

2020 年上海市浦东新区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=5$ ， $AB=13$ ，则 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{12}{13}$ D. $\frac{13}{12}$

【答案】C

【解析】

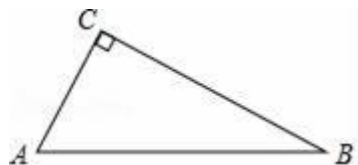
【分析】

先根据勾股定理求出 BC 得长，再根据锐角三角函数正弦的定义解答即可.

【详解】如图，根据勾股定理得， $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}.$$

故选 C.



【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义及勾股定理，熟知锐角三角函数正弦的定义是解决问题的关键.

2. 下列函数中，是二次函数的是（ ）

- A. $y = 2x - 1$ B. $y = \frac{2}{x^2}$
C. $y = x^2 + 1$ D. $y = (x-1)^2 - x^2$

【答案】C

【解析】

【分析】

将函数表达式进行整理，使其右边含自变量的代数式，左边为因变量，右边为整式，且自变量最高次数为 2 的函数为二次函数，逐个判断即可.

【详解】解：A、 $y = 2x - 1$ 是一次函数，故 A 选项错误；

B、 $y = \frac{2}{x^2}$ 右边不是整式，不是二次函数，故 B 选项错误；

C、 $y = x^2 + 1$ 右边是整式，自变量最高次数是 2，是二次函数，故 C 选项正确；

D、 $y = (x - 1)^2 - x^2$ 整理为 $y = -2x + 1$ 是一次函数，故 D 选项错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了二次函数的定义， $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 是二次函数，注意含自变量的代数式是整式.

3. 二次函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 的顶点坐标为 ()

A. (-2, 1)

B. (2, 1)

C. (-2, -1)

D. (2, -1)

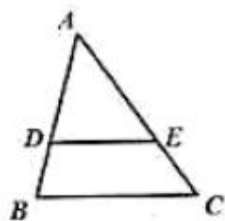
【答案】B

【解析】

$y = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$ ，所以，顶点坐标为(2,1). 故选 B.

点睛：本题考查了二次函数的性质，把解析式配方写成顶点式解析式是解题的关键，本题也可以利用顶点公式求解.

4. 如图，点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，下列各比例式不一定能推得 $DE \parallel BC$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ C. $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据对应线段成比例，两直线平行，可得答案.

【详解】 解： A、 $\because \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ， 不符合题意；

B、 由 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ， 不一定能推出 $DE \parallel BC$ ， 符合题意；

C、 $\because \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ， 不符合题意；

D、 $\because \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ， 不符合题意.

故选： B.

【点睛】 本题考查对应线段成比例，两直线平行，理解对应线段是解答此题的关键.

5.如图，传送带和地面所成斜坡的坡度为1:3，它把物体从地面点A处送到离地面3米高的B处，则物体从A到B所经过的路程为（ ）



- A. $3\sqrt{10}$ 米 B. $2\sqrt{10}$ 米 C. $\sqrt{10}$ 米 D. 9 米

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据坡比定义求出 AC 的长度，再根据勾股定理求出 AB 长度即可.

【详解】 解： 设 $BC \perp AC$ ，垂足为 C，

$$\because i = BC : AC = 1 : 3$$

$$\therefore 3: AC=1:3,$$

$$\therefore AC=9,$$

在 $Rt\triangle ACB$ 中, 由勾股定理得,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\therefore AB=3\sqrt{10} \text{ 米.}$$

故选: A.

【点睛】 本题考查解直角三角形, 明确坡比的概念是解答此题的关键.

6. 下列说法正确的是 ()

A. $a + (-a) = 0$

B. 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】

根据向量, 单位向量, 平行向量的概念, 性质及向量的运算逐个进行判断即可得出答案.

【详解】 解: A、 $a + (-a)$ 等于 0 向量, 而不是 0, 故 A 选项错误;

B、如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 说明两个向量长度相等, 但是方向不一定相同, 故 B 选项错误;

C、如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 说明两个向量长度相等, 但是方向不一定相同, 故 C 选项错误;

D、如果 $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 可得到两个向量是共线向量, 可得到 $\vec{a} // \vec{b}$, 故 D 选项正确.

故选: D.

【点睛】 本题考查向量的性质及运算, 向量相等不仅要长度相等, 还要方向相同, 向量的运

算要注意向量的加减结果都是一个向量.

二、填空题

7. 已知 $x = 3y$, 那么 $\frac{x+y}{x+2y} =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】

将 $x=3y$ 代入所求式子中, 整理后通过约分即可得出结果.

【详解】解: $\because x = 3y$

$$\therefore \frac{x+y}{x+2y} = \frac{3y+y}{3y+2y} = \frac{4y}{5y} = \frac{4}{5},$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点睛】 本题考查了比的性质, 代换思想是解答此题的关键.

8. 已知线段 $AB = 2cm$, P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $PA > PB$, 那么线段 PA 的长度等于 _____ cm .

【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】

根据黄金分割点的定义, 知 AP 是较长线段; 则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$, 代入数据即可得出 AP 的长度.

【详解】解: 由于 P 为线段 $AB=2cm$ 的黄金分割点,

且 AP 是较长线段,

则 $AP = 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}-1$.

【点睛】 本题主要考查了理解黄金分割点的概念，熟记黄金比的值进行计算，难度适中.

9.如果两个相似三角形对应边之比是 2:3，那么它们的对应中线之比是_____.

【答案】 2:3

【解析】

【分析】

根据相似三角形的性质，即相似三角形对应中线，对应高，对应角平分线的比等于相似比.

【详解】 解： $\because$ 两三角形相似，且对应边比为 2:3，

$\therefore$ 相似比 $k=2:3$

$\therefore$ 它们对应中线的比为 2:3.

故答案为：2:3.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质，主要利用了相似三角形对应中线的比等于相似比的性质.

10.如果二次函数 $y = x^2 - 2x + k - 3$ 的图像经过原点，那么 k 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】

图象经过 (0,0)，则(0,0)符合表达式，即 $x=0, y=0$ ，将其代入表达式，可求 k 值.

【详解】 解： $\because$ 二次函数 $y = x^2 - 2x + k - 3$ 的图象经过原点，

$\therefore 0=k-3$,

$\therefore k=3$.

故答案为：3

【点睛】 本题考查了二次函数图象的性质，理解图象上点坐标的意义是解答此题的关键.

11.将抛物线 $y = -3x^2$ 向下平移 4 个单位, 那么平移后所得新抛物线的表达式为_____.

【答案】 $y = -3x^2 - 4$

【解析】

【分析】

根据抛物线的“左加右减，上加下减”的平移规律可写出平移后的表达式.

【详解】 解： $\because y = -3x^2$

$\therefore$ 原抛物线的顶点坐标为(0,0),

$\therefore$ 向下平移 4 个单位,

$\therefore$ 平移后的抛物线的顶点坐标为(0,4),

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式为： $y = -3x^2 - 4$.

故答案为： $y = -3x^2 - 4$

【点睛】 本题考查了抛物线的平移以及抛物线解析式的变化规律：左加右减，上加下减.

12.如果抛物线经过点 $A(-1,0)$ 和点 $B(5,0)$, 那么这条抛物线的对称轴是直线_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】

观察点 $A(-1,0)$ 和点 $B(5,0)$ 两点坐标特征，纵坐标相等，可知 A,B 两点关于抛物线对称轴

对称，对称轴为经过线段 AB 中点且平行于 y 轴的直线，求 AB 中点坐标即可得.

【详解】 解： $\because$ 一条抛物线经过点 $(-1, 0)$ 、 $(5, 0)$,

$\therefore$ 这两点关于对称轴对称,

$$\therefore x = \frac{-1+5}{2} = 2$$

即 $x=2$.

故答案是： $x=2$.

【点睛】本题考查二次函数图象的对称性及对称轴的求法，常见确定对称轴的方法有，已知解析式则利用公式法确定对称轴，已知对称点利用对称性确定对称轴，根据条件确定合适的方法求对称轴是解答此题的关键.

13. 二次函数 $y = -2(x+1)^2$ 的图像在对称轴左侧的部分是_____ (填“上升”或“下降”)

【答案】上升

【解析】

【分析】

根据抛物线为开口向下，对称轴左侧的函数增减性为 y 随 x 的增大而增大作出判断.

【详解】 $\because$ 二次函数 $y = -2(x+1)^2$ 中， $a=-2<0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore$ 对称轴左侧的函数增减性为 y 随 x 的增大而增大

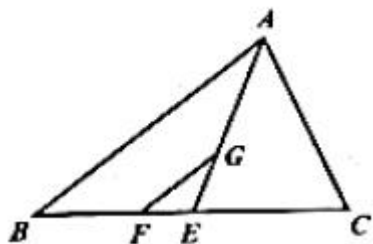
$\therefore$ 函数图象在对称轴左侧部分是上升.

故答案为：上升.

【点睛】本题考查的是二次函数的性质，掌握当 $a<0$ 时，抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的开口向下， $x<h$ 时， y 随 x 的增大而增大是解答此题的关键.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AE 是 BC 边上的中线，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，过点 G 作 $GF \parallel AB$

交 BC 于点 F ，那么 $\frac{EF}{EB} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】

根据三角形重心的性质，即三角形的重心到一个顶点的距离等于它到这个顶点的对边中点距离的 2 倍可得 EG 和 AG 的比值，再根据平行线分线段成比例定理可得.

【详解】解： $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore \frac{EG}{AG} = \frac{1}{2},$$

$$\because GF \parallel AB,$$

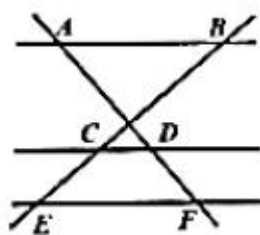
$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{EG}{AG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{EB} = \frac{1}{3}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查三角形重心的概念和性质及平行线分线段成比例定理，结合两个定理得出成比例线段是解答此题的关键.

15.如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $AD = 6$, $DF = 3$, $BC = 7$ ，那么线段 CE 的长度等于



【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】

根据平行线分线段成比例定理列出比例式，代入数值进行计算即可.

【详解】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE},$$

$$\because AD=6, DF=3, BC=7,$$

$$\therefore \frac{6}{3} = \frac{7}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{7}{2}.$$

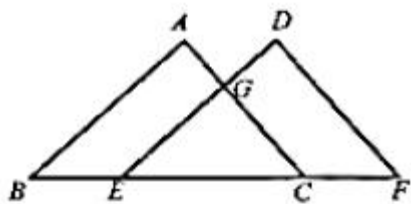
故答案为： $\frac{7}{2}$.

【点睛】 本题考查平行线分线段成比例定理，找准对应关系是解答此题的关键.

16.如图，将 $\triangle ABC$ 沿射线 BC 方向平移得到 $\triangle DEF$ ，边 DE 与 AC 相交于点 G ，如果

$BC = 6\text{cm}$ ， $\triangle ABC$ 的面积等于 9cm^2 ， $\triangle GEC$ 的面积等于 4cm^2 ，那么

$CF =$ _____ cm .



【答案】 2

【解析】

【分析】

根据平移性质得 $AC \parallel DF$ ，易证 $\triangle EGC \sim \triangle EDF$ ，根据相似三角形的面积的比等于相似比的

平方，求得 EC 的长，即可求 CF 的长.

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 沿射线 BC 方向平移得到 $\triangle DEF$ ，

$$\therefore AC \parallel DF, \triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

$$\therefore EF = BC = 6\text{cm}, S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF} = 9\text{cm}^2,$$

$$\therefore AC \parallel DF,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle F, \angle EGC = \angle D,$$

$$\therefore \triangle EGC \sim \triangle EDF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EGC}}{S_{\triangle EDF}} = \left(\frac{EC}{EF}\right)^2,$$

$$\therefore \frac{4}{9} = \left(\frac{EC}{6}\right)^2,$$

$$\therefore EC = 4\text{cm},$$

$$\therefore CF = 2\text{cm}.$$

故答案为：2

【点睛】本题考查了平移的性质，以及相似三角形的性质，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方列式求解是解答此题的关键.

17.用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像时，列出了如下的表格：

x	...	0	1	2	3	4	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	-3	0	1	0	-3	...

那么当 $x = 5$ 时，该二次函数 y 的值为_____.

【答案】 -8

【解析】

【分析】

根据待定系数法将表格中任意三个点代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中，列出含 a, b, c 的方程组，求解

a, b, c 即可确定函数表达式.

【详解】解：将点 $(0, -3), (1, 0), (2, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中得，

$$\begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = -x^2 + 4x - 3$.

$\therefore$ 当 $x=5$ 时, $y=-8$.

故答案为: -8 .

【点睛】本题考查待定系数法求二次函数解析式，遵循待定系数法求解析式的步骤即可，即

“一设”、“二代”、“三求解”、“四确定”.

18. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 2, BC = 4$, 点 D, E 分别是边 BC, AB 的中点,

将 $\triangle BDE$ 绕着点 B 旋转, 点 D, E 旋转后的对应点分别为点 D', E' , 当直线 $D'E'$ 经过

点 A 时, 线段 CD' 的长为_____

【答案】 $2\sqrt{5}$ 或 $\frac{6}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

当直线 $D'E'$ 经过点 A 时, 有两种情况, 均用三点共线特征及勾股定理求出 AE 长为 5 或 3,

采用两边对应成比例且夹角相等证得 $\triangle CBD' \sim \triangle ABE'$, 利用相似三角形对应边成比例求解.

【详解】解：在 $Rt\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 2, BC = 4$,

由勾股定理得, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

$\because D、E$ 分别是边 $BC、AB$ 的中点,

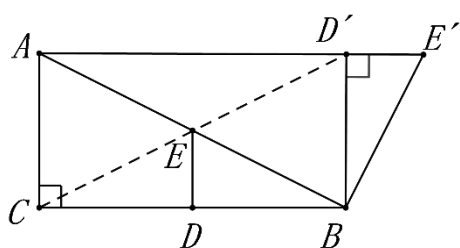
$\therefore DE$ 是 $\triangle ACB$ 的中位线, $BD=2, BE=\sqrt{5}$,

$\therefore DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC = 1$

$\therefore \angle EDB = 90^\circ$,

由旋转可得, $BD'=2, D'E'=1, BE'=\sqrt{5}, \angle BD'E'=90^\circ$,

第一种情况, 如图 1,



如图1

$\because$ 点 A, D', E' 三点共线,

$\therefore \angle AD'B = 90^\circ$,

由勾股定理得 $AD' = \sqrt{AB^2 - BD'^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$,

$\therefore AE' = AD' + D'E' = 5$

$\because \angle ABC = \angle D'BE'$,

$\therefore \angle CBD' = \angle ABE'$,

$\because \frac{BC}{AB} = \frac{BD'}{BE'} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

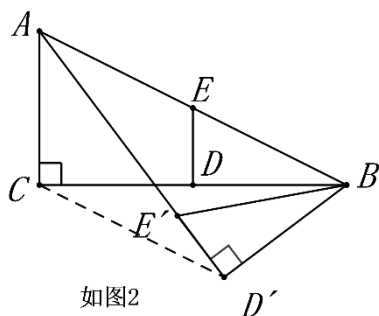
$\therefore \triangle CBD' \sim \triangle ABE'$,

$\therefore \frac{CD'}{AE'} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\therefore \frac{CD'}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\therefore CD' = 2\sqrt{5}$

第一种情况, 如图 2,



如图2

∵ 点 A, D', E' 三点共线,

∴ $\angle AD'B = 90^\circ$,

由勾股定理得 $AD' = \sqrt{AB^2 - BD'^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$,

∴ $AE' = AD' \cdot D'E' = 3$

∵ $\angle ABC = \angle D'BE'$,

∴ $\angle CBD' = \angle ABE'$,

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BD'}{BE'} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

∴ $\triangle CBD' \sim \triangle ABE'$,

$$\therefore \frac{CD'}{AE'} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore \frac{CD'}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore CD' = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

∴ CD' 长为 $2\sqrt{5}$ 或 $\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

故答案为: $2\sqrt{5}$ 或 $\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查图形旋转的综合应用, 涉及知识点有勾股定理, 三点共线, 相似三角形的

判定和性质, 能正确画出图形很关键.

三、解答题:

19. 计算: $\frac{\tan 45^\circ - \cos 60^\circ}{2 \sin 30^\circ} + \cot^2 60^\circ$

【答案】 $\frac{5}{6}$

【解析】

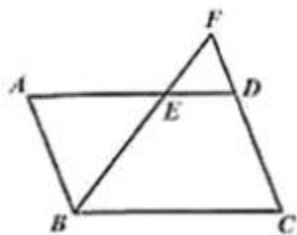
【分析】

先将特殊三角函数值分别算出原算式中的每一项, 然后根据实数混合运算的法则进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{\tan 45^\circ - \cos 60^\circ}{2 \sin 30^\circ} + \cot^2 60^\circ \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查的是特殊三角函数值, 熟记特殊角度的三角函数值是解答此题的关键.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 且 $AE = 2ED$, 联结 BE 并延长交边 CD 的延长线于点 F , 设, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示, $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DF}$;

(2) 先化简, 再求作: $\left(-\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} \right) + 2(\vec{a} - \vec{b})$ (不要求写作法, 但要写明结论)

【答案】 (1) $\overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\vec{a}$; (2) 原式 $= \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, 作图见解析

【解析】

【分析】

(1) 根据平行四边形的性质得对边相等且平行，再根据向量，平行向量的概念，性质及向量的运算进行求解；

(2) 根据平行四边形的性质得对边相等且平行，再根据向量的运算进行化简，根据化简结果的运算性质作图.

【详解】解：(1) $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore AB=CD, AB \parallel CD, AD=BC, AD \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{ED},$$

$$\therefore AE=2ED,$$

$$\therefore DF=\frac{1}{2}AB, AE=\frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BA}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b};$$

$$(2) \left(-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)+2(\vec{a}-\vec{b})$$

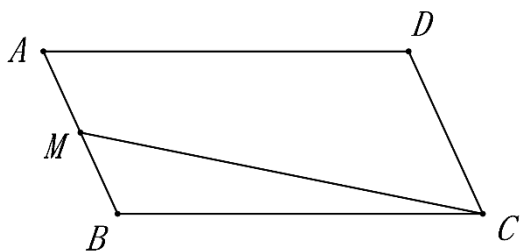
$$=-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+2\vec{a}-2\vec{b},$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b};$$

如图，平行四边形 ABCD，取 AB 的中点，则 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=-\vec{b}$,

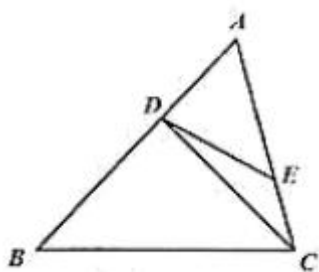
$$\therefore \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$$



【点睛】本题考查向量的性质及运算，根据平行线得平行向量及向量的运算是解答此题的关键.

21.如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $AD=3$, $AC=6$, $AE=4$, $AB=8$.



- (1) 如果 $BC=7$, 求线段 DE 的长;
- (2) 设 $\triangle DEC$ 的面积为 a , 求 $\triangle BDC$ 的面积 (用 a 的代数式表示).

【答案】 (1) $\frac{7}{2}$; (2) $S_{\triangle BDC} = 5a$

【解析】

【分析】

(1) 根据两边成比例且夹角相等证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 利用相似三角形对应边成比例列式求解;

(2) 根据三角形面积公式及底边的关系求出 $\triangle ADE$ 的面积, 再利用相似三角形面积比等于相似比的平方列式求解.

【详解】解: (1) $\because AD=3, AC=6, AE=4, AB=8$,

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BC = 7$$

$$\therefore DE = \frac{7}{2};$$

$$(2) \because \frac{AE}{EC} = \frac{4}{6-4} = 2$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle EDC}} = \frac{AE}{EC} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = a,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 2a$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ACB$$

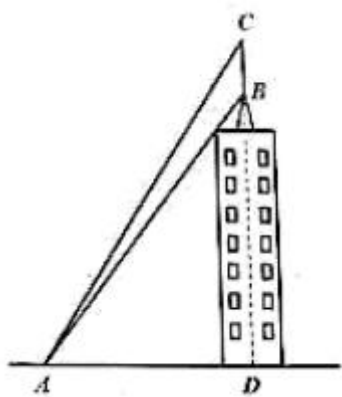
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2,$$

$$\therefore \frac{2a}{S_{\triangle BDC} + a + 2a} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = 5a.$$

【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质，利用相似三角形对应边成比例解决线段问题，利用相似三角形面积比等于相似比的平方解决面积问题是解答此类问题的重要思路.

22.为了测量大楼顶上（居中）避雷针 BC 的长度，在地面上点 A 处测得避雷针底部 B 和顶部 C 的仰角分别为 $55^\circ 58'$ 和 57° ，已知点 A 与楼底中间部位 D 的距离约为 80 米，求避雷针 BC 的长度（参考数据： $\sin 55^\circ 58' \approx 0.83$ ， $\cos 55^\circ 58' \approx 0.56$ ， $\tan 55^\circ 58' \approx 1.48$ ， $\sin 57^\circ \approx 0.84$ ， $\cos 57^\circ \approx 0.54$ ， $\tan 57^\circ \approx 1.54$ ）



【答案】约 4.8 米

【解析】

【分析】

分别在两个直角三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中利用正切函数求出BD长和CD长,BD和CD作差即可求解.

【详解】解:根据题意可知:AD=80米, $\angle BAD=55^{\circ}58'$, $\angle CAD=57^{\circ}$,

在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中, $\tan \angle BAD=\frac{BD}{AD}$,

$$\therefore \tan 55^{\circ}58'=\frac{BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{BD}{80} \gg 1.48,$$

$$\therefore BD=118.4 \text{ 米};$$

在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $\tan \angle CAD=\frac{CD}{AD}$,

$$\therefore \tan 57^{\circ}=\frac{CD}{AD},$$

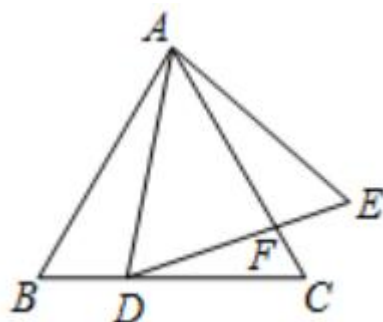
$$\therefore \frac{CD}{80} \gg 1.54,$$

$$\therefore CD=123.2 \text{ 米},$$

$$\therefore BC=CD-BD=123.2-118.4=4.8 \text{ 米}.$$

【点睛】本题考查解直角三角形的应用,仰角、俯角问题,熟练掌握锐角三角函数的定义是解答此题的关键.

23.如图, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$, 点 D 在 BC 边上, $DA=DC$, $\angle ADE=\angle B$, 边 DE 与 AC 相交于点 F .



(1) 求证: $AB \cdot AD = DF \cdot BC$;

(2) 如果 $AE \parallel BC$, 求证: $\frac{BD}{DC} = \frac{DF}{FE}$.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 根据等边对等角得到 $\angle ADE = \angle B$, 通过证明 $\triangle ABC \sim \triangle FDA$ 得对应边成比例, 化比例式为等积式即可;

(2) 通过证明 $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ 和 $\triangle ABD \sim \triangle EDA$, 根据相似三角形的性质列两个比例式, 用等量代换即可得.

【详解】(1) 证明: $\because AD=DC$,

$$\therefore \angle DAC = \angle C,$$

$$\because \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DF}{AB},$$

$$\therefore AB \cdot AD = DF \cdot BC.$$

(2) 证明: $\because AE \parallel BC$,

$$\therefore \angle E = \angle EDC, \angle EAC = \angle C,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{DF}{FE} = \frac{DC}{AE},$$

$$\therefore \frac{DF}{FE} = \frac{AD}{AE},$$

$$\because \angle ADC = \angle ADE + \angle EDC = \angle B + \angle BAD, \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle E,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{AE},$$

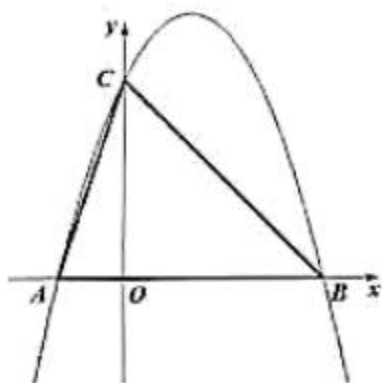
$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{DF}{FE}.$$

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质的综合应用,借助中间比进行等量代换是解答此题的关键.

24.如图,在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴的两个交点分别为

$A(-1,0)$, $B(3,0)$, 与 y 轴相交于点 C .



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 联结 AC 、 BC , 求 $\angle ACB$ 的正切值;

(3) 点 P 在抛物线上, 且 $\angle PAB = \angle ACB$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$; (2) 2; (3) 点 P 坐标为 $(1, 4)$ 或 $(5, -12)$

【解析】

【分析】

(1) 根据待定系数法将 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 中, 列出含 b, c 的方程组, 求解 b, c 即可确定抛物线的表达式;

(2) 作 $AD \perp BC$ 于 D , 用等面积法求 AD 长, 再用勾股定理求 CD 长, 利用正切函数定义求解;

(3) 根据题意可知 P 点应满足的条件为 $\tan \angle ACB = 2$, 用 P 点的坐标表示线段长, 根据正切函数定义列式求解.

【详解】 解: (1) 将 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 中得,

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -9 + 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 垂足为 D ,

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 3),$$

$$\therefore AB=4, OC=3, BC=3\sqrt{2}, AC=\sqrt{10}$$

$$\therefore \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2},$$

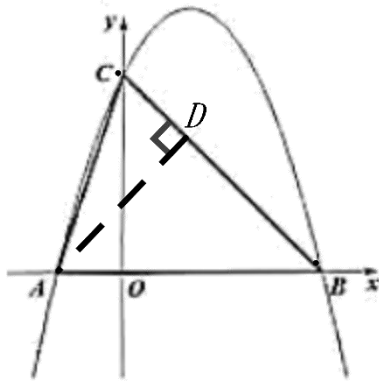
$$\therefore \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot AD}{2},$$

$$\therefore AD=2\sqrt{2} \text{ ,}$$

由勾股定理得, $CD=\sqrt{2}$,

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AD}{CD} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \text{ ,}$$

即 $\tan \angle ACB=2$.



(3) 如图, 设 P 在抛物线上, $P(x, -x^2+2x+3)$, 过 P 作 $PE \perp x$ 轴, 垂足为 E,

$$\therefore \angle PAB = \angle ACB \text{ ,}$$

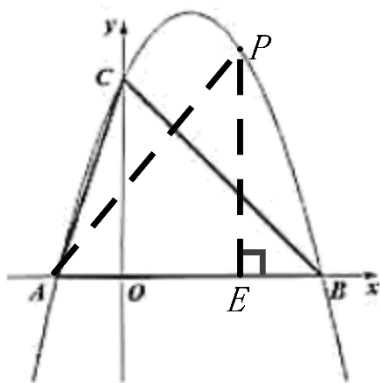
$$\therefore \tan \angle PAB = \frac{1}{2} \text{ ,}$$

$$\therefore \frac{-x^2+2x+3}{x+1} = 2 \text{ 或 } \frac{-(-x^2+2x+3)}{x+1} = 2$$

解得, $x = -1$ (舍去) 或 $x = 1$, $x = -1$ (舍去) 或 $x = 5$

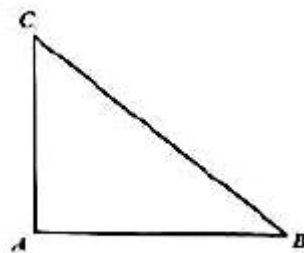
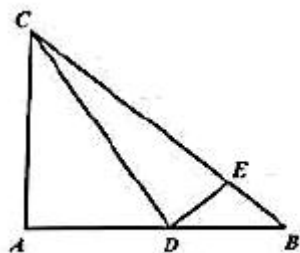
当 $x = -1$ 时, $y = 4$; 当 $x = 5$ 时, $y = -12$

$\therefore$ P 点坐标为 $(1, 4)$ 或 $(5, -12)$.



【点睛】本题考查抛物线解析式的求法，利用抛物线的性质解决几何图形问题，即函数与图形的综合，由图象到点坐标，由点坐标到线段长，由线段长到几何图形的转换，即数形结合的思想是解答此类问题的关键.

25. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$ ， D 为 AB 边上一动点（点 D 与点 A, B 不重合），联结 CD ，过点 D 作 $DE \perp DC$ 交边 BC 于点 E 。



(备用图)

- (1) 如图，当 $ED = EB$ 时，求 AD 的长；
- (2) 设 $AD = x$, $BE = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式并写出函数定义域；
- (3) 把 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折得 $\triangle CDB'$ ，联结 AB' ，当 $\triangle CAB'$ 是等腰三角形时，直接写出 AD 的长。

【答案】(1) $\frac{9}{4}$ ；(2) $y = \frac{20x - 5x^2}{9 + 4x}$ ($0 < x < 4$)；(3) $\frac{72}{43} \pm \frac{15}{43}\sqrt{11}$

【解析】

【分析】

(1) 过 E 作 $EM \perp AB$ 于 M, 构建“一线三垂直”, 即证 $\triangle ACD \sim \triangle MDE$, 利用相似三角形对应边成比例列比例式, 再结合等腰三角形性质求解;

(2) 作 $EN \perp AB$ 于 N, 用三角函数将线段 EN, BN 用 y 表示, 再根据 $\triangle ACD \sim \triangle NDE$ 列出比例式, 将比例式变形求解;

(3) 作 $B'H \perp AB$, 交 AB 或 AB 延长线于点 H, 作 $B'G \perp AC$, 交 CA 延长线于 G, 构建直角三角形, 先结合 $Rt\triangle AGB'$ 和 $Rt\triangle CGB'$, 利用勾股定理求出 AG, GB' 长, 再结合 $Rt\triangle AB'H$ 和 $Rt\triangle DB'H$, 利用勾股定理列含 x 的方程, 即可求解.

【详解】解: (1) 如图, 过 E 作 $EM \perp AB$, 垂足为 M,

在 $Rt\triangle CAB$ 中, $AC=3$, $AB=4$, $\therefore \tan B = \frac{3}{4}$,

$\therefore ED=EB$,

$\therefore DM=BM$,

设 $AD=x$, 则 $DM=BM=\frac{4-x}{2}$,

$\therefore EM = \frac{3}{4} \cdot \frac{4-x}{2} = \frac{12-3x}{8}$,

$\therefore \angle CDE = \angle A = \angle EMD = 90^\circ$,

$\therefore \angle EDM + \angle ADC = 90^\circ$, $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle EDM$,

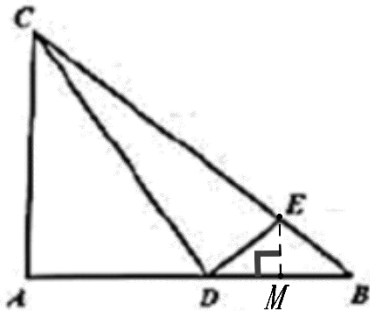
$\therefore \triangle ACD \sim \triangle MDE$,

$\therefore \frac{AC}{DM} = \frac{AD}{EM}$,

$\therefore \frac{3}{\frac{4-x}{2}} = \frac{x}{\frac{12-3x}{8}}$,

$\therefore x_1 = \frac{9}{4}$, $x_2 = 4$ (不符合题意, 舍去).

即 $AD = \frac{9}{4}$.



(2) 如图，过 E 作 $EN \perp AB$ ，垂足为 N，

在 $\text{Rt}\triangle CAB$ 中， $AC=3$ ， $AB=4$ ，由勾股定理得 $BC=5$ ，

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5}, \tan B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EN = \frac{3y}{5}, BN = \frac{4y}{5},$$

$$\therefore DN = 4 - x - \frac{4y}{5}$$

$$\because \angle CDE = \angle A = \angle END = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDN + \angle ADC = 90^\circ, \quad \angle ACD + \angle ADC = 90^\circ,$$

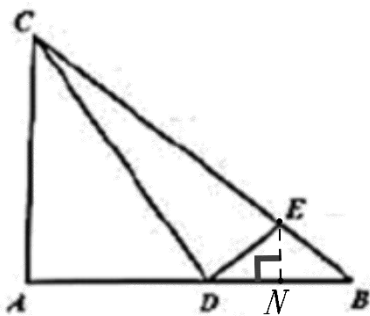
$$\therefore \angle ACD = \angle EDN,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle NDE,$$

$$\therefore \frac{AC}{DN} = \frac{AD}{EN},$$

$$\therefore \frac{3}{4 - x - \frac{4}{5}y} = \frac{x}{\frac{3y}{5}},$$

$$\therefore y = \frac{20x - 5x^2}{9 + 4x} \quad (0 < x < 4)$$



(3) 如图, 过 B' 作 $B'H \perp AB$, 交 AB 或 AB 延长线于点 H , 作 $B'G \perp AC$, 交 CA 延长线于 G ,

由折叠可得 $CB' = CB = 5$, $B'D = BD = x$,

$\therefore \triangle CAB'$ 是等腰三角形,

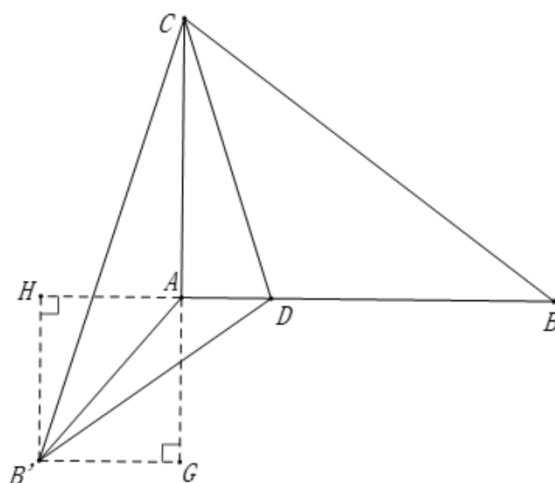
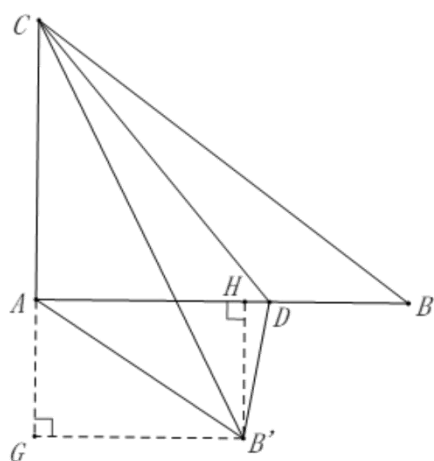
$\therefore AC = AB' = 3$,

设 $AG = m$, $B'G = n$, 由勾股定理得,

$$m^2 + n^2 = 3^2, (m+3)^2 + n^2 = 5^2,$$

$$\text{解得, } m = \frac{7}{6}, n = \frac{5\sqrt{11}}{6},$$

$$\therefore B'H = \frac{7}{6}, AH = \frac{5\sqrt{11}}{6},$$



第一种情况: 在 $\text{Rt}\triangle B'HD$ 中, 由勾股定理得,

$$\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{11}}{6} - x\right)^2 = (4-x)^2$$

$$\text{解得, } x = \frac{72}{43} + \frac{15}{43}\sqrt{11}$$

$$\text{即 } AD = \frac{72}{43} + \frac{15}{43}\sqrt{11};$$

第二种情况: 在 $\text{Rt}\triangle B'HD$ 中, 由勾股定理得,

$$\left(\frac{72}{43}\right)^2 + \left(\frac{15\sqrt{11}}{43}\right)^2 = (4-x)^2$$

$$\text{解得, } x = \frac{72}{43} + \frac{15}{43}\sqrt{11}$$

$$\text{即 } AD = \frac{72}{43} - \frac{15}{43}\sqrt{11};$$

$$\therefore AD = \frac{72}{43} \pm \frac{15}{43}\sqrt{11}.$$

【点睛】本题考查三角形相似的综合应用及勾股定理的综合应用，构建“一线三垂直”得相似

三角形和构建直角三角形得勾股定理是解答此题的突破口.