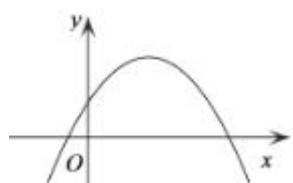


2020 年上海市松江区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示，那么下列判断正确的



A. $a > 0, b > 0, c > 0$

B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$

D. $a < 0, b < 0, c > 0$

【答案】C

【解析】

【分析】

利用抛物线开口方向、对称轴的位置、抛物线与 y 轴的交点位置进行判断.

【详解】解：抛物线开口向下 $a < 0$ ；对称轴在 y 轴右侧， $b > 0$ （与 a 异号）；图像交 y 正半轴， $c > 0$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了二次函数图象系数的关系：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a > 0$ 时，抛物线向上开口；当 $a < 0$ 时，抛物线向下开口；一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置：当 a 与 b 同号时（即 $ab > 0$ ），对称轴在 y 轴左；当 a 与 b 异号时（即 $ab < 0$ ），对称轴在 y 轴右.（简称：左同右异）；常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点：抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$.

2.如果点 $A(1, 3)$ 、 $B(m, 3)$ 是抛物线 $y = a(x-2)^2 + h$ 上两个不同的点, 那么 m 的值为

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 B

【解析】

【分析】

由抛物线的对称性, 抛物线上的点, 纵坐标相同, 则关于对称轴对称, 由顶点式可知对称轴是 $x=2$, 则可求出.

【详解】解: $\because$ 点 $A(1, 3)$ 、 $B(m, 3)$ 是抛物线 $y = a(x-2)^2 + h$ 上两个不同的点,

$\therefore$ 这两个点关于抛物线的对称轴对称,

$\therefore$ 由顶点式可知对称轴是 $x = 2$, 对称轴位于 A 点的右侧,

$\therefore 2 < m$,

$\therefore \frac{1+m}{2} = 2$, 解之得: $m = 3$,

故选: B.

【点睛】本题考查了二次函数的图象和性质、二次函数图象的对称性等知识点, 能熟记二次函数的性质是解此题的关键.

3.在以 O 为坐标原点的直角坐标平面内, 有一点 $A(3, 4)$, 射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角

为 α , 那么 $\cos \alpha$ 的值为

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】 A

【解析】

【分析】

利用锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识求解.

【详解】解：∵在以 O 为坐标原点的直角坐标平面内有一点 A (3, 4)

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

故选：A.

【点睛】本题考查了解直角三角形、锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识.

4. 下列两个三角形不一定相似的是

- A. 两条直角边的比都是 2:3 的两个直角三角形
- B. 腰与底的比都是 2:3 的两个等腰三角形
- C. 有一个内角为 50° 的两个直角三角形
- D. 有一个内角为 50° 的两个等腰三角形

【答案】D

【解析】

【分析】

根据图形相似的定义判定，用排除法求解.

【详解】解：A. 两条直角边的比都是 2:3 的两个直角三角形，根据两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似判断，两个三角形相似，故正确，不符合题意；

B. 腰与底的比都是 2:3 的两个等腰三角形，等腰三角形，两条腰相等，根据三边对应成比例，两个三角形相似判断，两个三角形相似，故正确，不符合题意；

C. 有一个内角为 50° 的两个直角三角形，两角对应相等两三角形相似判断，两个三角形相似，故正确，不符合题意；

D. 有一个内角为 50° 的两个等腰三角形，内角是 50° 的等腰三角形需要注意的是，这个角

是顶角还是底角，情况不一样不一定相似.

故选：D.

【点睛】本题考查的是相似三角形的判定，熟知有两组角对应相等的两个三角形相似是解答此题的关键.

5. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ ，且 $\vec{c} \neq \vec{0}$ ，下列结论正确的是

A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

B. $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$

C. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

【答案】D

【解析】

【分析】

根据向量的性质进行计算判断即可.

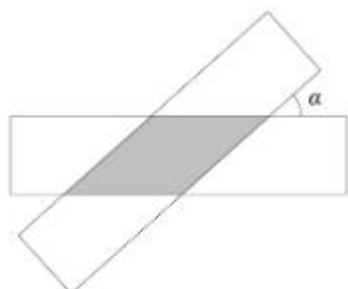
【详解】解：将 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 代入 $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ ，

计算得： $\vec{a} = -2\vec{b}$ （方向相反）.

故选：D

【点睛】本题考查了向量的性质，熟悉向量的性质是解题的关键.

6. 如图，两条宽度都为 1 的纸条，交叉重叠放在一起，它们的夹角为锐角 α ，它们重叠部分（阴影部分）的面积是 1.5，那么 $\sin \alpha$ 的值为



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

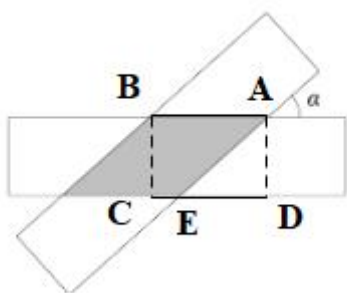
【答案】C

【解析】

【分析】

重叠部分为菱形，运用三角函数定义先求边长 AE，再根据面积求出 $\sin \alpha$.

【详解】解：如图示：作 $BC \perp CD$ 交 CD 于 C 点， $AD \perp CD$ 交 CD 于 D 点，



由阴影部分是两条宽度都为 1 的纸条，交叉重叠放在一起可知，阴影部分是一个菱形，

则有 $AB = AE$ ， $AD = 1$ ，

$$\therefore AB = AE = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = AB \cdot AD = \frac{1}{\sin \alpha} \times 1 = 1.5$$

$$\text{解之得：} \sin \alpha = \frac{2}{3},$$

故选：C

【点睛】本题考查了菱形的判定与性质，三角函数的应用，判断出阴影部分是一个菱形是解题的关键.

二、填空题

7. 已知： $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ，那么 $\frac{2x-y}{x+y} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】

设 $x = 2k$ ， $y = 3k$ ，代入求解即可.

【详解】解： $\because \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ 设 $x = 2k$ ，则 $y = 3k$ ，代入 $\frac{2x-y}{x+y}$

得： $\frac{2 \times 2k - 3k}{2k + 3k} = \frac{k}{5k} = \frac{1}{5}$ ，

故答案为： $\frac{1}{5}$

【点睛】 本题考查了比例的性质，根据题意利用参数设 $x = 2k$ ， $y = 3k$ 是解题的关键.

8. 已知线段 a 是线段 b 、 c 的比例中项，如果 $a = 2$ ， $b = 3$ ，那么 $c =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】

根据比例中项的定义可得 $a^2 = bc$ ，从而易求 c .

【详解】解： $\because$ 线段 a 是线段 b 、 c 的比例中项，

$\therefore a^2 = bc$ ，

即 $2^2 = 3 \times c$ ，

$\therefore c = \frac{4}{3}$ ，

故答案是： $\frac{4}{3}$

【点睛】 本题考查了比例线段，解题的关键是理解比例中项的定义.

9. 若两个相似三角形的面积比为 $3:4$ ，则它们的相似比为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】

根据相似三角形的面积比等于相似比的平方求解即可

【详解】 解：∵两个相似三角形面积的比为3:4，

$$\therefore \text{它们的相似比} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质：相似三角形的对应角相等，对应边的比相等；相似三角形（多边形）的周长的比等于相似比；相似三角形的对应线段（对应中线、对应角平分线、对应边上的高）的比也等于相似比；相似三角形的面积的比等于相似比的平方.

10. 已知点 P 是线段 AB 上的黄金分割点， $AP > PB$ ，且 $AP = 2$ ，那么 $PB =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-1$ ；

【解析】

【分析】

根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段；则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，代入数据即可得出 AP 的长，于是得到结论.

【详解】 由于 P 为线段 AB 的黄金分割点，且 AP 是较长线段；

$$\text{则 } AP = AB \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{5} + 1$$

$$\therefore PB = AB - PA = \sqrt{5} + 1 - 2 = \sqrt{5} - 1,$$

故答案为 $\sqrt{5} - 1$.

【点睛】本题考查黄金分割的概念：把一条线段分成两部分，使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项，这样的线段分割叫做黄金分割.

11. 已知 $Rt\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 2$ ，则 $\angle A$ 的余切值为_____.

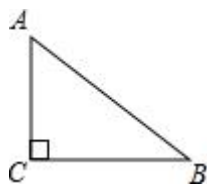
【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

根据锐角三角函数的定义，直接得出 $\cot A = \frac{AC}{BC}$ 即可得出答案.

【详解】解：如图，



$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 3, BC = 2,$$

$$\cot \angle A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2},$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【点睛】此题主要考查了锐角三角函数的定义，熟练地应用锐角三角函数的定义是解决问题的关键.

12. 已知二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 图像的对称轴为直线 $x = 4$ ，则 $f(1)$ _____

$f(3)$. (填“>”或“<”)

【答案】 >

【解析】

【分析】

根据对称轴及开口方向确定其增减性即可确定答案.

【详解】解: $\because$ 二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = 4$,

$\therefore$ 当 x 的取值越靠近 4 函数值就越小, 反之越大,

$$\therefore f(1) > f(3),$$

故答案为: $>$.

【点睛】考查了二次函数的性质, 解题的关键是根据对称轴及开口方向确定其增减性.

13. 在直角坐标平面中, 将抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 先向上平移 1 个单位, 再向右平移 1 个单位, 那么平移后的抛物线表达式是_____.

【答案】 $y = 2x^2 + 1$

【解析】

【分析】

根据二次函数图像平移的特征: 函数平移遵循“上加下减, 左加右减”求解即可.

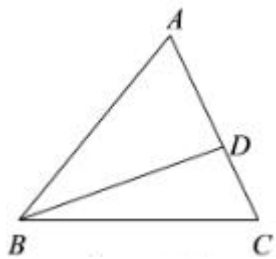
【详解】解: 根据二次函数图像平移的特征: 函数平移遵循“上加下减, 左加右减”

则抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 平移后为: $y = 2[(x-1)+1]^2 + 1 = 2x^2 + 1$

故答案为: $y = 2x^2 + 1$

【点睛】此题主要考查了二次函数图像的平移变换, 正确掌握平移规律是解题关键.

14. 如图, 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点, 且 $AD = 2DC$. 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{BD}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】

根据向量的运算法则计算即可.

【详解】解： $\because AD = 2DC$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

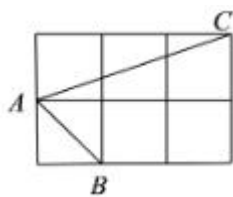
根据题意, 可得: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a},$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$

【点睛】 本题考查的是向量的运算法则, 熟悉向量的计算遵循三角形法则是解题的关键.

15. 如图, 在正方形网格中, 点 A, B, C 是小正方形的顶点, 那么 $\tan \angle BAC$ 的值为_____.



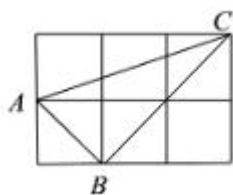
【答案】 2

【解析】

【分析】

在正方形网格中构造一个 $\angle BAC$ 为锐角的直角三角形, 然后利用正切的定义求解.

【详解】解: 如图示:



连接 BC，根据题意可得：

$$AC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

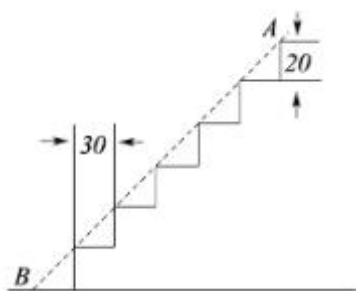
$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$$

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义：在直角三角形中，一锐角的正切等于它的对边与邻边的比值.

16.如图，某幢楼的楼梯每一级台阶的高度为 20 厘米，宽度为 30 厘米.那么斜面 AB 的坡度为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】

根据坡度的概念计算，得到答案.

【详解】解：斜面 AB 的坡度为： $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键。

17. 以一个等腰直角三角形的腰为边分别向外做等边三角形，我们把这两个等边三角形重心之间的距离称作这个等腰直角三角形的“肩心距”。如果一个等腰直角三角形的腰长为 2，那么它的“肩心距”_____。

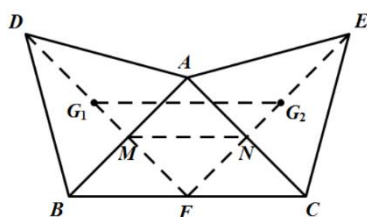
【答案】 $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】

延长 DF 交边 BC 于点 F，根据等腰直角三角形的腰长为 2， $\triangle DBA$ 和 $\triangle EAC$ 是等边三角形，可以求得 $G_1M = G_2N = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，并且可证 $MN \parallel G_1G_2$ ，利用平行线之间的线段对应成比例即可求解。

【详解】解：如图示：



等腰直角三角形的腰长为 2，

即： $AB = AC = 2$ ，

$\therefore \triangle DBA$ 和 $\triangle EAC$ 是等边三角形， $\triangle ABC$ 等腰直角三角形

$\therefore BC = 2\sqrt{2}$ ， $DM = EN = \sqrt{3}$

延长 DF 交边 BC 于点 F

$\because G_1, G_2$ 分别是等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle ACE$ 的重心

$\therefore DM$ 垂直且平分 AB , EN 垂直且平分 AC , $G_1M = G_2N = \frac{\sqrt{3}}{3}$

又 $\because \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore AC \parallel DF$

$\therefore$ 点 F 是 BC 的中点

同理可得 EN 的延长线也交 BC 于点 F

$\therefore MF = \frac{1}{2}AC = 1$, $FN = \frac{1}{2}AB = 1$, $MN = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}$

$\therefore \frac{FN}{NG_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, $\frac{FM}{MG_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\therefore \frac{FN}{NG_2} = \frac{FM}{MG_1}$

$\therefore MN \parallel G_1G_2$

$\therefore \frac{MN}{G_1G_2} = \frac{FM}{FG_1}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{G_1G_2} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$, 解得 $G_1G_2 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}$.

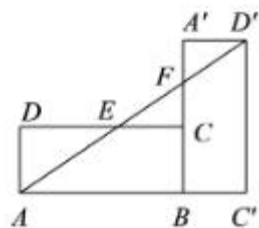
【点睛】 本题考查了等边三角形的性质，等腰三角形的性质，重心的性质和平行线的性质，

熟悉相关性质定理，灵活运用是解题的关键.

18.如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD = 1$ ， $AB = k$.将矩形 $ABCD$ 绕着点 B 顺时针旋转 90° 得到矩形

$A'BC'D'$. 联结 AD' ，分别交边 CD ， $A'B$ 于 E, F . 如果 $AE = \sqrt{2}D'F$ ，那么 k

=_____.



【答案】 $k = \sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】

由矩形的性质和旋转的性质可求 $AD=A'D'=1$, $AB=A'B=k$, $\angle A'=\angle DAB=90^\circ=\angle DCB=\angle ABC$,

通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle FA'D'$, 可得 $\frac{AD}{A'F} = \frac{DE}{A'D'} = \frac{AE}{D'F}$, 可求 DE , $A'F$ 的长, 通过证明 $\triangle A'D'F$

$\sim \triangle CEF$, 由相似三角形的性质可求解.

【详解】解: $\because$ 将矩形 $ABCD$ 绕着点 B 顺时针旋转 90° 得到矩形 $A'BC'D'$,

$\therefore AD=A'D'=1$, $AB=A'B=k$, $\angle A'=\angle DAB=90^\circ=\angle DCB=\angle ABC$,

$\therefore A'D' \parallel BA \parallel CD$

$\therefore \angle A'D'F = \angle FEC = \angle DEA$, 且 $\angle D = \angle A' = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FA'D'$,

$\therefore \frac{AD}{A'F} = \frac{DE}{A'D'} = \frac{AE}{D'F}$, 且 $AE = \sqrt{2}D'F$,

$\therefore DE = \sqrt{2}A'D' = \sqrt{2}$, $A'F = \frac{1}{\sqrt{2}}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \angle A' = \angle DCF = 90^\circ$, $\angle A'FD' = \angle EFC$,

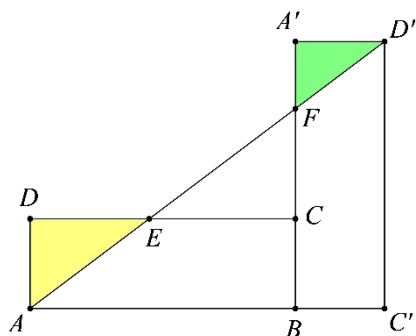
$\therefore \triangle A'D'F \sim \triangle CEF$,

$\therefore \frac{EC}{A'D'} = \frac{FC}{A'F}$,

$\therefore \frac{k-\sqrt{2}}{1} = \frac{k-1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

$\therefore k = \sqrt{2} + 1$

故答案为: $\sqrt{2} + 1$



【点睛】本题考查了旋转的性质，矩形的性质，相似三角形的判定和性质，利用相似三角形的性质求 DE，A'F 的长是本题的关键。

三、解答题

19. 计算： $\frac{3 - (2 \cos 45^\circ)^2 + 3 \tan 30^\circ}{2 \sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ - \cot 30^\circ}$

【答案】 $-2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】

利用特殊锐角三角函数值计算求解即可。

【详解】解：原式 $= \frac{3 - \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}.$

【点睛】本题考查了特殊锐角三角函数值的计算，熟知特殊锐角三角函数值是解题的关键。

20. 已知二次函数 $y = x^2 - 4x - 1$.

(1) 将函数 $y = x^2 - 4x - 1$ 的解析式化为 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式，并指出该函数图像顶点 B 坐标；

(2) 在平面直角坐标系中 xOy 中，设抛物线 $y = x^2 - 4x - 1$ 与 y 轴交点为 C，抛物线的对称轴与 x 轴交点为 A. 求四边形 OABC 的面积.

【答案】 (1) $y = (x - 2)^2 - 5$, B (2, -5); (2) 6.

【解析】

【分析】

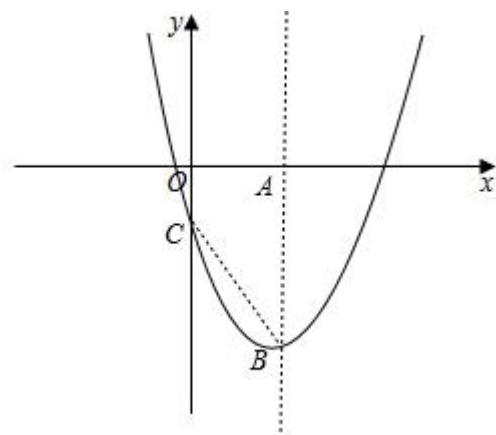
(1) 利用配方法把将二次函数 $y=x^2-4x-1$ 的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，利用二次函数的性质即可得出答案；

(2) 求出 C 点，A 点坐标，则四边形 OABC 的面积可求出.

【详解】解：(1) $y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$,

该函数图象顶点 B 坐标为 (2, -5)；

(2) 如图,



令 $y=0$, $x=-1$,

$\therefore C(0, -1)$,

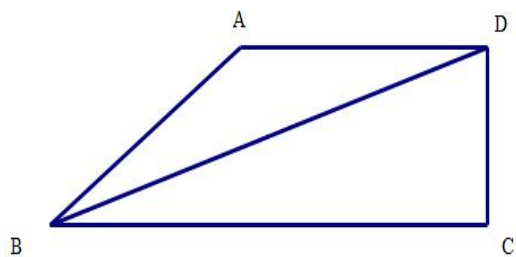
$\therefore B(2, -5)$,

$\therefore A(2, 0)$,

$\therefore$ 四边形 OABC 的面积 $= \frac{1}{2} \times (AB + OC) \times OA = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，正确掌握配方法和二次函数的性质是解题的关键.

21.如图：在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $AD=AB=13$ ， $BD=24$.求边 DC 的长.



【答案】 $CD = \frac{120}{13}$

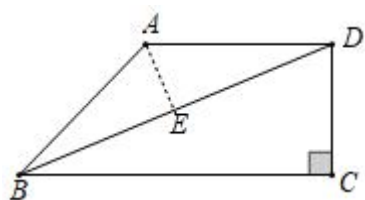
【解析】

【分析】

由 $AD \parallel BC$ 得出 $\angle ADB = \angle DBC$ ，再由 $AB = AD$ 得出 $\angle ADB = \angle ABD$ ，从而 $\angle ABD = \angle DBC$ ，

另外 $AE \perp BD$ ，故 $\angle AEB = \angle C = 90^\circ$ ，可证 $\triangle ABE \sim \triangle DCB$ ，可得 $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$ ，即可求 DC 的长.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AE \perp BD$ ，垂足为 E，



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$,

$\because AB = AD$,

$\therefore \angle ADB = \angle ABD$,

$\therefore \angle ABD = \angle DBC$,

$\because AE \perp BD$, $AB = AD$,

$\therefore \angle AEB = \angle C = 90^\circ$, $BE = DE = 12$,

$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$,

$\because \angle ABD = \angle DBC$, $\angle AEB = \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCB,$$

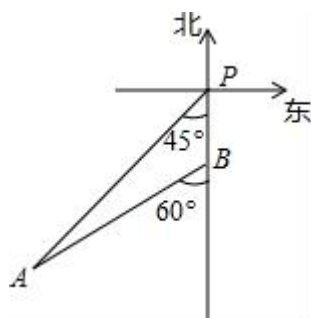
$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

$$\text{即: } \frac{13}{24} = \frac{5}{CD}$$

$$\therefore CD = \frac{120}{13}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，属于中考常考题型.

22. 如图，小岛 A 在港口 P 的南偏西 45° 方向上，一艘船从港口 P ，沿着正南方向，以每小时 12 海里的速度航行，1 小时 30 分钟后到达 B 处，在 B 处测得小岛 A 在它的南偏西 60° 的方向上. 小岛 A 离港口 P 有多少海里？



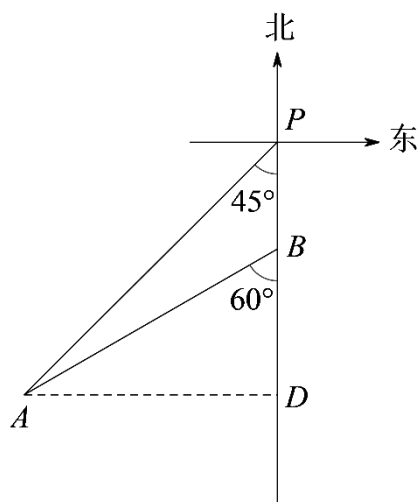
$$\text{【答案】 } AP = 27\sqrt{2} + 9\sqrt{6}$$

【解析】

【分析】

作 $AD \perp PB$ 于 D ，设 $BD = x$ 海里，，则 $AD = \sqrt{3}x$ ，根据 $\angle APD = 45^\circ$ 可得 $AD = PD$ ，列出方程，求出 x 的值，根据勾股定理计算即可.

【详解】解：过点 A 作 $AD \perp PB$ 于点 D ，



根据题意得： $PB = 12 \times 1.5 = 18$ （海里）

设 $BD = x$ ，则 $AD = \sqrt{3}x$ ，

$$\therefore x + 18 = \sqrt{3}x,$$

$$\text{解得： } x = 9 + 9\sqrt{3}$$

$$\therefore AD = 27 + 9\sqrt{3}$$

$$\because \angle APD = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{27 + 9\sqrt{3}}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

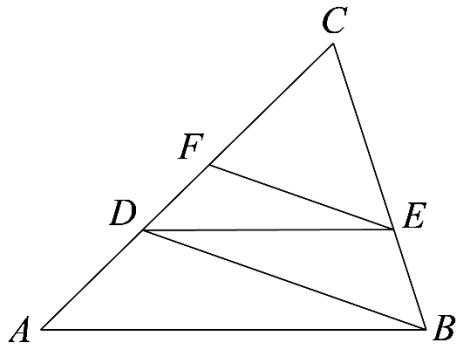
$$\text{解得， } AP = 27\sqrt{2} + 9\sqrt{6}.$$

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-方向角问题，正确标注方向角、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

23.已知：如图，点 D 、 F 在 $\triangle ABC$ 边 AC 上，点 E 在边 BC 上，且 $DE \parallel AB$ ， $CD^2 = CF \cdot CA$.

(1) 求证： $EF \parallel BD$ ；

(2) 如果 $AC \cdot CF = BC \cdot CE$ ，求证： $BD^2 = DE \cdot BA$.



【答案】 详见解析

【解析】

【分析】

(1) 由平行线分线段成比例可得 $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ ，由 $CD^2 = CF \cdot CA$ ，可得 $\frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CD}$ ，可证 $EF \parallel BD$ ；

(2) 根据 $AC \cdot CF = BC \cdot CE$ 可得 $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ，并可证得 $\angle EDB = \angle DBA$ ，则可证明 $\triangle BAD \sim \triangle DBE$ ，可得 $\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{BD}$ ，即可得结论.

【详解】证明 (1) $\because DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$$

$$\because CD^2 = CF \cdot CA$$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CD}$$

$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$$

$$\therefore EF \parallel BD$$

$$(2) \because AC \cdot CF = BC \cdot CE$$

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CF}, \text{ 又 } \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB$$

$$\therefore \angle CEF = \angle A$$

$$\therefore EF \parallel BD$$

$$\therefore \angle CEF = \angle EBD$$

$$\therefore \angle EBD = \angle A$$

$$\therefore ED \parallel AB$$

$$\therefore \angle EDB = \angle DBA, \text{ 且 } \angle EBD = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BDE$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{BD}$$

$$\therefore BD^2 = BA \cdot DE.$$

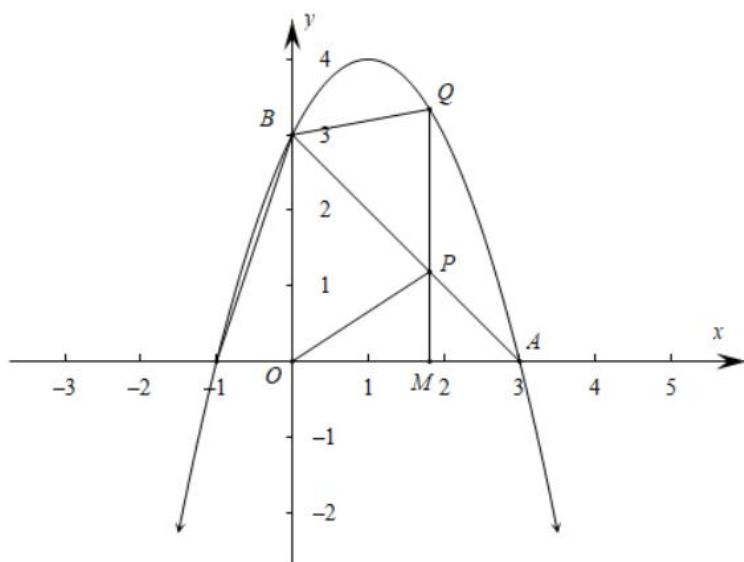
【点睛】 本题考查了相似三角形判定和性质，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题.

24.如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 $A(3, 0)$ 、点 $B(0, 3)$. 点 $M(m, 0)$ 在线段 OA 上（与点 A 、 O 不重合），过点 M 作 x 轴的垂线与线段 AB 交于点 P ，与抛物线交于点 Q ，联结 BQ .

(1) 求抛物线表达式；

(2) 联结 OP ，当 $\angle BOP = \angle PBQ$ 时，求 PQ 的长度；

(3) 当 $\triangle PBQ$ 为等腰三角形时，求 m 的值.



【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$; (2) $PQ = \frac{54}{25}$; (3) m 的值为 2、 $3 - \sqrt{2}$ 或 1.

【解析】

【分析】

(1) 将点 A (3, 0)、点 B (0, 3) 分别代入抛物线解析式 $y = -x^2 + bx + c$, 化简求出 b, c 的值即可;

(2) 根据 $\angle BOP = \angle PBQ$ 且 $MQ \parallel OB$, 可证 $\triangle OBP \sim \triangle BPQ$, 可设 Q (x, $-x^2 + 2x + 3$), 求出直线 AB 的解析式, 则可得 P 的坐标为 (x, $3 - x$), 可得 $BP = \sqrt{2}x$, $OB = 3$, $PQ = -x^2 + 3x$, 利用相似三角形的对应边成立比例即可求解;

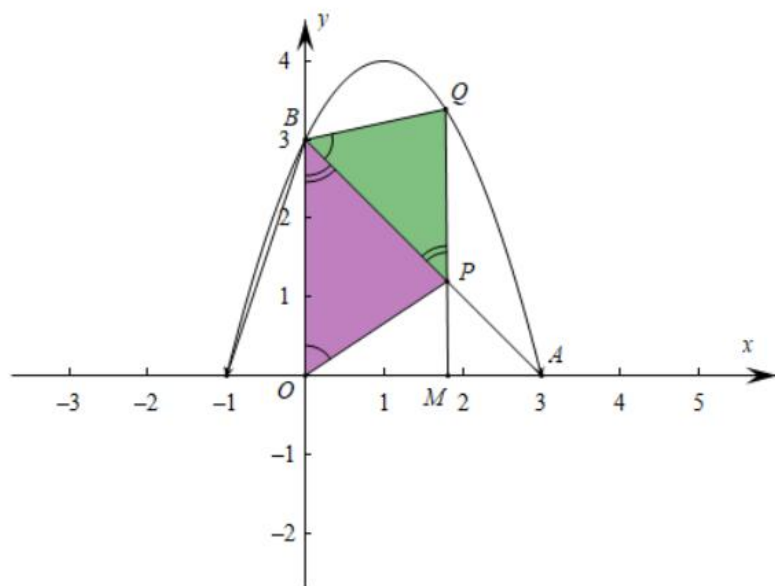
(3) 分三种情况讨论: ①当 $BQ = PQ$ 时, ②当 $BP = PQ$ 时, ③当 $BP = BQ$ 时, 然后分别求解即可.

【详解】(1) $\because$ 将点 A (3, 0)、点 B (0, 3) 分别代入抛物线解析式 $y = -x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} -9 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{解之得: } \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$

(2)



$$\because \angle BOP = \angle PBQ \text{ 且 } MQ \parallel OB$$

$$\therefore \angle OBP = \angle BPQ$$

$$\therefore \triangle OBP \sim \triangle BPQ$$

$$\text{设 } Q(x, -x^2 + 2x + 3)$$

$$\because P \text{ 点在直线 } AB \text{ 上, 并 } A(3, 0)、B(0, 3),$$

$$\text{则直线 } AB \text{ 的解析式为: } y = -x + 3$$

$$\therefore P(x, 3-x)$$

$$\therefore BP = \sqrt{2}x, OB = 3, PQ = -x^2 + 3x$$

$$\therefore \frac{OB}{BP} = \frac{BP}{PQ} \quad \text{即} \quad \frac{3}{\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}x}{-x^2 + 3x}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } \frac{9}{5} \quad (0 \text{ 舍去})$$

$$\therefore PQ = \frac{54}{25}$$

$$(3) \because M(m, 0), P(m, 3-m), Q(m, -m^2 + 2m + 3)$$

$$\therefore BP = \sqrt{2}m, PQ = -m^2 + 3m \text{ 且 } \angle BPQ = 45^\circ$$

$\therefore$ 当 $\triangle BPQ$ 为等腰三角形时, 存在如下情况:

①如图 1, 当 $BQ = PQ$ 时, 即 $\angle PBQ = \angle BPQ = 45^\circ$

$$\therefore \triangle BPQ \text{ 为等腰直角三角形} \quad \therefore -m^2 + 2m + 3 = 3$$

$$\therefore m = 2$$

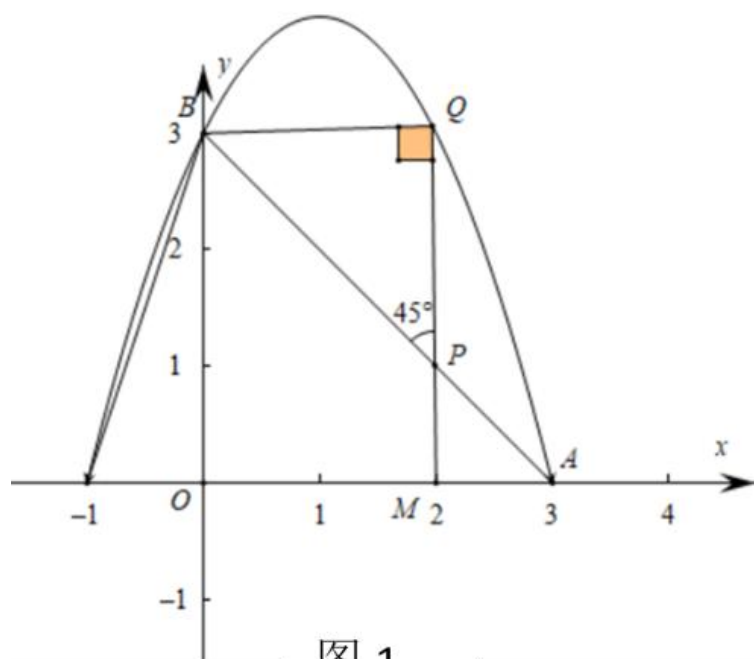


图 1

②当 $BP=PQ$ 时,即 $\sqrt{2}m = -m^2 + 3m$, 即 $m = 3 - \sqrt{2}$ 或 0 (0 舍去)

③如图 2, 当 $BP=BQ$ 时, $\angle BQP = \angle BPQ = 45^\circ$

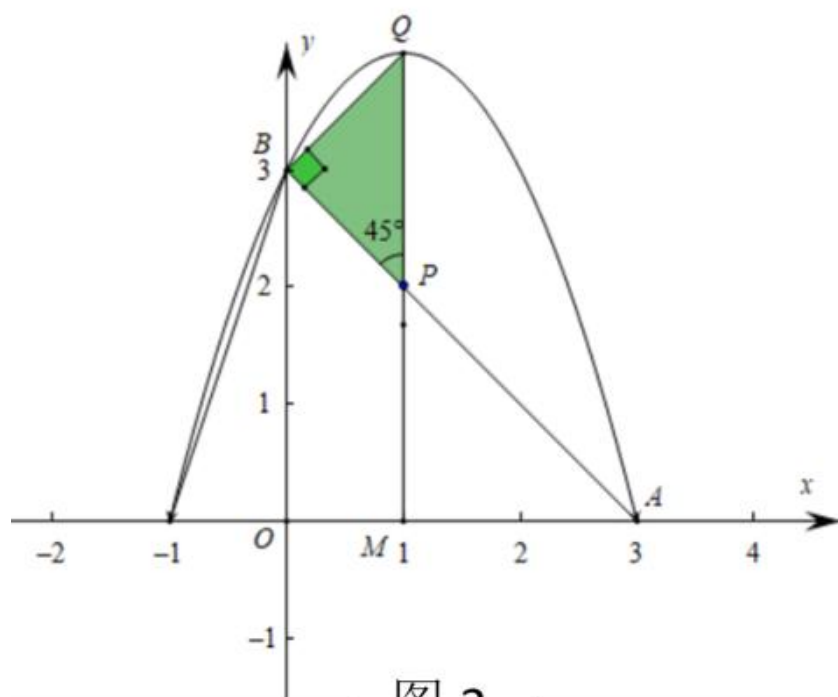


图 2

根据 $PM = 3 - m$, $OM = m$, 可得 $PQ = 2m$

则有 $-m^2 + 2m + 3 = 3 + m$,

$$\therefore m = 1$$

综上所述, m 的值为 2 、 $3 - \sqrt{2}$ 或 1 .

【点睛】 本题考查了二次函数与几何图形结合, 三角形的相似, 特殊角使用, 以及等线段的关系转化问题, 懂得综合讨论是解题的关键.

25. 已知 $\tan \angle MON = 2$, 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在射线 OM 上, $AD = 2$, $AB = m$, $CF \perp ON$, 垂足为点 F .

(1) 如图 (1), 作 $AE \perp ON$, 垂足为点 E . 当 $m = 2$ 时, 求线段 EF 的长度;

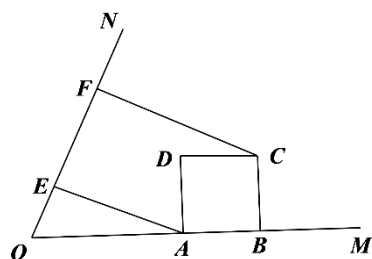


图 (1)

(2) 如图 (2), 联结 OC , 当 $m = 2$, 且 CD 平分 $\angle FCO$ 时, 求 $\angle COF$ 的正弦值;

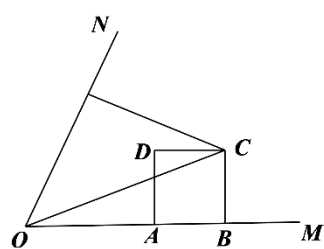


图 (2)

(3) 如图 (3), 当 $\triangle AFD$ 与 $\triangle CDF$ 相似时, 求 m 的值.

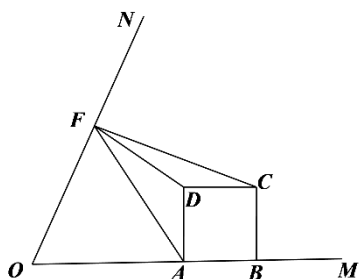


图 (3)

【答案】 (1) $EF = \frac{6}{5}\sqrt{5}$; (2) $\sin \angle COF = \frac{3}{5}$; (3) 1 或 2 或 $1 + \sqrt{5}$.

【解析】

【分析】

(1) 如图 1, 延长 FC 交 OM 于点 G, 证 $\angle BCG = \angle MON$, 在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, 设 $OE = a$, 求得 OA, OG, OF 的长, 则 $EF = OF - OE = \frac{6\sqrt{5}}{5}$;

(2) 如图 2, 延长 FC 交 OM 于点 G, 由 (1) 得 $CG = 2\sqrt{5}$, 推出 $CO = CG = 2\sqrt{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle COB$ 中, 由勾股定理求出 a 的值, 得出 OF 的长, 可求出 $\cos \angle COF$ 的值, 进一步推出 $\sin \angle COF$ 的值;

(3) 需分情况讨论: 当 D 在 $\angle MON$ 内部时, $\triangle FDA \sim \triangle FDC$ 时, 此时 $CD = AD = 2$, $m = 2$; 当 $\triangle FDA \sim \triangle CDF$ 时, 延长 CD 交 ON 于点 Q, 过 F 作 $FP \perp CQ$ 于 P, 可利用三角函数求出 m 的值; 当 D 在 $\angle MON$ 外部时, 可利用相似的性质等求出 m 的值.

【详解】 解: 解: (1) 如图 1,

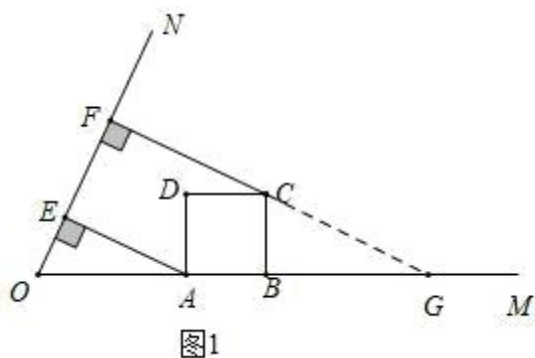


图1

延长 FC 交 OM 于点 G ,

$$\because \angle BCG + \angle CGB = 90^\circ, \quad \angle MON + \angle CGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCG = \angle MON,$$

$$\text{则 } \tan \angle BCG = \tan \angle MON = 2,$$

$$\therefore BG = 2BC = 4, \quad CG = \sqrt{5}BC = 2\sqrt{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中,

$$\text{设 } OE = a, \text{ 由 } \tan \angle MON = 2,$$

$$\text{可得 } OA = \sqrt{5}a, \text{ 则 } OG = \sqrt{5}a + 6, \quad OF = \frac{1}{\sqrt{5}}OG = a + \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EF = OF - OE = \frac{6\sqrt{5}}{5};$$

(2) 如图 2,

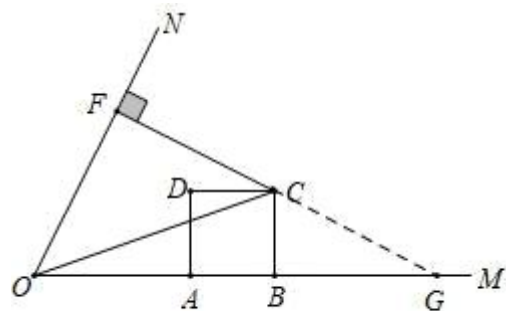


图2

延长 FC 交 OM 于点 G , 由 (1) 得 $CG = 2\sqrt{5}$,

$$\because CD \text{ 平分 } \angle FCO,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle DCO,$$

$$\because CD \parallel OM,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle CGO, \quad \angle DCO = \angle COG,$$

$$\therefore \angle CGO = \angle COG,$$

$$\therefore CO = CG = 2\sqrt{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle COB$ 中, 由 $BC^2 + BO^2 = OC^2$,

$$\text{得 } 2^2 + (\sqrt{5}a + 2)^2 = (2\sqrt{5})^2,$$

$$\text{解得 } a_1 = -\frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ (舍去)}, \quad a_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore OF = a + \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \angle COF = \frac{OF}{OC} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \angle COF = \frac{3}{5};$$

(3) 当 D 在 $\angle MON$ 内部时,

①如图 3-1,

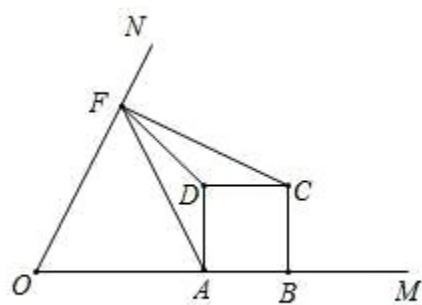


图3-1

$\triangle FDA \sim \triangle FDC$ 时, 此时 $CD = AD = 2$,

$$\therefore m = 2;$$

②当 $\triangle FDA \sim \triangle CDF$ 时,

如图 3-2,

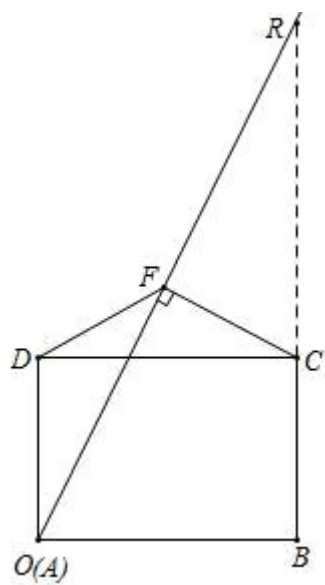


图3-3

$\triangle FDA \sim \triangle DFC$ 时, 此时 $\triangle FDA \cong \triangle DFC$,

$$\therefore CF = AD = 2,$$

$$\because \angle DAF = \angle FCD = \angle FHD,$$

$$\therefore A、O \text{ 重合},$$

延长 BC 交 ON 于 R ,

$$\therefore FR = 2CF = 4, \quad CR = 2\sqrt{5}, \quad BR = 2 + 2\sqrt{5},$$

$$\therefore m = CD = AB = \frac{1}{2}BR = 1 + \sqrt{5};$$

如图 3-4,

综上所述： $m = 1$ 或 $m = 2$ ，或 $m = 1 + \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了解直角三角形，等腰三角形的性质，相似三角形的判定与性质等，解题关键是注意分类讨论思想的运用.