^2$ 有最高点，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore k+1 < 0$,

$\therefore k < -1$,

故答案为: $k < -1$.

【点睛】 此题主要考查二次函数的图象与性质，解题的关键是熟知二次函数的最值与开口方向的特点.

11. 如果抛物线 l 经过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(5, 0)$, 那么该抛物线的对称轴是直线_____.

【答案】 $x = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据抛物线的对称性得对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$.

【详解】 $\because$ 抛物线 l 经过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(5, 0)$,

$\therefore$ 该抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$,

故答案为: $x = \frac{3}{2}$.

【点睛】 此题考查抛物线的对称性, 掌握抛物线的性质是解题的关键.

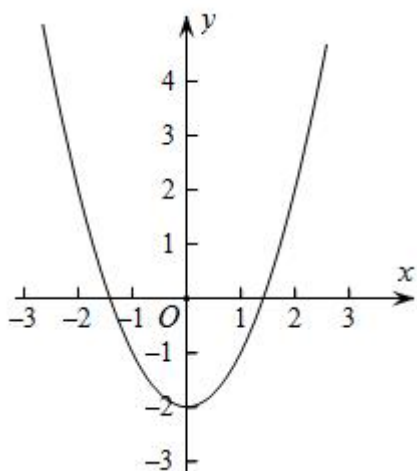
12. 沿着 x 轴正方向看, 抛物线 $y = x^2 - 2$ 在 y 轴左侧的部分是_____的 (填“上升”或“下降”).

【答案】 下降

【解析】

【分析】 画出函数图象, 直观判断即可.

【详解】 抛物线 $y = x^2 - 2$ 的图象如图所示:



可以看出, 在 y 轴左侧部分下降,

故答案为: 下降

【点睛】 本题考查了二次函数图象的性质, 根据题意画出正确图象是解决问题关键.

13. 点 P 是线段 AB 上的一点, 如果 $AP^2 = BP \cdot AB$, 那么 $\frac{AP}{AB}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】设 $AB=1$, $AP=x$, 则 $BP=1-x$, 代入 $AP^2=BP \cdot AB$ 求出 x 的值, 最后代入 $\frac{AP}{AB}$ 即可.

【详解】解: 设 $AB=1$, $AP=x$, 则 $BP=1-x$,

$$\therefore AP^2=BP \cdot AB$$

$$\therefore x^2 = (1-x) \cdot 1, \text{ 即 } x^2+x-1=0, \text{ 解得 } x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (舍)}$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【点睛】本题考查了成比例线段, 设出合适的未知数、根据比例列式求出未知数成为解答本题的关键.

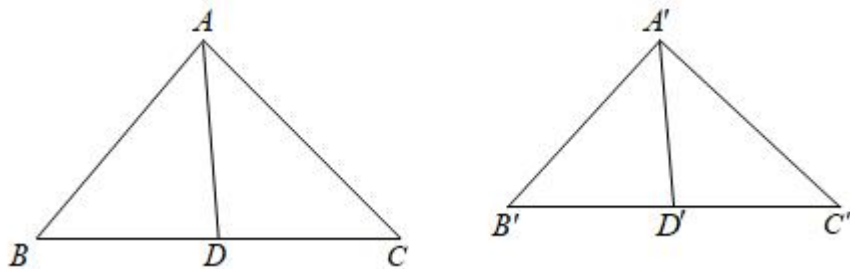
14. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 顶点 A 、 B 、 C 分别与顶点 A' 、 B' 、 C' 对应, AD 、 $A'D'$ 分别是 BC 、 $B'C'$ 边上的中线, 如果 $BC=3$, $AD=2.4$, $B'C'=2$, 那么 $A'D'$ 的长是_____.

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】直接利用相似三角形的性质得出相似比等于对应边上的中线的比进而得出答案.

【详解】解: 如图,



$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \quad BC=3, \quad AD=2.4, \quad B'C'=2,$$

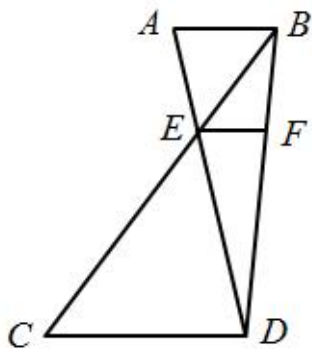
$$\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'} \quad \text{即} \quad \frac{3}{2} = \frac{2.4}{A'D'}$$

$$\therefore A'D' = \frac{8}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{8}{5}.$$

【点睛】此题主要考查了相似三角形的性质, 正确掌握相关性质是解题关键.

15. 如图, $AB \parallel CD$, AD 、 BC 相交于点 E , 过 E 作 $EF \parallel CD$ 交 BD 于点 F , 如果 $AB=3$, $CD=6$, 那么 EF 的长是_____.



【答案】2

【解析】

【分析】选证明 $\triangle ABE \sim \triangle DEC$ 得到 $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ，利用比例性质得到 $\frac{DE}{DA} = \frac{2}{3}$ ，再证明 $EF \parallel AB$ ，

则可判断 $\triangle DEF \sim \triangle DAB$ ，然后利用相似比可得到 $\frac{EF}{AB} = \frac{2}{3}$ ，问题可解.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEC$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{DE}{DA} = \frac{2}{3},$$

$$\because EF \parallel CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAB,$$

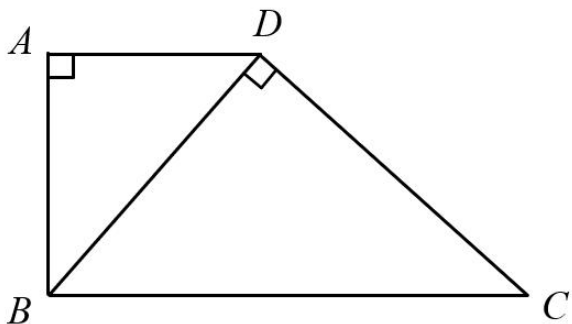
$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EF = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \times 3 = 2,$$

故答案为：2

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形时，应注意利用图中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形.

16. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle BDC = 90^\circ$ ， $AD = 4$ ， $BC = 9$ ，那么 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】6

【解析】

【分析】根据题意可知 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$ ，利用相似三角形对应边成比例，即可求出答案.

【详解】解：在直角梯形 $ABCD$ 中，

$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ, \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC, \angle A = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{BD}{CB}$$

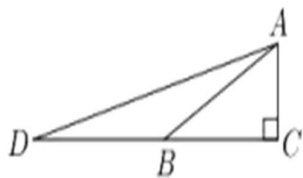
$$\text{又} \because AD=4, BC=9,$$

$$\therefore BD=6$$

故答案为:6.

【点睛】本题考察了直角梯形和相似三角形的判定与性质，解题的关键是得出 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$.

17. 如图，图中提供了一种求 $\cot 15^\circ$ 的方法，作 $Rt\triangle ABC$ ，使 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，再延长 CB 到点 D ，使 $BD = BA$ ，联结 AD ，即可得 $\angle D = 15^\circ$ ，如果设 $AC = t$ ，则可得 $CD = (2 + \sqrt{3})t$ ，那么 $\cot 15^\circ = \cot D = \frac{CD}{AC} = 2 + \sqrt{3}$ ，运用以上方法，可求得 $\cot 22.5^\circ$ 的值是_____.



【答案】 $\sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】作 $Rt\triangle ABC$ ，使 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，再延长 BC 到点 D ，使 $BD = BA$ ，联结 AD ，即可得 $\angle D = 22.5^\circ$ ，设 $AC = t$ ，然后用 t 表示出 CD ，最后根据余切的定义作答即可.

【详解】解：如图：作 $Rt\triangle ABC$ ，使 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，再延长 CB 到点 D ，使 $BD = BA$ ，联结 AD ，

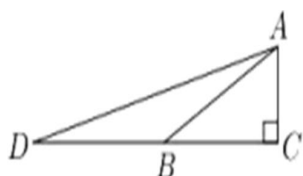
即可得 $\angle D = 22.5^\circ$

设 $AC = t$ ，则 $BC = t$ ， $AB = BD = \sqrt{2}t$

所以 $DC = BC + AB = t + \sqrt{2}t = (1 + \sqrt{2})t$

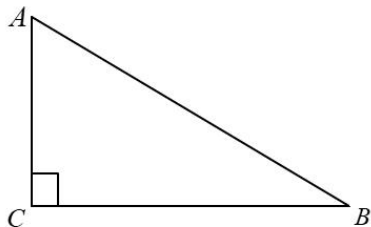
所以 $\cot 22.5^\circ = \frac{DC}{AC} = \frac{(1 + \sqrt{2})t}{t} = 1 + \sqrt{2}$.

故答案为 $1 + \sqrt{2}$.



【点睛】本题主要考查的是解直角三角形和三角函数，构造出含 45° 的直角三角形，再作辅助线得到 22.5° 角的直角三角形成为解答本题的关键.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， D 是 BC 的中点，点 E 在边 AB 上，将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折，使得点 B 落在同一平面内的点 B' 处，线段 $B'D$ 交边 AB 于点 F ，联结 AB' ，当 $\triangle AB'F$ 是直角三角形时， BE 的长为_____.



【答案】2 或 $\frac{40}{17}$

【解析】

【分析】分两种情况讨论，当 $\angle AFB' = 90^\circ$ 时，则 $\angle BFD = 90^\circ$ ，利用锐角三角函数先求解 DF ， BF ， $B'F$ ，设 $BE = x$ ，再表示 $B'E$ ， EF ，再利用勾股定理求解 x 即可得到答案；当 $\angle AB'F = 90^\circ$ 时，如图，连接 AD ，过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ，先证明： $Rt\triangle ADC \cong \triangle ADB'$ ，再证明 $\angle ADE = 90^\circ$ ，设 $BE = 5x$ ，利用 $\triangle B$ 的锐角三角函数可得 $EH = 3$ ， $BH = 4x$ ， $DH = 4 - 4x$ ， $AE = 10 - 5x$ ，利用勾股定理求解 x 可得答案.

【详解】解： $\because AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore AB = 10$,

$\because D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore BD = CD = B'D = 4,$$

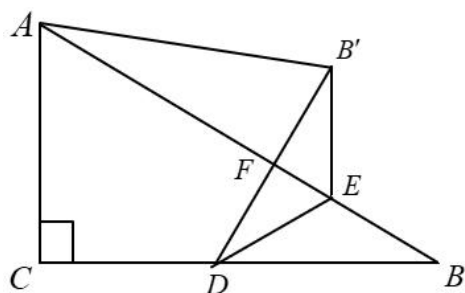
当 $\angle AFB' = 90^\circ$ 时, 则 $\angle BFD = 90^\circ$,

$$\because \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{DF}{DB},$$

$$\therefore DF = \frac{12}{5},$$

$$\therefore BF = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore B'F = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5},$$



设 $BE = x$, 则 $B'E = x$, $EF = BF - x = \frac{16}{5} - x$,

$$\therefore x^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - x\right)^2,$$

$$\therefore x = 2,$$

即: $BE = 2$.

当 $\angle AB'F = 90^\circ$ 时, 如图, 连接 AD , 过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ,

同理可得: $CD = BD = B'D = 4$,

$$\because AD = AD, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore Rt\triangle ADC \cong \triangle ADB' (HL)$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB',$$

$$\because \angle BDE = \angle B'DE,$$

$$\therefore \angle ADB' + \angle B'DE = 90^\circ = \angle ADE,$$

设 $BE = 5x$,

$$\text{由 } \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{EH}{BE},$$

$$\therefore EH = 3x, BH = 4x,$$

$$\therefore DH = 4 - 4x,$$

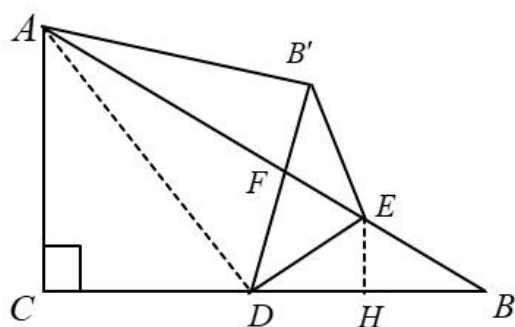
$$\therefore DE^2 = (3x)^2 + (4 - 4x)^2,$$

$$AE^2 = (10 - 5x)^2,$$

$$AD^2 = 6^2 + 4^2 = 52,$$

$$\therefore (10 - 5x)^2 = 52 + (3x)^2 + (4 - 4x)^2,$$

$$\therefore x = \frac{8}{17},$$



$$\therefore BE = 5x = \frac{40}{17}$$

当 $\angle B'AF = 90^\circ$, 不合题意, 舍去.

综上: BE 的长为 2 或 $\frac{40}{17}$.

故答案为: 2 或 $\frac{40}{17}$.

【点睛】 本题考查的是折叠的性质, 轴对称的性质, 勾股定理的应用, 锐角三角函数的应用, 掌握以上知识是解题的关键, 要注意分情况讨论.

三、解答题

19. 计算: $\frac{\tan^2 45^\circ}{\cot 30^\circ - 2 \cos 45^\circ} - 2 \sin 60^\circ$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入求出答案.

【详解】 解: 原式 = $\frac{1^2}{\sqrt{3}-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

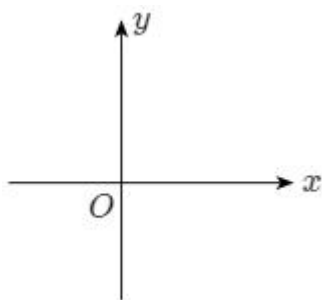
【点睛】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆特殊角的三角函数值是解题关键.

20. 已知二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

(1) 用配方法把该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式;

(2) 选取适当的数据填入下表，并在图中所示的平面直角坐标系 xOy 内描点，画出该函数的图像.

x							
y							



【答案】(1) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$; (2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 直接利用配方法即可把该二次函数的解析式化为顶点式;

(2) 列表、描点、连线，画出函数的图像即可.

【详解】解: (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

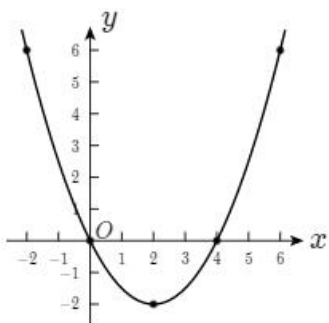
$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2;$$

(2) 填表如下:

x		-2	0	2	4	6	
y		6	0	-2	0	6	

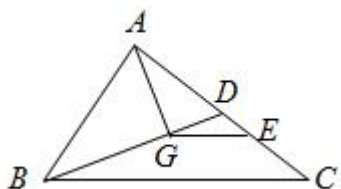
图像如下:



【点睛】此题主要考查了二次函数的性质以及二次函数图象，正确掌握配方法以及画二次函数图象的步骤是解题关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，联结 AG ，联结 BG 并延长交边 AC 于点 D ，过点 G 作 $GE \parallel BC$ 交边 AC 于点 E .

- (1) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BG}$ ；
- (2) 当 $AG \perp BD$ ， $BG = 6$ ， $\angle GAD = 45^\circ$ 时，求 AE 的长.



【答案】(1) $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ；(2) $AE = 4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 由 G 是重心，可得 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ， $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ ，因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ ，可得 $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ，进而求出 $\overrightarrow{BG}$ ；

(2) 根据 G 是重心，求出 $DG=3$ ，因为 $\triangle AGD$ 是等腰直角三角形，勾股定理计算出 $AD=3\sqrt{2}$ ，由 $AD=DC$ ， $DC=3DE$ 求出 $DE=\sqrt{2}$ ，相加即可.

【详解】解：(1) $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ ，

$\because$ 点 G 是 $Rt\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \vec{BD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BD} = \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right),$$

$$\vec{BG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

(2) $\because G$ 是三角形的重心,

$$\therefore BG=2GD, AD=DC,$$

$$\therefore BG=6,$$

$$\therefore GD=3,$$

$$\therefore AG \perp BD, \angle GAD = 45^\circ,$$

$$\therefore AG=GD=3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore GE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{GD}{BD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE = \sqrt{2},$$

$$\therefore AE = AD + DE = 4\sqrt{2}$$

【点睛】 本题考查了三角形的重心、平面向量、勾股定理以及平行线分线段成比例定理；熟练掌握三角形重心的性质以及平行线分线段成比例定理，能够熟练运用向量的运算、勾股定理解题是关键.

22. 图 1 是一款家用落地式取暖器, 如图 2 是其放置在地面上时的侧面示意图, 其中矩形 $ABCD$ 是取暖器的主体, 等腰梯形 $BEFC$ 是底座, $BE = CF$, 烘干架连杆 GH 可绕边 CD 上一点 H 旋转, 以调节角度, 已知 $CD = 50\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $EF = 20\text{cm}$, $DH = 12\text{cm}$, $GH = 15\text{cm}$, $\angle CFE = 30^\circ$, 当 $\angle GHD = 53^\circ$ 时, 求点 G 到地面的距离. (精确到 0.1cm) 【参考数据: $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$, $\sqrt{3} \approx 1.73$ 】



图1

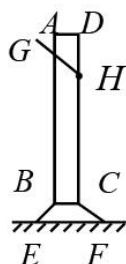


图2

【答案】点 G 到地面的距离为 50.5cm.

【解析】

【分析】过 H 作 $HR \perp AB$, 在 $Rt\triangle HGR$ 中, 利用三角函数求出 GR 的长, 再根据 $RB=CH=DC-DH$, 求出 RB 长, 即可求出 G 到 B 的长度, 过 C 作 $CT \perp EF$, 过 B 作 $BQ \perp EF$, 通过证明 $\triangle BEQ \cong \triangle CFT$, 得出 $EQ=FT$, 在 $Rt\triangle CFT$ 中, 利用三角函数求出 $CT=BQ$ 的长, 由 $GQ=GB+BQ$ 即可求出答案;

【详解】解: 如图, 过 H 作 $HR \perp AB$,

$\because \angle GHD=53^\circ$, 且 $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle HGR=53^\circ$,

在 $Rt\triangle HGR$ 中, $GR=\cos 53^\circ \times GH=\cos 53^\circ \times 15=9$,

$\therefore GB=GR+RB=9+(50-12)=47$,

过 C 作 $CT \perp EF$, 过 B 作 $BQ \perp EF$, 则 $\angle CTF=\angle BQE=90^\circ$,

$\therefore BE=CF$,

$\therefore \angle E=\angle F$,

$\therefore \triangle BEQ \cong \triangle CFT$,

$\therefore EQ=FT$ $BQ=CT$,

$\therefore BC=8\text{cm}, EF=20\text{cm}$,

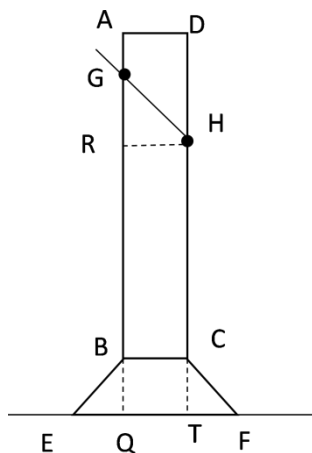
$\therefore EQ=FT=6\text{cm}$,

在 $Rt\triangle CFT$ 中, $\angle CFT=30^\circ$,

$\therefore CT=BQ=\tan 30^\circ \times FT=\frac{\sqrt{3}}{3} \times 6=2\sqrt{3}$,

$\therefore GQ=GB+BQ=47+2\sqrt{3} \approx 47+2 \times 1.73=50.46 \approx 50.5$ (cm),

答: 点 G 到地面的距离约为 50.5cm.



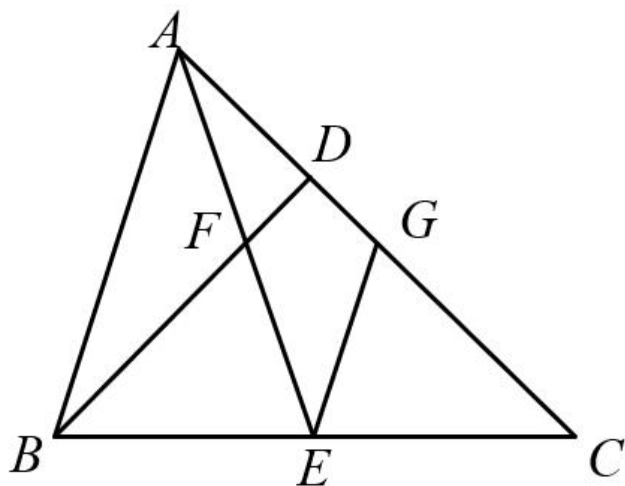
【点睛】本题考查解直角三角形的实际应用、锐角三角函数值等知识点, 解题的关键是构造直角三角形利

用三角函数值求线段长.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 G 在边 AC 上, 点 E 在边 BC 上, $DB=DC$, $EG\parallel AB$, AE 、 BD 交于点 F , $BF=AG$.

(1) 求证: $\triangle BFE \sim \triangle CGE$;

(2) 当 $\angle AEG = \angle C$ 时, 求证: $AB^2 = AG \cdot AC$.



【答案】(1) 证明见详解; (2) 证明见详解.

【解析】

【分析】(1) 由 $EG\parallel AB$ 易证 $\triangle CGE \sim \triangle CAB$, 由性质得 $\frac{CG}{CA} = \frac{CE}{CB}$ 由比例性质得 $\frac{CG}{AG} = \frac{CE}{BE}$, 由已知 $BF=AG$ 比例式变为 $\frac{CG}{BF} = \frac{CE}{BE}$, 由已知 $DB=DC$, 利用等边对等角得 $\angle FBE = \angle GCE$, 利用两边成比例夹角相等知 $\triangle BFE \sim \triangle CGE$;

(2) 由 $EG\parallel AB$, 利用性质内错角相等 $\angle BAE = \angle AEG$, 由已知 $\angle AEG = \angle C$, 推出 $\angle BAE = \angle C$, 又 $\angle ABE = \angle CBA$ 共用, 可证 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$, 由性质 $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{AB}$, $\angle BEA = \angle BAC$, 把比例变等积得 $AB^2 = BC \cdot BE$, 由(1) $\triangle BFE \sim \triangle CGE$ 利用性质 $\angle BEF = \angle CEG$, $\angle BFE = \angle CGE$, 推出 $\angle BAC = \angle GEC = \angle ABC = \angle EGC$, 利用等角对等边得 $AC=BC$, $GC=EC$, 利用等量代换得 $AG=BE$, 可证 $AB^2 = AC \cdot AG$.

【详解】(1) $\because EG\parallel AB$,

$\therefore \angle CGE = \angle CAB$, $\angle CEG = \angle CBA$,

$\therefore \triangle CGE \sim \triangle CAB$,

$\therefore \frac{CG}{CA} = \frac{CE}{CB}$,

$$\therefore \frac{CG}{CA-CG} = \frac{CE}{CB-CE} \text{ 即 } \frac{CG}{AG} = \frac{CE}{BE},$$

$$\therefore BF=AG$$

$$\therefore \frac{CG}{BF} = \frac{CE}{BE},$$

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB, \text{ 即 } \angle FBE = \angle GCE,$$

$$\therefore \triangle BFE \sim \triangle CGE,$$

$$(2) \therefore EG \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEG,$$

$$\text{又} \therefore \angle AEG = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle C,$$

$$\text{又} \therefore \angle ABE = \angle CBA \text{ 共用},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{AB}, \quad \angle BEA = \angle BAC,$$

$$\therefore AB^2 = BC \cdot BE,$$

$$\text{由 (1) } \triangle BFE \sim \triangle CGE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle CEG, \quad \angle BFE = \angle CGE,$$

$$\therefore EG \parallel AB,$$

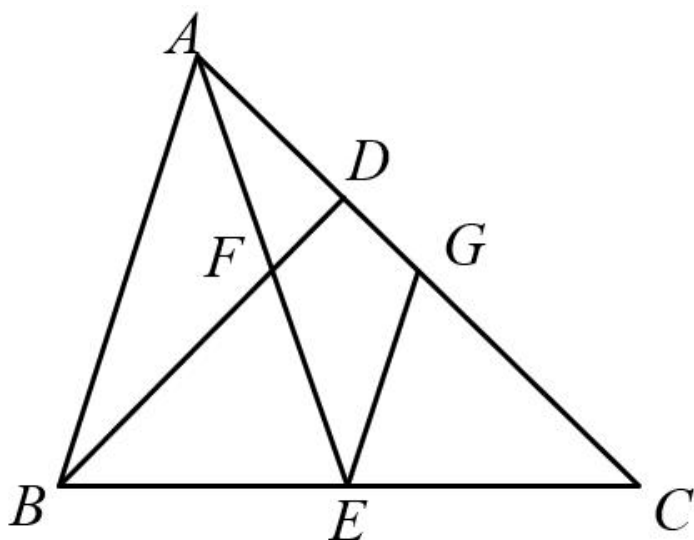
$$\therefore \angle ABC = \angle GEC, \quad \angle BAC = \angle EGC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle GEC = \angle ABC = \angle EGC,$$

$$\therefore AC = BC, \quad GC = EC,$$

$$\therefore AG = BE,$$

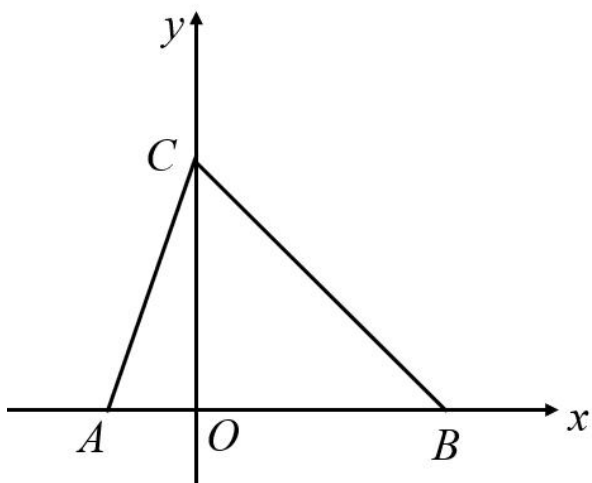
$$AB^2 = BC \cdot BE = AC \cdot AG.$$



【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，掌握相似三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，会利用换比的方法证三角形相似，会利用相似证角等转化边角关系是解题关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,3)$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点.

- (1) 当该抛物线经过点 C 时，求该抛物线的表达式；
- (2) 在 (1) 题的条件下，点 P 为该抛物线上一点，且位于第三象限，当 $\angle PBC = \angle ACB$ 时，求点 P 的坐标；
- (3) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内，求 a 的取值范围.



【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$ ； (2) $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}\right)$ ； (3) $-\frac{1}{2} < a < 0$.

【解析】

【分析】(1) 将点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ，利用待定系数法即可求解；

(2) 先证明 $\triangle AOC \cong \triangle EOB(ASA)$ 得出 $E(0, -1)$ ，利用待定系数法求出直线 PB 的解析式，根据 P 是直线与抛物线的交点，联立解析式即可求出 P 点的坐标；

(3) 根据抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ ，求得抛物线解析式，从而表示出顶点 D 的坐标，利用待定系数法求出直线 BC 的解析式，当 $x=1$ 时， $y=2$ ，根据 D 位于 $\triangle BOC$ 内部，列出关于 a 的不等式即可求解。

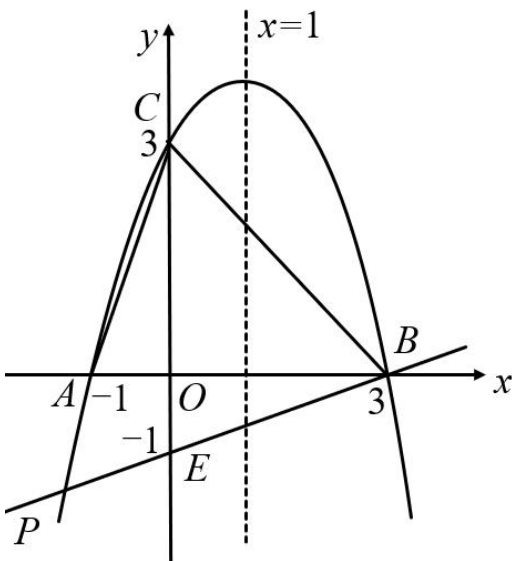
【详解】(1) 将点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{得: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2) 如图:



$\therefore B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$,

$\therefore OB = OC$

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$

当 $\angle PBC = \angle ACB$ 时，则 $\angle PBC - \angle OBC = \angle ACB - \angle OCB$

即 $\angle PBO = \angle ACO$

设 PB 交 y 轴于点 E,

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle EOB$ 中

$$\begin{cases} \angle PBO = \angle ACO \\ OB = OC \\ \angle EOB = \angle AOC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle EOB (\text{ASA})$$

$$\therefore OE = OA = 1$$

$$\therefore E(0, -1)$$

设 PB 的解析式为 $y = mx + n$

将 $B(3, 0)$, $E(0, -1)$ 代入

$$\text{得} \begin{cases} 3m + n = 0 \\ n = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ n = -1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 PB 的解析式为 } y = \frac{1}{3}x - 1,$$

$$\text{联立解析式} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -\frac{13}{9} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}\right).$$

(3) 如图,

$$\therefore y = ax^2 + bx + c \text{ 经过 } A(-1, 0)、B(3, 0)$$

$$\therefore y = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{-2a}{2a} = 1, \text{ 顶点 D 的坐标为 } (1, -4a)$$

由 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 易得 BC 解析式为 $y = -x + 3$

当 $x=1$ 时, $y=2$

因此当 D 位于 $\triangle BOC$ 内时

$$0 < -4a < 2$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < a < 0$$

$$\text{即 } a \text{ 的取值范围是 } -\frac{1}{2} < a < 0.$$

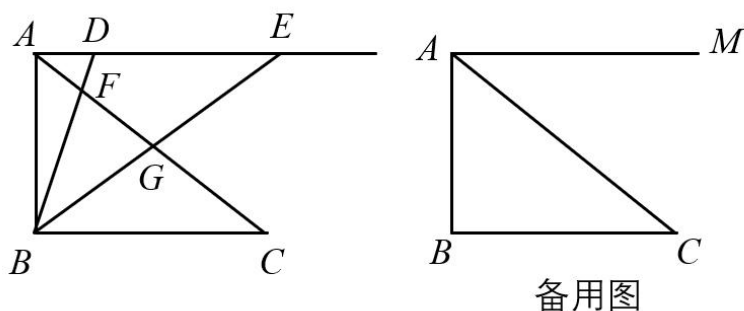
【点睛】 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 解答本题主要应用了待定系数法求一次函数、二次函数的解析式、全等三角形的性质和判定, 证得 $\triangle AOC \cong \triangle EOB$, 从而得到 E 的坐标是解题的关键.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, 过点 A 作射线 $AM \parallel BC$, 点 D 、 E 是射线 AM 上的两点 (点 D 不与点 A 重合, 点 E 在点 D 右侧), 连接 BD 、 BE 分别交边 AC 于点 F 、 G , $\angle DBE = \angle C$.

(1) 当 $AD = 1$ 时, 求 FB 的长

(2) 设 $AD = x$, $FG = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 联结 DG 并延长交边 BC 于点 H , 如果 $\triangle DBH$ 是等腰三角形, 请直接写出 AD 的长.



$$\text{【答案】 (1) } FB = \frac{4}{5}\sqrt{10}; \text{ (2) } y = \frac{4x^2 + 36}{5x + 20} (0 < x < 4); \text{ (3) } AD = \frac{9}{4} \text{ 或 } \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{7}{8}.$$

【解析】

$$\text{【分析】 } \frac{4(x^2 + 9)}{4x + 9}$$

【详解】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD=1$, $AB=3$,

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\because AM \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{AD}{CB} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BF=4DF,$$

$$\therefore FB = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

$$(2) \quad \because \triangle ADF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{AD}{CB} = \frac{x}{4},$$

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 9},$$

$$\therefore BF = \frac{4\sqrt{x^2 + 9}}{4 + x}, \quad DF = \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{4 + x},$$

在 Rt△ABC 中, AB=3, BC=4,

$$\therefore AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 5,$$

$$\therefore AF = \frac{5x}{4 + x},$$

$$\therefore AM \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle C,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle C,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle BFG,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{DF}{FG},$$

$$\therefore AF \cdot FG = BF \cdot DF,$$

$$\therefore FG = y,$$

$$\therefore \frac{5x}{4 + x} \cdot y = \frac{4\sqrt{x^2 + 9}}{4 + x} \cdot \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{4 + x},$$

$$\therefore y = \frac{4x^2 + 36}{5x + 20} (0 < x < 4);$$

$$(3) \quad \because \triangle ADF \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{AD}{BG} = \frac{DF}{FG},$$

$$\therefore \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{4 + x} \cdot BG = \frac{4x\sqrt{x^2 + 9}}{20 + 5x},$$

$$\therefore BG = \frac{4\sqrt{x^2+9}}{5},$$

$$\because AM \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle C, \quad \angle DEB = \angle CBG,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CGB,$$

$$\therefore BE \cdot CG = BC \cdot BD,$$

$$\therefore BE = \frac{5\sqrt{x^2+9}}{4-x},$$

$$\therefore GE = BE - BG = \frac{(4x+9)\sqrt{x^2+9}}{5(4-x)},$$

$$\because AM \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle HBG,$$

$$\therefore DE \cdot BG = BH \cdot EG,$$

$$\therefore BH = \frac{4(x^2+9)}{4x+9},$$

分三种情况:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } BD=BH \text{ 时, } \frac{4(x^2+9)}{4x+9} = \sqrt{x^2+9}, \text{ 解得 } x = \frac{7}{8};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } BD=DH \text{ 时, 则 } BH=2AD=2x,$$

$$\therefore \frac{4(x^2+9)}{4x+9} = 2x, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2};$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } BH=DH \text{ 时, 过 } H \text{ 作 } HP \perp BD \text{ 于 } P, \text{ 此时 } BP = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{x^2+9}}{2},$$

$$\therefore \angle ABD + \angle PBH = \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle PBH,$$

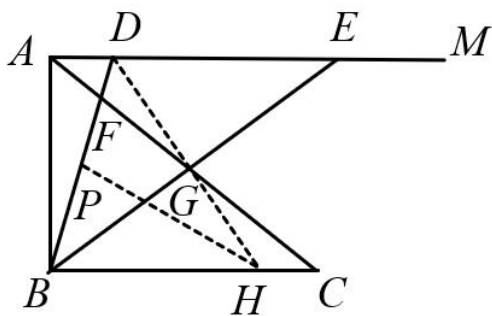
$$\therefore \angle BAD = \angle BPH = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle PHB,$$

$$\therefore BP \cdot BD = BH \cdot AD,$$

$$\therefore \frac{4(x^2+9)}{4x+9} = \frac{x^2+9}{2}, \text{ 解得 } x = \frac{9}{4},$$

综上，线段 AD 的长为 $\frac{9}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{7}{8}$ 。



【点睛】此题考查勾股定理，相似三角形的判定及性质，等腰三角形的性质，分情况讨论问题进行解答，(3) 多次证明三角形相似，目的是求出线段 BH 的长度，再根据等腰三角形的性质进行解答，如用 (2) 的思路进行求解 BH 的长度，则无法进行求值，只能是通过其他方法求 BH，这是此题的难点。

