

# 2020-2021 学年上海市浦东新区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）A、B 两地的实际距离  $AB = 250$  米，如果画在地图上的距离  $A'B' = 5$  厘米，那么地图上的距离与实际距离的比为（ ）

- A. 1: 500                      B. 1: 5000                      C. 500: 1                      D. 5000: 1

2.（4 分）已知在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = \alpha$ ， $AC = 2$ ，那么  $AB$  的长等于（ ）

- A.  $\frac{2}{\sin \alpha}$                       B.  $2\sin \alpha$                       C.  $\frac{2}{\cos \alpha}$                       D.  $2\cos \alpha$

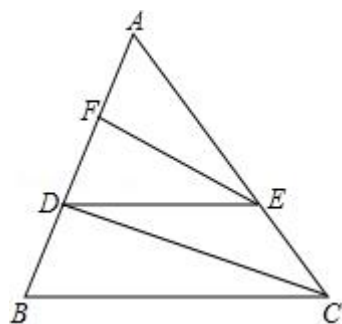
3.（4 分）下列  $y$  关于  $x$  的函数中，一定是二次函数的是（ ）

- A.  $y = (k-1)x^2 + 3$                       B.  $y = \frac{1}{x^2} + 1$   
C.  $y = (x+1)(x-2) - x^2$                       D.  $y = 2x^2 - 7x$

4.（4 分）已知一个单位向量  $\vec{e}$ ，设  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  是非零向量，那么下列等式中正确的是（ ）

- A.  $|\vec{e}| \vec{a} = \vec{a}$                       B.  $|\vec{b}| \vec{e} = \vec{b}$                       C.  $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \vec{e}$                       D.  $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$

5.（4 分）如图，在  $\triangle ABC$  中，点 D、F 是边 AB 上的点，点 E 是边 AC 上的点，如果  $\angle ACD = \angle B$ ， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，下列结论不成立的是（ ）



- A.  $AE^2 = AF \cdot AD$                       B.  $AC^2 = AD \cdot AB$                       C.  $AF^2 = AE \cdot AC$                       D.  $AD^2 = AF \cdot AB$

6.（4 分）已知点 A(1, 2)、B(2, 3)、C(2, 1)，那么抛物线  $y = ax^2 + bx + 1$  可以经过的点是（ ）

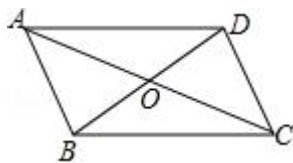
- A. 点 A、B、C                      B. 点 A、B                      C. 点 A、C                      D. 点 B、C

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

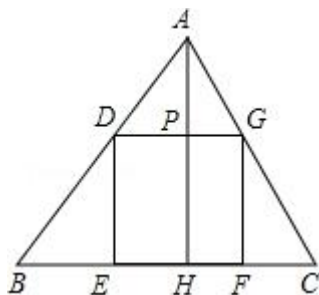
7. (4分) 如果线段  $a$ 、 $b$  满足  $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ , 那么  $\frac{a-b}{b}$  的值等于\_\_\_\_\_.
8. (4分) 已知线段  $MN$  的长为 4, 点  $P$  是线段  $MN$  的黄金分割点, 那么较长线段  $MP$  的长是\_\_\_\_\_.
9. (4分) 计算:  $2\sin 30^\circ - \tan 45^\circ =$ \_\_\_\_\_.
10. (4分) 如果从某一高处甲看低处乙的俯角为  $36^\circ$ , 那么从低处乙看高处甲的仰角是\_\_\_\_\_度.

11. (4分) 已知  $AD$ 、 $BE$  是  $\triangle ABC$  的中线,  $AD$ 、 $BE$  相交于点  $F$ , 如果  $AD = 3$ , 那么  $AF =$ \_\_\_\_\_.

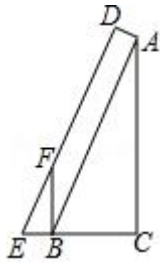
12. (4分) 如图, 已知平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ , 设  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , 那么向量  $\overrightarrow{AB}$  关于  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的分解式为\_\_\_\_\_.



13. (4分) 如果抛物线  $y = (m+4)x^2 + m$  经过原点, 那么该抛物线的开口方向\_\_\_\_\_. (填“向上”或“向下”)
14. (4分) 如果  $(2, y_1)$ 、 $(3, y_2)$  是抛物线  $y = (x+1)^2$  上两点, 那么  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$ . (填“>”或“<”)
15. (4分) 如图, 矩形  $DEFG$  的边  $EF$  在  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上, 顶点  $D$ 、 $G$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上, 已知  $\triangle ABC$  的边  $BC$  长 60 厘米, 高  $AH$  为 40 厘米, 如果  $DE = 2DG$ , 那么  $DG =$ \_\_\_\_\_厘米.



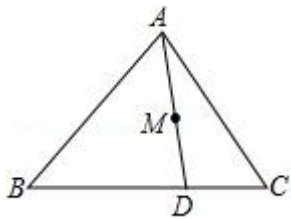
16. (4分) 秦九韶的《数书九章》中有一个“峻积验雪”的例子, 其原理为: 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AD = 0.4$ , 过点  $D$  作  $DE \parallel AB$  交  $CB$  的延长线于点  $E$ , 过点  $B$  作  $BF \perp CE$  交  $DE$  于点  $F$ , 那么  $BF =$ \_\_\_\_\_.



17. (4分) 如果将二次函数的图象平移, 有一个点既在平移前的函数图象上又在平移后的函数图象上, 那么称这个点为“平衡点”.

现将抛物线  $C_1: y = (x-1)^2 - 1$  向右平移得到新抛物线  $C_2$ , 如果“平衡点”为  $(3, 3)$ , 那么新抛物线  $C_2$  的表达式为\_\_\_\_\_.

18. (4分) 如图,  $\triangle ABC$  中,  $AB = 10$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 8$ , 点  $D$  是边  $BC$  上一点, 且  $BD:CD = 2:1$ , 联结  $AD$ , 过  $AD$  中点  $M$  的直线将  $\triangle ABC$  分成周长相等的两部分, 这条直线分别与边  $BC$ 、 $AC$  相交于点  $E$ 、 $F$ , 那么线段  $BE$  的长为\_\_\_\_\_.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

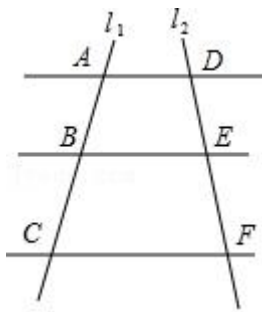
19. (10分) 已知向量关系式  $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{x}) = \vec{b} + 3\vec{x}$ , 试用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示向量  $\vec{x}$ .

20. (10分) 已知抛物线  $y = x^2 + 2x + m - 3$  的顶点在第二象限, 求  $m$  的取值范围.

21. (10分) 如图, 已知  $AD \parallel BE \parallel CF$ , 它们依次交直线  $l_1$ 、 $l_2$  于点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 且  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ .

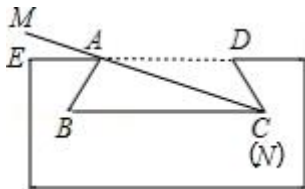
(1) 求  $\frac{DE}{DF}$  的值;

(2) 当  $AD = 5$ ,  $CF = 19$  时, 求  $BE$  的长.



22. (10分) 如图, 燕尾槽的横断面是等腰梯形  $ABCD$ , 现将一根木棒  $MN$  放置在该燕尾槽

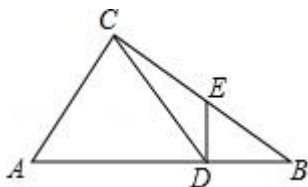
中，木棒与横断面在同一平面内，厚度等不计，它的底端  $N$  与点  $C$  重合，且经过点  $A$ 。已知燕尾角  $\angle B = 54.5^\circ$ ，外口宽  $AD = 180$  毫米，木棒与外口的夹角  $\angle MAE = 26.5^\circ$ ，求燕尾槽的里口宽  $BC$  (精确到 1 毫米)。(参考数据： $\sin 54.5^\circ \approx 0.81$ ,  $\cos 54.5^\circ \approx 0.58$ ,  $\tan 54.5^\circ \approx 1.40$ ,  $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$ ,  $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$ ,  $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$ )



23. (12 分)  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点  $D$ 、 $E$  分别为边  $AB$ 、 $BC$  上的点，且  $CD = CA$ ， $DE \perp AB$ 。

(1) 求证： $CA^2 = CE \cdot CB$ ；

(2) 联结  $AE$ ，取  $AE$  的中点  $M$ ，联结  $CM$  并延长与  $AB$  交于点  $H$ ，求证： $CH \perp AB$ 。

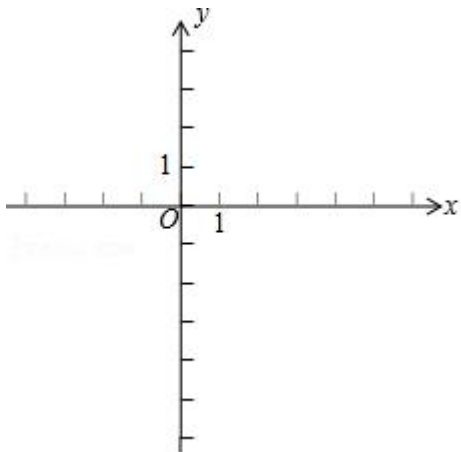


24. (12 分) 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象经过点  $A(2, 4)$ 、 $B(5, 0)$  和  $O(0, 0)$ 。

(1) 求二次函数的解析式；

(2) 联结  $AO$ ，过点  $B$  作  $BC \perp AO$  于点  $C$ ，与该二次函数图象的对称轴交于点  $P$ ，联结  $AP$ ，求  $\angle BAP$  的余切值；

(3) 在 (2) 的条件下，点  $M$  在经过点  $A$  且与  $x$  轴垂直的直线上，当  $\triangle AMO$  与  $\triangle ABP$  相似时，求点  $M$  的坐标。



25. (14 分) 四边形  $ABCD$  是菱形， $\angle B \leq 90^\circ$ ，点  $E$  为边  $BC$  上一点，联结  $AE$ ，过点  $E$  作

$EF \perp AE$ ,  $EF$  与边  $CD$  交于点  $F$ , 且  $EC = 3CF$ .

(1) 如图 1, 当  $\angle B = 90^\circ$  时, 求  $S_{\triangle ABE}$  与  $S_{\triangle ECF}$  的比值;

(2) 如图 2, 当点  $E$  是边  $BC$  的中点时, 求  $\cos B$  的值;

(3) 如图 3, 联结  $AF$ , 当  $\angle AFE = \angle B$  且  $CF = 2$  时, 求菱形的边长.

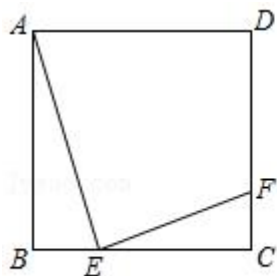


图1

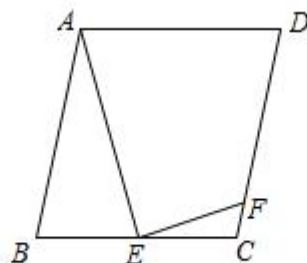


图2

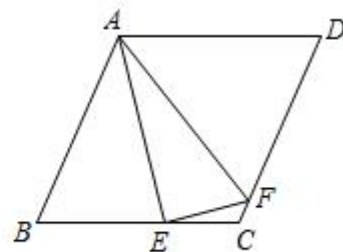


图3

# 2020-2021 学年上海市浦东新区九年级（上）期末数学试卷（一模）

## 参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）A、B 两地的实际距离  $AB = 250$  米，如果画在地图上的距离  $A'B' = 5$  厘米，那么地图上的距离与实际距离的比为（ ）

- A. 1: 500                      B. 1: 5000                      C. 500: 1                      D. 5000: 1

【分析】地图上的距离与实际距离的比就是在地图上的距离  $A'B'$  与实际距离 250 米的比值.

【解答】解：取米作为共同的长度单位，那么  $AB = 250$  米， $A'B' = 5$  厘米  $= 0.05$  米，

$$\text{所以 } \frac{A'B'}{AB} = \frac{0.05}{250} = \frac{1}{5000},$$

所以地图上的距离与实际距离的比为 1: 5000.

故选：B.

【点评】本题考查了比例尺. 注意求距离的比时，首先要把单位统一.

2.（4 分）已知在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = \alpha$ ， $AC = 2$ ，那么  $AB$  的长等于（ ）

- A.  $\frac{2}{\sin \alpha}$                       B.  $2\sin \alpha$                       C.  $\frac{2}{\cos \alpha}$                       D.  $2\cos \alpha$

【分析】根据锐角三角函数的意义即可得出答案.

【解答】解： $\because \sin B = \sin \alpha = \frac{AC}{AB}$ ， $AC = 2$ ，

$$\therefore AB = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha},$$

故选：A.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义，理解锐角三角函数的意义是解决问题的前提.

3.（4 分）下列  $y$  关于  $x$  的函数中，一定是二次函数的是（ ）

- A.  $y = (k-1)x^2 + 3$                       B.  $y = \frac{1}{x^2} + 1$   
C.  $y = (x+1)(x-2) - x^2$                       D.  $y = 2x^2 - 7x$

【分析】利用二次函数定义进行分析即可.

【解答】解：A、当  $k=1$  时，不是二次函数，故此选项不合题意；

B、含有分式，不是二次函数，故此选项不合题意；

C、化简后  $y = -x - 2$ ，不是二次函数，故此选项不合题意；

D、是二次函数，故此选项符合题意；

故选：D.

【点评】此题主要考查了二次函数，关键是掌握判断函数是否是二次函数，首先是要看它的右边是否为整式，若是整式且仍能化简的要先将其化简，然后再根据二次函数的定义作出判断，要抓住二次项系数不为 0 这个关键条件.

4. (4 分) 已知一个单位向量  $\vec{e}$ ，设  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  是非零向量，那么下列等式中正确的是 ( )

A.  $|\vec{e}|\vec{a} = \vec{a}$       B.  $|\vec{b}|\vec{e} = \vec{b}$       C.  $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \vec{e}$       D.  $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$

【分析】根据平面向量的性质一一判断即可.

【解答】解：A、 $|\vec{e}|\vec{a} = \vec{a}$  计算正确，故本选项符合题意.

B、 $|\vec{b}|\vec{e}$  与  $\vec{b}$  的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

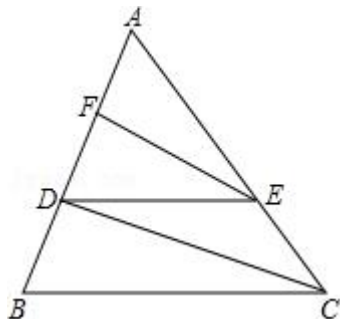
C、 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$  与  $\vec{e}$  的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

D、 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$  与  $\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$  的模相等，方向不一定相同，故错误.

故选：A.

【点评】本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

5. (4 分) 如图，在  $\triangle ABC$  中，点 D、F 是边 AB 上的点，点 E 是边 AC 上的点，如果  $\angle ACD = \angle B$ ， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，下列结论不成立的是 ( )



A.  $AE^2 = AF \cdot AD$       B.  $AC^2 = AD \cdot AB$       C.  $AF^2 = AE \cdot AC$       D.  $AD^2 = AF \cdot AB$

【分析】由相似三角形的判定和性质依次判断可求解.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle AEF = \angle ACD, \angle ADE = \angle B,$$

$$\text{又} \because \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ADE,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AE},$$

$$\therefore AE^2 = AF \cdot AD, \text{故选项 } A \text{ 不合题意};$$

$$\because \angle ACD = \angle B, \angle DAC = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AB \cdot AD, \text{故选项 } B \text{ 不合题意};$$

$$\because DE \parallel BC, EF \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}, \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AD^2 = AB \cdot AF, \text{故选项 } D \text{ 不合题意};$$

由题意无法证明  $AF^2 = AE \cdot AC$ , 故选项  $C$  符合题意,

故选:  $C$ .

**【点评】** 本题考查了相似三角形判定和性质, 掌握相似三角形的判定定理是本题的关键.

6. (4分) 已知点  $A(1, 2)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(2, 1)$ , 那么抛物线  $y = ax^2 + bx + 1$  可以经过的点是 ( )

A. 点  $A$ 、 $B$ 、 $C$       B. 点  $A$ 、 $B$       C. 点  $A$ 、 $C$       D. 点  $B$ 、 $C$

**【分析】** 根据图象上点的坐标特征进行判断.

**【解答】** 解:  $\because B$ 、 $C$  两点的横坐标相同,

$\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + 1$  只能经过  $A$ 、 $C$  两点或  $A$ 、 $B$  两点,

$$\text{把 } A(1, 2), C(2, 1), \text{ 代入 } y = ax^2 + bx + 1 \text{ 得 } \begin{cases} a+b+1=2 \\ 4a+2b+1=1 \end{cases}.$$

$$\text{解得, } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases};$$

$$\text{把 } A(1, 2), B(2, 3), \text{ 代入 } y = ax^2 + bx + 1 \text{ 得 } \begin{cases} a+b+1=2 \\ 4a+2b+1=3 \end{cases}.$$

$$\text{解得, } \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ (不合题意);}$$

∴ 抛物线  $y = ax^2 + bx + 1$  可以经过的  $A, C$  两点,

故选:  $C$ .

【点评】 本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征, 图象上点的坐标适合解析式.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 如果线段  $a, b$  满足  $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ , 那么  $\frac{a-b}{b}$  的值等于  $-\frac{3}{2}$ .

【分析】 由  $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ , 可设  $a = 5k$ , 则  $b = 2k$ , 代入  $\frac{a-b}{b}$ , 计算即可.

【解答】 解: ∵  $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ ,

∴ 可设  $a = 5k$ , 则  $b = 2k$ ,

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{5k-2k}{2k} = \frac{3}{2}.$$

故答案为:  $\frac{3}{2}$ .

【点评】 本题考查了比例线段, 利用设  $k$  法是解题的关键.

8. (4 分) 已知线段  $MN$  的长为 4, 点  $P$  是线段  $MN$  的黄金分割点, 那么较长线段  $MP$  的长是  $2\sqrt{5} - 2$ .

【分析】 根据黄金分割的概念得到  $MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN$ , 把  $MN = 4$  代入计算即可.

【解答】 解: ∵ 线段  $MN$  的长为 4, 点  $P$  是线段  $MN$  的黄金分割点,  $MP > NP$ ,

$$\therefore MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5} - 2,$$

故答案为:  $2\sqrt{5} - 2$ .

【点评】 本题考查了黄金分割的概念: 如果一个点把一条线段分成两条线段, 并且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项, 那么就说这个点把这条线段黄金分割, 这个点叫这条线段的黄金分割点; 较长线段是整个线段的  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  倍.

9. (4 分) 计算:  $2\sin 30^\circ - \tan 45^\circ = 0$ .

【分析】 根据特殊角的三角函数值计算.

【解答】 解: 原式  $= 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ .

【点评】 本题考查特殊角三角函数值的计算, 特殊角三角函数值计算在中考中经常出现, 题型以选择题、填空题为主.

【相关链接】 特殊角三角函数值:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^\circ = 1, \cot 45^\circ = 1;$$

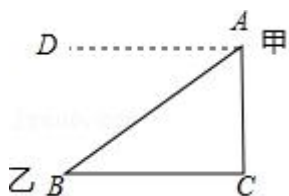
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

10. (4分) 如果从某一高处甲看低处乙的俯角为  $36^\circ$ ，那么从低处乙看高处甲的仰角是 36 度.

【分析】根据仰角以及俯角的定义，画出图形进而求出即可.

【解答】解：如图所示：

$\because$  甲处看乙处为俯角  $36^\circ$ ，



$\therefore$  乙处看甲处为：仰角为  $36^\circ$ ，

故答案为：36.

【点评】此题主要考查了仰角与俯角的定义，仰角是向上看的视线与水平线的夹角；俯角是向下看的视线与水平线的夹角.

11. (4分) 已知  $AD$ 、 $BE$  是  $\triangle ABC$  的中线， $AD$ 、 $BE$  相交于点  $F$ ，如果  $AD=3$ ，那么  $AF=$  2.

【分析】连接  $DE$ ，根据三角形中位线定理得到  $DE = \frac{1}{2}AB$ ， $DE \parallel AB$ ，证明  $\triangle AFB \sim \triangle DFE$ ，根据相似三角形的性质解答即可.

【解答】解：连接  $DE$ ，

$\because AD$ 、 $BE$  是  $\triangle ABC$  的中线，

$\therefore DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, DE \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle DFE,$$

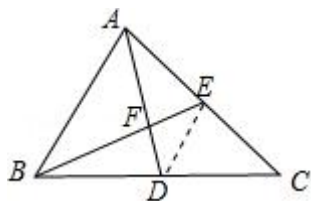
$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{DE} = 2,$$

$$\therefore AF = 2FD,$$

$$\because AD = 3,$$

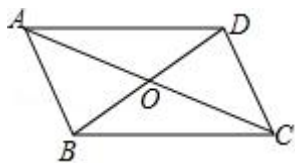
$$\therefore AF = 2,$$

故答案为: 2.



**【点评】** 本题考查的是相似三角形的判定和性质、三角形中位线定理、三角形的中线的概念，掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

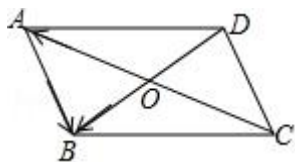
12. (4分) 如图，已知平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ，设  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，那么向量  $\overrightarrow{AB}$  关于  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的分解式为  $\vec{b} - \vec{a}$ .



**【分析】** 由三角形法则可求得向量  $\overrightarrow{AB}$  关于  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的分解式.

**【解答】** 解：如图所示， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ .

故答案是:  $\vec{b} - \vec{a}$ .



**【点评】** 此题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用.

13. (4分) 如果抛物线  $y = (m+4)x^2 + m$  经过原点，那么该抛物线的开口方向 向上. (填“向上”或“向下”)

**【分析】** 根据抛物线  $y = (m+4)x^2 + m$  经过原点，可得  $m = 0$ ，进而可得结论.

**【解答】** 解： $\because$  抛物线  $y = (m+4)x^2 + m$  经过原点，

$$\therefore m = 0,$$

$$\therefore a = 4 > 0,$$

$\therefore$  该抛物线的开口方向向上.

故答案为: 向上.

**【点评】** 本题考查了二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，解决本题的关键

是掌握二次函数的性质.

14. (4分) 如果  $(2, y_1)(3, y_2)$  是抛物线  $y = (x+1)^2$  上两点, 那么  $y_1$  <  $y_2$ . (填 “>” 或 “<”)

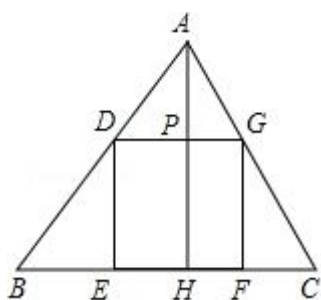
【分析】根据二次函数的性质得到抛物线  $y = (x+1)^2$  的开口向上, 对称轴为直线  $x = -1$ , 则在对称轴右侧,  $y$  随  $x$  的增大而增大.

【解答】解:  $\because y = (x+1)^2$ ,  
 $\therefore a = 1 > 0$ ,  
 $\therefore$  抛物线开口向上,  
 $\because$  抛物线  $y = (x+1)^2$  对称轴为直线  $x = -1$ ,  
 $\because -1 < 2 < 3$ ,  
 $\therefore y_1 < y_2$ .

故答案为 <.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

15. (4分) 如图, 矩形  $DEFG$  的边  $EF$  在  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上, 顶点  $D$ 、 $G$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上, 已知  $\triangle ABC$  的边  $BC$  长 60 厘米, 高  $AH$  为 40 厘米, 如果  $DE = 2DG$ , 那么  $DG =$  15 厘米.



【分析】设  $DG = EF = x$ , 则  $GF = DE = 2x$ , 根据相似三角形对应高的比等于相似比即可求出  $DG$  的长.

【解答】解:  $\because$  四边形  $DEFG$  是矩形,  
 $\therefore DG \parallel BC$ ,  $AH \perp BC$ ,  $DG = EF$ ,  
 $\therefore AP \perp DG$ .  
设  $DG = EF = x$ , 则  $GF = DE = 2x$ ,  
 $\because DG \parallel BC$ ,

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AP}{AH} = \frac{DG}{BC},$$

$$\because AH = 40 \text{ 厘米}, BC = 60 \text{ 厘米},$$

$$\therefore \frac{40-2x}{40} = \frac{x}{60},$$

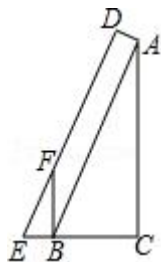
解得  $x = 15$ .

$$\therefore DG = 15 \text{ 厘米},$$

故答案为: 15.

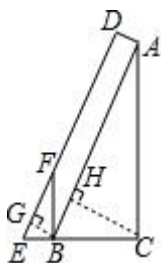
**【点评】** 本题考查了相似三角形的判定与性质, 矩形的性质, 解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

16. (4分) 秦九韶的《数书九章》中有一个“峻积验雪”的例子, 其原理为: 如图, 在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AD = 0.4$ , 过点  $D$  作  $DE \parallel AB$  交  $CB$  的延长线于点  $E$ , 过点  $B$  作  $BF \perp CE$  交  $DE$  于点  $F$ , 那么  $BF = \frac{26}{25}$ .



**【分析】** 作  $CH \perp AB$ ,  $BG \perp DE$  于点  $H$ ,  $G$ , 根据已知条件证明四边形  $ADGB$  是矩形, 再根据等面积法求出  $CH$ , 证明  $\triangle FBE \sim \triangle ACB$ , 利用对应高的比等于相似比即可求出  $BF$  的长.

**【解答】** 解: 如图, 作  $CH \perp AB$ ,  $BG \perp DE$  于点  $H$ ,  $G$ ,



$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore BG \perp AB,$$

$$\because AD \perp AB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle ABG = \angle BGD = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $ADGB$  是矩形,

$$\therefore BG = AD = 0.4,$$

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \cdot AC = \frac{1}{2} \times AB \cdot CH,$$

$$\therefore CH = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13},$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle E = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle FBE = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FBE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore CH \perp AB, BG \perp DE,$$

$$\therefore \frac{BF}{AC} = \frac{BG}{CH},$$

$$\therefore \frac{BF}{12} = \frac{0.4}{\frac{60}{13}},$$

$$\therefore BF = \frac{26}{25}.$$

故答案为:  $\frac{26}{25}$ .

**【点评】** 本题考查了相似三角形的判定与性质, 矩形的判定与性质, 等面积法, 解决本题的关键是综合运用以上知识.

17. (4 分) 如果将二次函数的图象平移, 有一个点既在平移前的函数图象上又在平移后的函数图象上, 那么称这个点为“平衡点”.

现将抛物线  $C_1: y = (x - 1)^2 - 1$  向右平移得到新抛物线  $C_2$ , 如果“平衡点”为  $(3, 3)$ , 那么新抛物线  $C_2$  的表达式为  $y = (x - 5)^2 - 1$ .

**【分析】** 设将抛物线  $C_1: y = (x - 1)^2 - 1$  向右平移  $m$  个单位, 则平移后的抛物线解析式是  $y = (x - 1 - m)^2 - 1$ , 然后将  $(3, 3)$  代入得到关于  $m$  的方程, 通过解方程求得  $m$  的值即可.

**【解答】** 解: 设将抛物线  $C_1: y = (x - 1)^2 - 1$  向右平移  $m$  个单位, 则平移后的抛物线解析式是  $y = (x - 1 - m)^2 - 1$ ,

将  $(3, 3)$  代入, 得  $(3 - 1 - m)^2 - 1 = 3$ .

整理, 得  $2 - m = \pm 2$

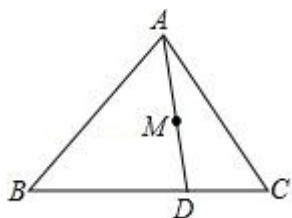
解得  $m_1 = 0$  (舍去),  $m_2 = 4$ .

故新抛物线  $C_2$  的表达式为  $y = (x - 5)^2 - 1$ .

故答案是:  $y = (x - 5)^2 - 1$ .

**【点评】** 本题主要考查了二次函数图象与几何变换, 二次函数图象上点的坐标特征以及待定系数法确定函数关系式, 解题的关键是理解“平衡点”的含义.

18. (4分) 如图,  $\triangle ABC$  中,  $AB = 10$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 8$ , 点  $D$  是边  $BC$  上一点, 且  $BD:CD = 2:1$ , 联结  $AD$ , 过  $AD$  中点  $M$  的直线将  $\triangle ABC$  分成周长相等的两部分, 这条直线分别与边  $BC$ 、 $AC$  相交于点  $E$ 、 $F$ , 那么线段  $BE$  的长为 2.



**【分析】** 先求出  $BD = 8$ ,  $CD = 4$ , 再求出  $MH = 4$ ,  $DH = 2$ , 设  $BE = x$ , 得出  $CE = 12 - x$ ,  $CF = 3 + x$ ,  $EH = 10 - x$ , 再判断出  $\triangle EHM \sim \triangle ECF$ , 得出比例式, 建立方程求解, 即可得出结论.

**【解答】** 解: 如图,  $\because$  点  $D$  是  $BC$  上一点,  $BC = 12$ ,

$$\therefore BD:CD = 2:1,$$

$$\therefore BD = 8, CD = 4,$$

过点  $M$  作  $MH \parallel AC$  交  $CD$  于  $H$ ,

$$\therefore \triangle DHM \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{MH}{AC} = \frac{DH}{CD} = \frac{DM}{AD},$$

$\therefore$  点  $M$  是  $AD$  的中点,

$$\therefore AD = 2DM,$$

$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore \frac{MH}{8} = \frac{DH}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore MH = 4, DH = 2,$$

过点  $M$  作  $MG \parallel AB$  交  $BD$  于  $G$ ,

同理得,  $BG = DE = 4$ ,

$\because AB = 10, BC = 12, AC = 8$ ,

$\therefore \triangle ABC$  的周长为  $10+12+8 = 30$ ,

$\therefore$  过  $AD$  中点  $M$  的直线将  $\triangle ABC$  分成周长相等的两部分,

$\therefore CE + CF = 15$ ,

设  $BE = x$ , 则  $CE = 12 - x$ ,

$\therefore CF = 15 - (12 - x) = 3 + x, EH = CE - CH = CE - (CD - DH) = 12 - x - 2 = 10 - x$ ,

$\therefore MH \parallel AC$ ,

$\therefore \triangle EHM \sim \triangle ECF$ ,

$$\therefore \frac{MH}{CF} = \frac{EH}{CE},$$

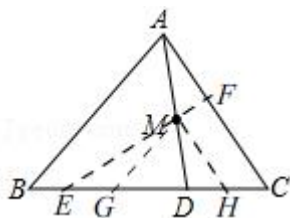
$$\therefore \frac{4}{3+x} = \frac{10-x}{12-x},$$

$\therefore x = 2$  或  $x = 9$ ,

当  $x = 9$  时,  $CF = 12 > AC$ , 点  $F$  不在边  $AC$  上, 此种情况不符合题意,

即  $BD = x = 2$ ,

故答案为: 2.



**【点评】** 此题主要考查了相似三角形的判定和性质, 构造出相似三角形是解本题的关键.

### 三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 已知向量关系式  $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{x}) = \vec{b} + 3\vec{x}$ , 试用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示向量  $\vec{x}$ .

**【分析】** 在已知关系式中, 求出  $x$  即可解决问题.

**【解答】** 解: 由  $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{x}) = \vec{b} + 3\vec{x}$ , 得  $\vec{a} - \vec{x} = 2\vec{b} + 6\vec{x}$ ,

所以  $7\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$ .

所以  $\vec{x} = \frac{1}{7}(\vec{a} - 2\vec{b})$ .

**【点评】** 本题考查平面向量, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

20. (10 分) 已知抛物线  $y = x^2 + 2x + m - 3$  的顶点在第二象限, 求  $m$  的取值范围.

【分析】先利用配方法得到抛物线的顶点坐标为  $(-1, m-4)$ ，再利用第二象限点的坐标特征得到  $m-4 > 0$ ，然后解不等式即可。

【解答】解： $\because y = x^2 + 2x + m - 3 = (x+1)^2 + m - 4$ ，

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(-1, m-4)$ ，

$\because$  抛物线  $y = x^2 + 2x + m - 3$  顶点在第二象限，

$\therefore m - 4 > 0$ ，

$\therefore m > 4$ 。

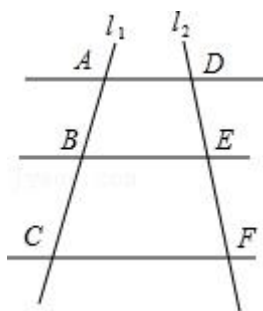
故  $m$  的取值范围为  $m > 4$ 。

【点评】本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的顶点坐标为  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 。

21. (10分) 如图，已知  $AD \parallel BE \parallel CF$ ，它们依次交直线  $l_1$ 、 $l_2$  于点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，且  $AB = 6$ ， $BC = 8$ 。

(1) 求  $\frac{DE}{DF}$  的值；

(2) 当  $AD = 5$ ， $CF = 19$  时，求  $BE$  的长。



【分析】(1) 直接根据平行线分线段成比例定理求解；

(2) 过  $D$  点作  $DM \parallel AC$  交  $CF$  于  $M$ ，交  $BE$  于  $N$ ，如图，易得四边形  $ABND$  和四边形  $ACMD$  都是平行四边形，所以  $BN = CM = AD = 5$ ，则  $MF = 14$ ，再利用  $NE \parallel MF$ ，所以  $\frac{NE}{MF} = \frac{DE}{DF} = \frac{3}{7}$ ，然后利用比例的性质计算出  $NE$ ，最后计算  $BN + NE$  即可。

【解答】解：(1)  $\because AD \parallel BE \parallel CF$ ，

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{6+8} = \frac{3}{7}；$$

(2) 过  $D$  点作  $DM \parallel AC$  交  $CF$  于  $M$ ，交  $BE$  于  $N$ ，如图，

$\because AD \parallel BN \parallel CM$ ， $AC \parallel DM$ ，

$\therefore$  四边形  $ABND$  和四边形  $ACMD$  都是平行四边形，

$$\therefore BN = AD = 5, \quad CM = AD = 5,$$

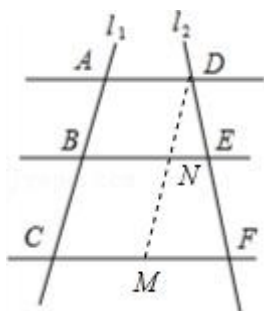
$$\therefore MF = CF - CM = 19 - 5 = 14,$$

$$\because NE \parallel MF,$$

$$\therefore \frac{NE}{MF} = \frac{DE}{DF} = \frac{3}{7},$$

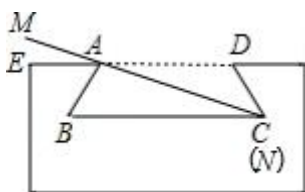
$$\therefore NE = \frac{3}{7}MF = \frac{3}{7} \times 14 = 6,$$

$$\therefore BE = BN + NE = 5 + 6 = 11.$$



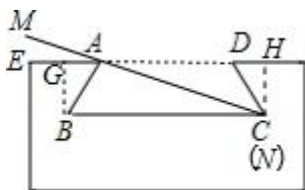
**【点评】** 本题考查了平行线分线段成比例：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例。

22. (10分) 如图，燕尾槽的横断面是等腰梯形  $ABCD$ ，现将一根木棒  $MN$  放置在该燕尾槽中，木棒与横断面在同一平面内，厚度等不计，它的底端  $N$  与点  $C$  重合，且经过点  $A$ 。已知燕尾角  $\angle B = 54.5^\circ$ ，外口宽  $AD = 180$  毫米，木棒与外口的夹角  $\angle MAE = 26.5^\circ$ ，求燕尾槽的里口宽  $BC$  (精确到1毫米)。(参考数据： $\sin 54.5^\circ \approx 0.81$ ,  $\cos 54.5^\circ \approx 0.58$ ,  $\tan 54.5^\circ \approx 1.40$ ,  $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$ ,  $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$ ,  $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$ )



**【分析】** 如图，过点  $B$  作  $BG \perp DE$  于  $G$ ，过点  $C$  作  $CH \perp AD$  于  $H$ 。证明  $\triangle BGA \cong \triangle CHD$  (AAS)，推出  $AG = DH$ ，设  $AG = DH = x$  毫米， $CH = y$  毫米，构建方程组求解即可。

**【解答】** 解：如图，过点  $B$  作  $BG \perp DE$  于  $G$ ，过点  $C$  作  $CH \perp AD$  于  $H$ 。



$\because$  四边形  $ABCD$  是等腰梯形，

$$\therefore AB = DC, \angle BAD = \angle CDA,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle CDH,$$

$$\because \angle BGA = \angle CHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BGA \cong \triangle CHD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AG = DH,$$

设  $AG = DH = x$  毫米,  $CH = y$  毫米,

$$\text{则有} \begin{cases} \frac{y}{180+x} = 0.50 \\ \frac{y}{x} = 1.40 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 100 \\ y = 140 \end{cases},$$

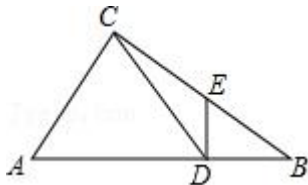
$$\therefore BC = GH = AG + AD + DH = 100 + 180 + 100 = 380 \text{ (毫米)}.$$

**【点评】** 本题考查解直角三角形的应用, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 学会利用参数构建方程组解决问题.

23. (12分)  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 点  $D$ 、 $E$  分别为边  $AB$ 、 $BC$  上的点, 且  $CD = CA$ ,  $DE \perp AB$ .

(1) 求证:  $CA^2 = CE \cdot CB$ ;

(2) 联结  $AE$ , 取  $AE$  的中点  $M$ , 联结  $CM$  并延长与  $AB$  交于点  $H$ , 求证:  $CH \perp AB$ .



**【分析】** (1) 通过证明  $\triangle DCE \sim \triangle BCD$ , 可得  $\frac{DC}{BC} = \frac{CE}{CD}$ , 可得结论;

(2) 由直角三角形的性质可得  $AM = ME = CM$ , 进而可得  $\angle MCE = \angle MEC$ , 通过证明点  $A$ , 点  $C$ , 点  $E$ , 点  $D$  四点共圆, 可得  $\angle AEC = \angle ADC$ , 由余角的性质可得结论.

**【解答】** 证明: (1)  $\because DE \perp AB$ ,

$$\therefore \angle EDB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ = \angle B + \angle DEB,$$

$$\therefore \angle A = \angle DEB,$$

$$\because CA = CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDA,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle DEB,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle CED,$$

$$\text{又} \because \angle DCE = \angle DCB,$$

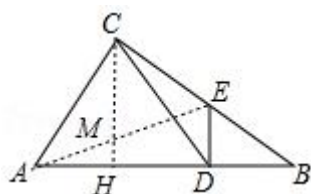
$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = CE \cdot CB,$$

$$\therefore CA^2 = CE \cdot CB;$$

(2) 如图,



$\because \angle ACE$  是直角三角形, 点  $M$  是  $AE$  中点,

$$\therefore AM = ME = CM,$$

$$\therefore \angle MCE = \angle MEC,$$

$$\because \angle ACB = \angle ADE = 90^\circ,$$

$\therefore$  点  $A$ , 点  $C$ , 点  $E$ , 点  $D$  四点共圆,

$$\therefore \angle AEC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle MCE = \angle ADC = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle MCE + \angle ACH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle ACH = 90^\circ,$$

$$\therefore CH \perp AB.$$

**【点评】** 本题考查了相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 掌握相似三角形的判定定理是本题的关键.

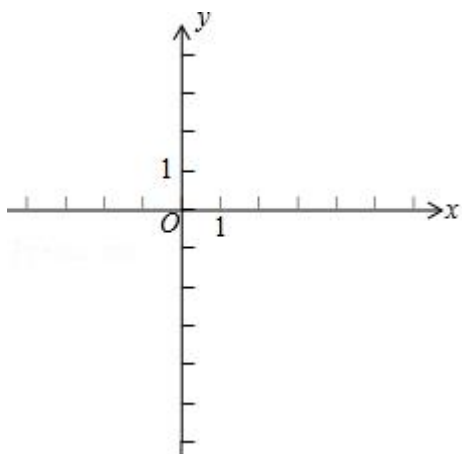
24. (12 分) 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象经过点  $A(2, 4)$ 、 $B(5, 0)$  和  $O(0, 0)$ .

(1) 求二次函数的解析式;

(2) 联结  $AO$ , 过点  $B$  作  $BC \perp AO$  于点  $C$ , 与该二次函数图象的对称轴交于点  $P$ , 联结  $AP$ , 求  $\angle BAP$  的余切值;

(3) 在 (2) 的条件下, 点  $M$  在经过点  $A$  且与  $x$  轴垂直的直线上, 当  $\triangle AMO$  与  $\triangle ABP$

相似时，求点  $M$  的坐标．



【分析】（1）利用待定系数法，即可得出结论；

（2）先判断出  $OB = AB$ ，进而判断出  $\triangle OBP \cong \triangle ABP$ ，得出  $\angle BOP = \angle BAP$ ，再求出直线  $BC$  的解析式，求出点  $P$  的坐标，构造直角三角形，即可得出结论；

（3）先判断出  $\angle OAE = \angle OBC$ ，进而得出  $OM = AM$  或  $OA = OM$ ，即可得出结论．

【解答】解：（1）二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象经过点  $B(5, 0)$  和  $O(0, 0)$ ，

$\therefore$  设二次函数的解析式为  $y = ax(x - 5)$ ，

将点  $A(2, 4)$  代入  $y = ax(x - 5)$  中，得  $4 = a \times 2(2 - 5)$ ，

$$\therefore a = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = -\frac{2}{3}x(x - 5) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x;$$

（2）如图 1，连接  $OP$ ，

$\because A(2, 4)$ 、 $B(5, 0)$  和  $O(0, 0)$ ，

$$\therefore OB = 5, AB = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore OB = AB,$$

$$\because BC \perp OA,$$

$\therefore BC$  是  $OA$  的垂直平分线，

$$\therefore AP = OP,$$

$$\therefore BP = BP$$

$$\therefore \triangle OBP \cong \triangle ABP (SSS),$$

$$\therefore \angle BOP = \angle BAP,$$

$$\because AC = OC, A(2, 4),$$

$$\therefore \text{点 } C(1, 2),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

$$\text{由 (1) 知, 二次函数的解析式为 } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right),$$

$$\therefore OD = \frac{5}{2}, PD = \frac{5}{4},$$

$$\therefore \cot \angle BAP = \cot \angle BOP = \frac{OD}{PD} = 2;$$

$$(3) \because BC \perp OA, AE \perp OB,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle BME,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OBC,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 在抛物线的对称轴上,}$$

$$\therefore OP = OB,$$

$$\therefore \triangle BOP \text{ 是等腰三角形,}$$

$$\therefore \triangle AMO \text{ 与 } \triangle ABP \text{ 相似,}$$

$$\therefore \triangle AMO \text{ 与 } \triangle OBP \text{ 相似,}$$

$$\therefore OM = AM \text{ 或 } OA = OM,$$

$$\text{设 } M(2, m),$$

$$\text{当 } OM = AM \text{ 时, } OM = AM = 4 - m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OEM \text{ 中, } EM = m, \text{ 根据勾股定理得, } OM^2 - EM^2 = OE^2,$$

$$\therefore (4 - m)^2 - m^2 = 4, \therefore m = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } OA = OM \text{ 时, } AE = ME,$$

$$\therefore M(2, -4)$$

$$\text{即满足条件的点 } M \text{ 的坐标为 } \left(2, \frac{3}{2}\right) \text{ 或 } (2, -4).$$

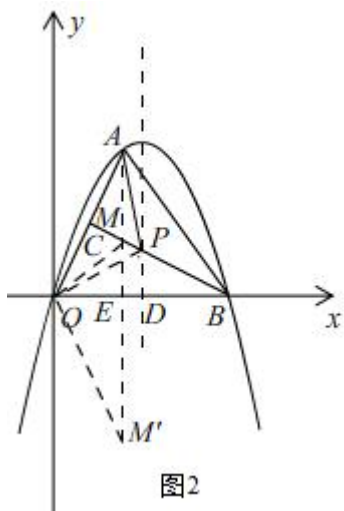


图2

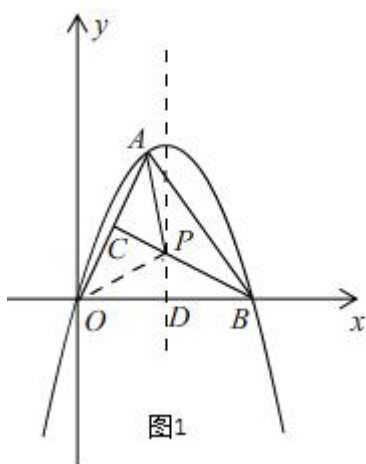


图1

**【点评】**此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的性质，锐角三角函数，利用方程的思想解决问题是解本题的关键．

25. (14分) 四边形  $ABCD$  是菱形， $\angle B \leq 90^\circ$ ，点  $E$  为边  $BC$  上一点，联结  $AE$ ，过点  $E$  作  $EF \perp AE$ ， $EF$  与边  $CD$  交于点  $F$ ，且  $EC = 3CF$ ．

- (1) 如图1，当  $\angle B = 90^\circ$  时，求  $S_{\triangle ABE}$  与  $S_{\triangle ECF}$  的比值；
- (2) 如图2，当点  $E$  是边  $BC$  的中点时，求  $\cos B$  的值；
- (3) 如图3，联结  $AF$ ，当  $\angle AFE = \angle B$  且  $CF = 2$  时，求菱形的边长．

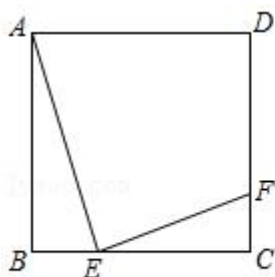


图1

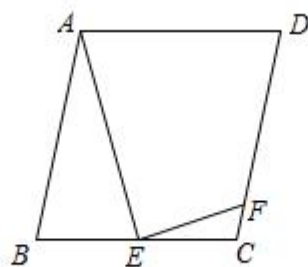


图2

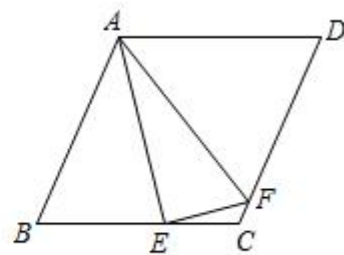


图3

【分析】(1) 证明四边形  $ABCD$  是正方形，再证明  $\triangle ABE \cong \triangle CEF$ ，设  $CF = x$ ， $AB = a$ ，运用相似三角形的相似比求得  $a$  与  $x$  的关系，进而根据相似三角形的性质求得面积比；

(2) 过点  $A$  作  $AM \perp BC$  于点  $M$ ，过点  $F$  用  $FN \perp BC$  于点  $H$ ，证明  $\triangle AME \sim \triangle ENF$ ，设  $CF = x$ ，用  $x$  与  $\angle B$  的正、余弦值表示  $AM$ 、 $ME$ 、 $EN$ 、 $NF$ ，进而根据相似三角形的性质列出比例式，整理比例式便可得出结果；

(3) 过点  $A$  作  $AM \perp BC$  于点  $M$ ，过点  $F$  用  $FN \perp BC$  于点  $H$ ，由  $\angle B = \angle AFE$ ，得  $\frac{AM}{BM} = \frac{AE}{EF}$ ，再证明  $\triangle AME \sim \triangle ENF$ ，得出  $BM = EN$ ，设菱形  $ABCD$  的边长为  $a$ ，由  $BM = EN$ ，得到用  $\cos B$  的代数式表示  $a$ ，再结合  $\triangle AME \sim \triangle ENF$  的比例线段求得  $a$  的值便可。

【解答】解：(1)  $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形， $\angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\because EF \perp AE$ ，

$\therefore \angle AEB + \angle CEF = \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle CEF$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CEF$ ，

$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{EC}$ ，

$\because EC = 3CF$ ，

设  $CF = x$ ， $AB = a$ ，则  $EC = 3x$ ， $BE = a - 3x$ ，

$\therefore \frac{a-3x}{x} = \frac{a}{3x}$ ，

解得， $a = 4.5x$ ，

$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ECF}} = \left(\frac{AB}{EC}\right)^2 = \left(\frac{4.5x}{3x}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ；

(2) 过点  $A$  作  $AM \perp BC$  于点  $M$ ，过点  $F$  用  $FN \perp BC$  于点  $H$ ，如图 2，

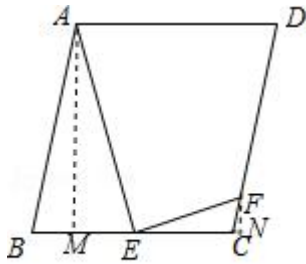


图2

则  $\angle AME = \angle CNF = 90^\circ$  ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$\therefore AB = BC, AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle B = \angle FCN$ ,

设  $CF = x$ , 则  $CE = 3x$ ,

$\because E$  是  $BC$  的中点,

$\therefore BE = CE = 3x, AB = BC = 2CE = 6x$ ,

$\therefore BM = AB \cdot \cos B = 6x \cos B, AM = AB \cdot \sin B = 6x \sin B, CN = CF \cdot \cos \angle FCN = x \cos B, FN =$

$CF \cdot \sin \angle FCN = x \sin B$ ,

$\therefore ME = BE - BM = 3x - 6x \cos B, EN = EC + CN = 3x + x \cos B$ ,

$\because \angle AEF = 90^\circ$  ,

$\therefore \angle AEM + \angle NEF = \angle AEM + \angle MAE = 90^\circ$  ,

$\therefore \angle MAE = \angle NEF$ ,

$\therefore \triangle AME \sim \triangle ENF$ ,

$\therefore \frac{AM}{EN} = \frac{ME}{NF}$ ,

即  $\frac{6x \sin B}{3x + x \cos B} = \frac{3x - 6x \cos B}{x \sin B}$ , 即  $\frac{2 \sin B}{3 + \cos B} = \frac{1 - 2 \cos B}{\sin B}$ ,

整理得,  $2 \sin^2 B = 3 - 5 \cos B - 2 \cos^2 B$ ,

$\therefore 2 = 3 - 5 \cos B$ ,

$\therefore \cos B = \frac{1}{5}$ ;

(3) 过点  $A$  作  $AM \perp BC$  于点  $M$ , 过点  $F$  用  $FN \perp BC$  于点  $N$ , 如图 3,

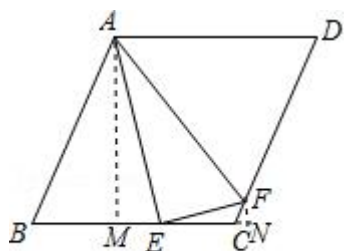


图3

则  $\angle AME = \angle CNF = 90^\circ$  ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$\therefore AB = BC, AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle B = \angle FCN$ ,

$\because \angle AEF = 90^\circ$  ,

$\therefore \angle AEM + \angle NEF = \angle AEM + \angle MAE = 90^\circ$  ,

$\therefore \angle MAE = \angle NEF$ ,

$\therefore \triangle AME \sim \triangle ENF$ ,

$$\therefore \frac{AM}{EN} = \frac{ME}{NF} = \frac{AE}{EF},$$

$\because \angle AFE = \angle B$ ,

$$\tan B = \frac{AM}{BM}, \quad \tan \angle AFE = \frac{AE}{EF},$$

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AE}{EF},$$

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{EN},$$

$$\therefore BM = EN,$$

设菱形  $ABCD$  的边长为  $a$ , 则  $AB = BC = a$ ,

$$\therefore BM = a \cos B, \quad CN = CF \cdot \cos \angle FCN = CF \cdot \cos B,$$

$$\therefore a \cos B = EC + CF \cdot \cos B,$$

$$\because CF = 2, \quad EC = 3CF,$$

$$\therefore EC = 6,$$

$$\therefore a \cos B = 6 + 2 \cos B,$$

$$\therefore \cos B = \frac{6}{a-2},$$

$$\therefore \frac{AM}{EN} = \frac{ME}{NF},$$

$$AM = AB \cdot \sin B = a \sin B, \quad EN = 6 + 2 \cos B, \quad ME = a - a \cos B - 6, \quad NF = CF \cdot \sin \angle FCN = 2 \sin B,$$

$$\therefore \frac{a \sin B}{6 + 2 \cos B} = \frac{a - a \cos B - 6}{2 \sin B},$$

$$\text{化简得, } 2a (\sin^2 B + \cos^2 B) = 6a - 4a \cos B - 12 \cos B - 36,$$

$$2a = 6a - 4a \cos B - 12 \cos B - 36,$$

$$a - a \cos B - 3 \cos B - 9 = 0,$$

$$\therefore \cos B = \frac{6}{a-2},$$

$$\therefore a - \frac{6a}{a-2} - \frac{18}{a-2} - 9 = 0,$$

$$\text{解得, } a = 17, \text{ 或 } a = 0 \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{菱形的边长为 } 17.$$

**【点评】** 本题是四边形的综合题，主要考查了菱形的性质，正方形的性质，相似三角形的性质与判定，解直角三角形，关键是构造相似三角形．难度较大．