

杨浦区 2020 学年度第一学期期末质量调研初三数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 关于抛物线 $y = x^2 - x$, 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 经过坐标原点 B. 顶点是坐标原点 C. 有最高点 D. 对称轴是直线 $x = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题根据二次函数的性质直接判断即可得出正确结果.

【详解】解: $y = x^2 - x$,

$\because$ 二次项前面的系数大于 0, $\therefore$ 抛物线开口向上, 有最低点,

$\because$ 当 $x=0$ 时, $y=0$, $\therefore$ 抛物线经过坐标原点,

$$\therefore y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$,

综上所述, B、C、D 选项均不正确, 只有 A 选项正确.

故选: A.

【点睛】本题考查二次函数的性质, 属于基础题, 熟练掌握二次函数的基本性质, 学会化顶点式判断是解决本题的关键.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\sin A = \frac{1}{2}$, $\cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 那么这个三角形一定是 ()

- A. 等腰三角形 B. 锐角三角形 C. 钝角三角形 D. 直角三角形

【答案】D

【解析】

【分析】根据特殊的三角函数值可知, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, 即可判断三角形的形状.

【详解】 $\because \sin A = \frac{1}{2}$, $\cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 这个三角形一定是直角三角形,

故选：D.

【点睛】本题考查特殊角的三角函数值，三角形内角和定理，属于基础题型.

3. 如果小丽在楼上点 A 处看到楼下点 B 处小明的俯角是 35° , 那么点 B 处小明看点 A 处小丽的仰角是 ()

A. 35°

B. 45°

C. 55°

D. 65°

【答案】A

【解析】

【分析】根据两点之间的仰角与俯角构成的两条水平线夹角的内错角相等，即可得出答案.

【详解】解：根据两点之间的仰角与俯角构成的两条水平线夹角的内错角相等，可知，点 B 处小明看点 A 处小丽的仰角是 35° ,

故选：A.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用-仰角俯角问题，正确理解是解题的关键.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，下列条件中，能判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()

A. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

B. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

C. $\frac{DB}{EC} = \frac{AE}{AD}$

D. $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据对应线段成比例，两直线平行，可得出答案.

【详解】A、 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 不可证明 $DE \parallel BC$, 故本选项正确;

B、 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, 可证明 $DE \parallel BC$, 故本选项错误;

C、 $\frac{DB}{EC} = \frac{AE}{AD}$, 不可证明 $DE \parallel BC$, 故本选项不正确;

D、 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ 不可证明 $DE \parallel BC$, 故本选项不正确.

故选 B.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例，对应线段成比例，两直线平行.

5. 下列命题中，正确的是 ()

A. 如果 $\vec{e}$ 为单位向量，那么 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}$

B. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

C. 如果 $a = -b$ ，那么 $a \parallel b$

D. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量的定义和要素可直接进行排除选项.

【详解】A、如果 $\vec{e}$ 为单位向量, 则有 $|\vec{e}|=1$, 但 $\vec{e}$ 不等于 1, 所以 $\vec{a} \neq |\vec{a}|\vec{e}$, 故错误;

B、长度等于 1 的向量是单位向量, 故错误;

C、如果 $a = -b$, 那么 $a \parallel b$, 故正确;

D、 $|a| = |b|$ 表示这两个向量长度相等, 而 $\vec{a} = \vec{b}$ 表示的是长度相等, 方向也相同的两个向量, 故错误;
故选 C.

【点睛】本题主要考查向量的定义, 熟练掌握向量的定义是解题的关键.

6. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 下列说法中, 错误的是 ()

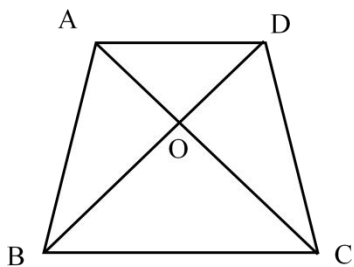
A. $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC}$ B. $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{OD}{OB}$ C. $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{OA}{OC}$ D. $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{BC}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据相似三角形的性质及等积法可直接进行排除选项.

【详解】解: 如图所示:



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$, $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{BC}$, 故 D 正确,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{OA^2}{OC^2}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OBC}, S_{\triangle DBC} = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle OBC},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC}, \text{ A 正确;}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{OA}{OC}, \text{ 即 } \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{OD}{OB}, \text{ 故 B 正确;}$$

故选 C.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定及等积法是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算: $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\vec{a} + 8\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据向量的线性运算可直接进行求解.

【详解】 解: $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} + 6\vec{b} - 2\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{a} + 8\vec{b};$

故答案为 $\vec{a} + 8\vec{b}.$

【点睛】 本题主要考查向量的运算，熟练掌握向量的运算是解题的关键.

8. 已知抛物线 $y = (1-a)x^2 + 1$ 的开口向上，那么 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $a < 1$

【解析】

【分析】 根据二次函数的图像与性质可直接进行求解.

【详解】 解: 由抛物线 $y = (1-a)x^2 + 1$ 的开口向上，可得:

$$1-a > 0, \text{ 解得: } a < 1;$$

故答案为 $a < 1.$

【点睛】 本题主要考查二次函数的图像与性质，熟练掌握二次函数的图像与性质是解题的关键.

9. 如果小明沿着坡度为 1:2.4 的山坡向上走了 130 米，那么他的高度上升了 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米.

【答案】 $\frac{325}{6}$

【解析】

【分析】 设高度上升了 h ，则水平前进了 $2.4h$ ，然后根据勾股定理解答即可.

【详解】 解: 设高度上升了 h ，则水平前进了 $2.4h$,

由勾股定理得: $\sqrt{h^2 + (2.4h)^2} = 130$ ，解得 $h=50.$

故答案为 50.

【点睛】 本题主要考查了坡度比与勾股定理得应用，根据坡度比和勾股定理列出关于 h 的方程成为解答本题的关键.

10. 已知线段 AB 的长为 4 厘米，点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP < BP$)，那么线段 AP 的长是_____厘米.

【答案】 $6-2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据黄金比值可知 $\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，计算得出结果即可.

【详解】 解：∵点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP < BP$)，

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{BP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{可知 } BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = 2\sqrt{5}-2 \text{ (厘米),}$$

$$AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} BP = 6-2\sqrt{5} \text{ (厘米)}$$

故答案为： $6-2\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查的是黄金分割比，属于基础题，掌握黄金比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是解题的关键.

11. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B ，与 y 轴交于 C ，则 $\triangle ABC$ 的面积 = ____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 先根据题意求出 AB 的长。再得到 C 点坐标，故可求解.

【详解】 解： $y = 0$ 时， $0 = x^2 - 4x + 3$,

解得 $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

∴ 线段 AB 的长为 2,

∴ 与 y 轴交点 C (0, 3),

∴ 以 AB 为底的 $\triangle ABC$ 的高为 3,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3,$$

故答案为： 3.

【点睛】此题主要考查二次函数与几何综合，解题的关键是熟知函数与坐标轴交点的求解方法.

12. 已知抛物线 $y = x^2$ ，把该抛物线向上或向下平移，如果平移后的抛物线经过点 $A(2, 2)$ ，那么平移后的抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = x^2 - 2$

【解析】

【分析】设所求的函数解析式为 $y = x^2 + h$ ，然后将点 A 坐标代入求得 k 即可.

【详解】解：设所求的函数解析式为 $y = x^2 + h$

将点 A 坐标代入得： $2 = 2^2 + h$ ，解得 $h = -2$

所以平移后的抛物线的表达式是 $y = x^2 - 2$.

故答案为 $y = x^2 - 2$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的平移问题，上下平移不改变二次项系数及顶点的横坐标，只改变顶点的纵坐标，上加下减.

13. 一位运动员投掷铅球，如果铅球运行时离地面高度为 y （米）关于水平距离 x （米）的函数解析式为

$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ，那么铅球运动过程中最高点离地面的距离为_____m.

【答案】 $\frac{16}{9}$

【解析】

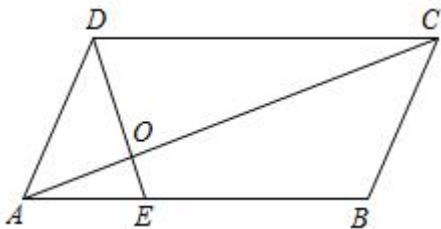
【详解】由题意可得： $y = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = -(x^2 - \frac{2}{3}x) + \frac{5}{3} = -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{16}{9}$ ，

故铅球运动过程中最高点离地面的距离为： $\frac{16}{9}$ m.

故答案为 $\frac{16}{9}$.

点睛：此题主要考查了二次函数的应用，正确利用配方法求出最值是解题的关键.

14. 如图，已知在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AB 上， $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$ ，联结 DE 交对角线 AC 于点 O ，那么 $\frac{AO}{OC}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】由题意可以得到 $\triangle AOE \sim \triangle COD$ ，再根据三角形相似的性质和已知条件可以求得 AO: OC 的值.

【详解】解： $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore \angle OAE = \angle DCO, \angle OEA = \angle ODC,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{AE}{CD} = \frac{AE}{AB},$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}, \therefore EB = 2AE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AE + EB} = \frac{AE}{3AE} = \frac{1}{3},$$

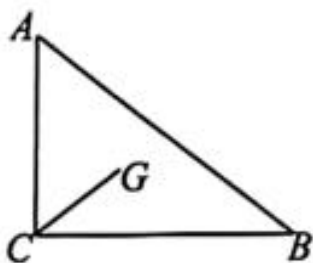
$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{1}{3},$$

故答案为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查平行四边形与相似三角形的综合运用，熟练掌握平行四边形的性质、三角形相似的判定和性质是解题关键.

15. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $CG = 2$ ， $BC = 4$ ，那么

$$\cos \angle GCB = \underline{\hspace{2cm}}.$$

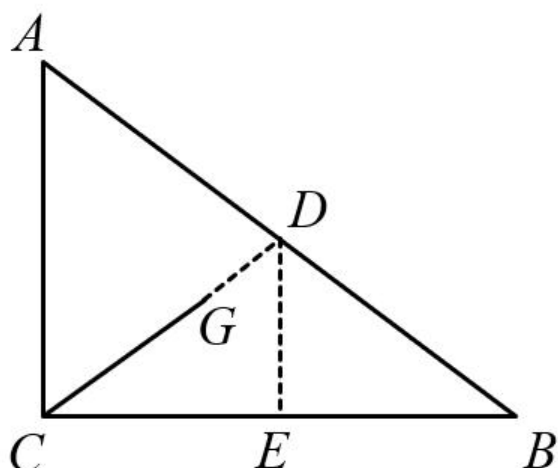


【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据重心的性质和余弦函数的定义可以得到解答.

【详解】解：如图，延长 CG 与 AB 交于点 D ，过 D 作 $DE \perp CB$ 于点 E ，



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心， $\therefore CG=2GD$ ，

$\because CG=2$ ， $\therefore GD=1$ ， $\therefore CD=2+1=3$ ，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ， $\therefore AC \perp CB$ ， $\therefore AC \parallel DE$ ，

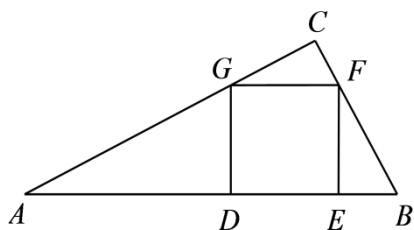
$\because D$ 是 AB 中点， $\therefore E$ 是 CB 中点，

$\therefore CE = \frac{1}{2}CB = 2$ ， $\therefore \cos \angle GCB = \frac{CE}{CD} = \frac{2}{3}$ ，

故答案为 $\frac{2}{3}$ 。

【点睛】本题考查三角形的综合运用，熟练掌握重心的性质和余弦函数的定义是解题关键。

16. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $\cot B = \frac{1}{2}$ ，正方形 $DEFG$ 的顶点 G 、 F 分别在边 AC 、 BC 上，点 D 、 E 在斜边 AB 上，那么正方形 $DEFG$ 的边长为_____。



【答案】 $\frac{20}{7}$

【解析】

【分析】作 $CM \perp AB$ 于 M ，交 GF 于 N ，由勾股定理可得出 AB ，由面积法求出 CM ，证明 $\triangle CGF \sim \triangle CAB$ ，

再根据对应边成比例，即可得出答案.

【详解】作 $CM \perp AB$ 于 M ，交 GF 于 N ，如图所示：

$$\because \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle C = 90^\circ, AB = 10, \cot B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{设 } BC = k, \text{ 则 } AC = 2k, AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ 即: } 10^2 = (2k)^2 + k^2, \text{ 解得: } k = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{5}, AC = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{10} = 4,$$

$\because$ 正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$,

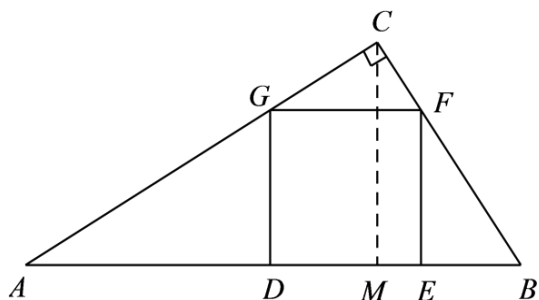
$$\therefore GF = EF = MN, GF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CGF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CN}{CM} = \frac{GF}{AB}, \text{ 即 } \frac{4 - EF}{4} = \frac{EF}{10},$$

$$\text{解得: } EF = \frac{20}{7};$$

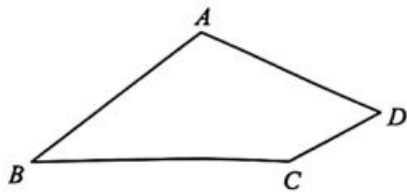
$$\text{故答案为: } \frac{20}{7}.$$



【点睛】本题考查的是相似三角形的判定和性质、正方形的性质、勾股定理等知识；正确作出辅助线、灵活运用相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

17. 新定义：有一组对角互余的凸四边形称为对余四边形.如图，已知在对余四边形 $ABCD$ 中， $AB = 10$,

$$BC = 12, CD = 5, \tan B = \frac{3}{4}, \text{ 那么边 } AD \text{ 的长为} \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】9

【解析】

【分析】连接 AC，作 $AE \perp BC$ 交 BC 于 E 点，由 $\tan B = \frac{3}{4}$ ， $AB = 10$ ，可得 $AE = 6$ ， $BE = 8$ ，并求出 AC 的长，作 $CF \perp AD$ 交 AD 于 F 点，可证 $\angle B = \angle DCF$ ，最后求得 AF 和 DF 的长，可解出最终结果。

【详解】解：如图，连接 AC，作 $AE \perp BC$ 交 BC 于 E 点，

$$\because \tan B = \frac{3}{4}, AB = 10,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AE}{BE} = \frac{3}{4}, \text{ 设 } AE = 3x, BE = 4x,$$

$$\therefore AE^2 + BE^2 = AB^2, \text{ 则 } (3x)^2 + (4x)^2 = 25x^2 = 100,$$

解得 $x = 2$ ，则 $AE = 6$ ， $BE = 8$ ，

$$\text{又} \because BC = 12, \therefore CE = BC - BE = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = 2\sqrt{13},$$

作 $CF \perp AD$ 交 AD 于 F 点，

$$\because \angle B + \angle D = 90^\circ, \angle D + \angle DCF = 90^\circ,$$

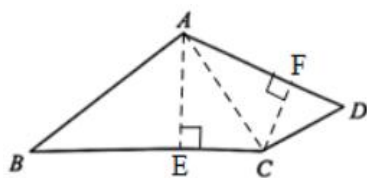
$$\therefore \angle B = \angle DCF, \tan B = \frac{3}{4} = \tan \angle DCF = \frac{DF}{CF},$$

$$\text{又} \because CD = 5, \therefore \text{同理可得 } DF = 3, CF = 4,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = 6,$$

$$\therefore AD = AF + DF = 9.$$

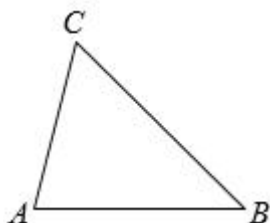
故答案为：9.



【点睛】本题考查四边形综合问题，涉及解直角三角形，勾股定理，有一定难度，熟练掌握直角三角形和勾股定理知识点，根据题意做出正确的辅助线是解决本题的关键。

18. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，点 B、C 分别落在点 B_1 、 C_1 处，

如果 $BB_1 \parallel AC$ ，联结 C_1B_1 交边 AB 于点 D，那么 $\frac{BD}{B_1D}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】由旋转得出 $\angle BDB_1=75^\circ$ ，在 $\triangle BDB_1$ 中，过点 B 作 $BM \perp B_1D$ 于 M, 设 $BB_1 = x = B_1D$ ，由勾股定理计算出 BD 的长，由此解答即可。

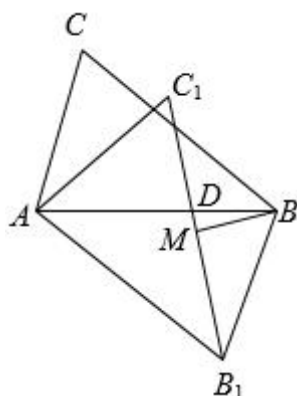
【详解】解：由题意知 $AB = AB_1$ ， $AC \parallel BB_1$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAB = \angle ABB_1 = \angle AB_1B = 75^\circ$$

$$\because \angle AB_1C_1 = \angle ABC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BB_1D = 30^\circ, \text{ 则 } \angle BDB_1 = 75^\circ$$

在 $\triangle BDB_1$ 中，过点 B 作 $BM \perp B_1D$ 于 M, 设 $BB_1 = x = B_1D$



在 $\text{Rt}\triangle BMB_1$ 中， $\angle B_1 = 30^\circ$

$$\therefore BM = \frac{1}{2}x, \quad B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore DM = x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{则 } BD = \sqrt{BM^2 + DM^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 x^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \times x$$

$$\therefore \frac{BD}{B_1D} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

【点睛】 本题考查了旋转知识平行线的性质和勾股定理等知识，掌握勾股定理是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\tan^2 60^\circ - 2 \sin 30^\circ}{4 \cos^2 45^\circ + \cot 30^\circ}$.

【答案】 $4 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 把各三角函数的值代入式中计算即可.

【详解】 解: 原式 = $\frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{1}{2}}{4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}}$

$$= \frac{3-1}{4 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3}}$$
$$= \frac{2}{2+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$= 4 - 2\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查特殊角三角函数值的应用，熟记特殊角的三角函数值是解题关键.

20. 已知一个二次函数的图像经过点 $A(-1,0)$ 、 $B(0,3)$ 、 $C(2,3)$.

(1) 求这个函数的解析式及对称轴;

(2) 如果点 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ 在这个二次函数图像上, 且 $x_1 < x_2 < 0$, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “<” 或者 “>”)

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $x=1$; (2) <

【解析】

【分析】 (1) 直接用待定系数法代入三点求出函数解析式, 运用对称轴公式可求出对称轴;

(2) 通过判断二次函数增减性可得出结果.

【详解】 解: (1) 设二次函数的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$,

已知二次函数经过 A、B、C 三点, 将三点坐标代入二次函数表达式中,

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ c=3 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

则这个函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

其对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$;

(2) $\because a < 0$, $\therefore$ 抛物线开口向下,

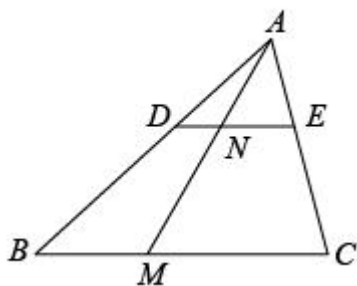
$\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$, $\therefore x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

又 $\because$ 本题 $x_1 < x_2 < 0$, $\therefore y_1 < y_2$.

故答案为: $<$.

【点睛】本题考查了二次函数的基本性质, 包括求解析式, 求对称轴以及二次函数增减性, 属于基础题, 熟练掌握二次函数的性质是解决本题的关键.

21. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, 点 M 为边 BC 上一点, $BM = \frac{1}{3}BC$, 联结 AM 交 DE 于点 N .



(1) 求 $\frac{DN}{NE}$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$, 如果 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$, 请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{NE}$.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{4}{5}\vec{b} - \frac{4}{5}\vec{a}$.

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质得到 $\triangle ADN \sim \triangle ABM$, $\triangle ANE \sim \triangle AMC$, 可得 $\frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC}$, 即 $\frac{DN}{NE} = \frac{BM}{MC}$, 根据 $BM = \frac{1}{3}BC$ 可求出 $\frac{DN}{NE}$ 的值;

(2) 根据 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ 可得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+DB} = \frac{2}{5}$, 所以 $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM})$, 根据 $\frac{DN}{NE} = \frac{1}{2}$, 即可得出答案.

【详解】解: (1) $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle AND = \angle B, \angle AND = \angle AMB, \angle ANE = \angle AMC, \angle AEN = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ADN \sim \triangle ABM, \triangle ANE \sim \triangle AMC,$$

$$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM}, \frac{AN}{AM} = \frac{NE}{MC},$$

$$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC},$$

$$\therefore \frac{DN}{NE} = \frac{BM}{MC},$$

$$\therefore BM = \frac{1}{3}BC,$$

$$\therefore \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DN}{NE} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+DB} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \overrightarrow{DN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = \frac{2}{5}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a},$$

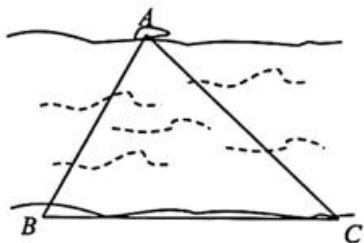
$$\therefore \frac{DN}{NE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{NE} = 2\overrightarrow{DN} = 2\left(\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}\right) = \frac{4}{5}\vec{b} - \frac{4}{5}\vec{a}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质，平行线的性质，向量等相关知识．熟练掌握定理并灵活运用是解题的关键．

22. 如图，为了测量河宽，在河的一边沿岸选取 B 、 C 两点，对岸岸边有一块石头 A ，在 $\triangle ABC$ 中，测得 $\angle B = 64^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $BC = 50$ 米，求河宽（即点 A 到边 BC 的距离）（结果精确到 0.1 米）．

（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sin 64^\circ = 0.90$ ， $\cos 64^\circ = 0.44$ ， $\tan 64^\circ = 2.05$ ）

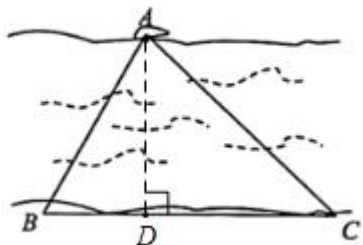


【答案】 河宽约为 33.6 米

【解析】

【分析】过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，并设 $AD = x$ 米，则由已知条件可以得到关于 x 的方程，解方程即可得到河的宽度.

【详解】解：如图，过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，并设 $AD = x$ 米，



$$\because \angle C = 45^\circ, \therefore \angle DAC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore CD = AD = x,$$

$$\because \angle B = 64^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{AD}{\tan 64^\circ} = \frac{x}{\tan 64^\circ},$$

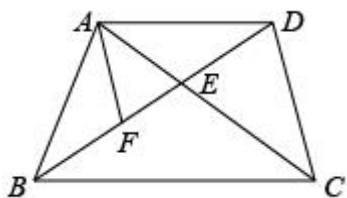
$$\because BC = 50 \text{ 米}, \therefore \frac{x}{\tan 64^\circ} + x = 50,$$

解之得： $x \approx 33.6$,

答：河宽约 33.6 米.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，熟练掌握锐角三角函数的定义并结合方程思想求解是解题关键.

23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 BD 、 AC 相交于点 E ，过点 A 作 $AF \parallel DC$ ，交对角线 BD 于点 F .



(1) 求证： $\frac{DF}{BD} = \frac{DE}{BE}$;

(2) 如果 $\angle ADB = \angle ACD$ ，求证：线段 CD 是线段 DF 、 BE 的比例中项.

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 延长 AF 交 BC 于点 G , 可证 $AD=GC$, 由 $AF//DC$, 可证 $\frac{DF}{BD} = \frac{CG}{BC} = \frac{AD}{BC}$, 由 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$, 可证 $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE}$, 进而可证结论成立;

(2) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$, 可证 $CD^2 = BD \cdot DE$, 由 (1) 得 $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE}$, 即 $DF \cdot BE = BD \cdot DE$, 进而可证线段 CD 是线段 DF 、 BE 的比例中项.

【详解】证明: (1) 如图, 延长 AF 交 BC 于点 G ,

$\because AD//BC, AF//DC,$

$\therefore$ 四边形 $AGCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=GC.$

$\because AF//DC,$

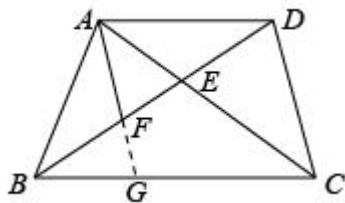
$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{CG}{BC} = \frac{AD}{BC},$$

$\because AD//BC,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE,$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{DE}{BE};$$



(2) $\because AD//BC,$

$\therefore \angle CBD = \angle ADB.$

$\because \angle ADB = \angle ACD,$

$\therefore \angle CBD = \angle ACD,$

$\because \angle CDE = \angle BDC,$

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BDC,$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{DE}{CD},$$

$\therefore CD^2 = BD \cdot DE.$

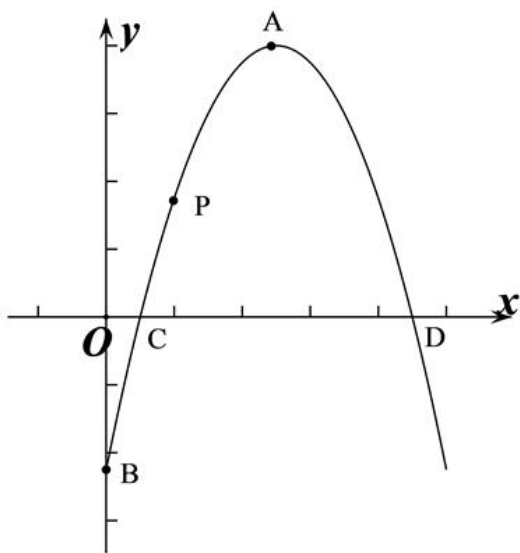
$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore DF \cdot BE = BD \cdot DE,$$

$$\therefore CD^2 = DF \cdot BE.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，以及平行线分线段成比例定理，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解答本题的关键。在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形。

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -(x-m)^2 + 4$ 与 y 轴交于点 B ，与 x 轴交于点 C 、 D （点 C 在点 D 左侧），顶点 A 在第一象限，异于顶点 A 的点 $P(1, n)$ 在该抛物线上。



- (1) 如果点 P 与点 C 重合，求线段 AP 的长；
- (2) 如果抛物线经过原点，点 Q 是抛物线上一点， $\tan \angle OPQ = 3$ ，求点 Q 的坐标；
- (3) 如果直线 PB 与 x 轴的负半轴相交，求 m 的取值范围。

【答案】(1) $2\sqrt{5}$ ；(2) $\left(\frac{15}{4}, \frac{15}{16}\right)$ ；(3) $\frac{1}{2} < m < 2$ 且 $m \neq 1$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据题意求出 C 点的坐标，由点 P 与点 C 重合列等式求解即可；

(2) 由题意代入原点坐标可得出点 P 的坐标，连接 OP ， PQ ，作 $OE \perp PQ$ 于 E 点， $PF \perp x$ 轴于 F 点，根据三角函数值可证明 $\angle OPQ = \angle POF$ ，从而得到 $OG = PG$ ，得到 G 点的坐标，求出 PG 所在直线的解析式，联立等式求解即可；

(3) 分别求出 B、P 的坐标，求出直线 BP 的解析式，令 $y=0$ ，可得直线 BP 与 x 轴的交点横坐标，求其小于 0 的取值范围即可。

【详解】(1) 如图 1， $\because$ 抛物线与 x 轴相交于 C 点，

$$\therefore -(x-m)^2 + 4 = 0, (x-m)^2 = 4,$$

$$x-m = \pm 2, x = m \pm 2,$$

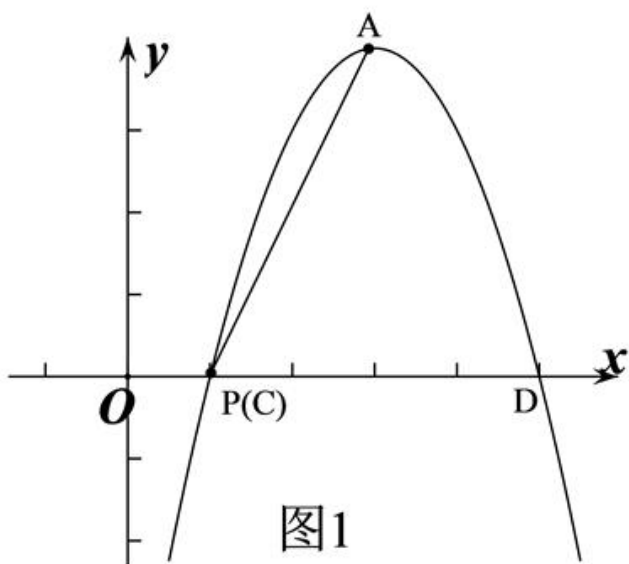
$\because$ C 点在 D 点的左侧， $\therefore C(m-2, 0)$,

又 $\because$ 点 P 与点 C 重合， $P(1, n)$,

$$\therefore m-2=1, m=3,$$

$$\therefore y = -(x-3)^2 + 4, \therefore A(3, 4), P(1, 0),$$

$$\therefore AP = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5};$$



(2) 如果抛物线经过原点，将 $(0, 0)$ 代入，

$$\text{得 } -m^2 + 4 = 0, m = \pm 2,$$

$\because$ 顶点 A 在第一象限， $\therefore m=2$,

$$\therefore y = -(x-2)^2 + 4 = -x^2 + 4x, \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } y=3, \therefore P(1, 3),$$

如图 2，连接 OP，PQ，作 $OE \perp PQ$ 于 E 点， $PF \perp x$ 轴于 F 点，

$$\therefore \tan \angle OPQ = 3, \tan \angle POF = \frac{PF}{OF} = 3,$$

$$\therefore \angle OPQ = \angle POF,$$

$$\therefore n = -(1-m)^2 + 4 = -m^2 + 2m + 3, \quad \therefore P(1, -m^2 + 2m + 3),$$

又 $\because$ 抛物线与 y 轴交于点 B , $\therefore B(0, -m^2 + 4)$,

设直线 BP 的解析式为: $y=kx+b$,

$$\text{代入 } B、P \text{ 两点, } \begin{cases} k+b=-m^2+2m+3 \\ b=-m^2+4 \end{cases},$$

$$\text{则 } \begin{cases} k=2m-1 \\ b=-m^2+4 \end{cases}, \text{ 直线 } BP \text{ 的解析式为: } y=(2m-1)x-m^2+4,$$

$$\text{令 } y=0, \quad x=\frac{m^2-4}{2m-1}=\frac{(m+2)(m-2)}{2m-1},$$

$\because$ 直线 PB 与 x 轴的负半轴相交,

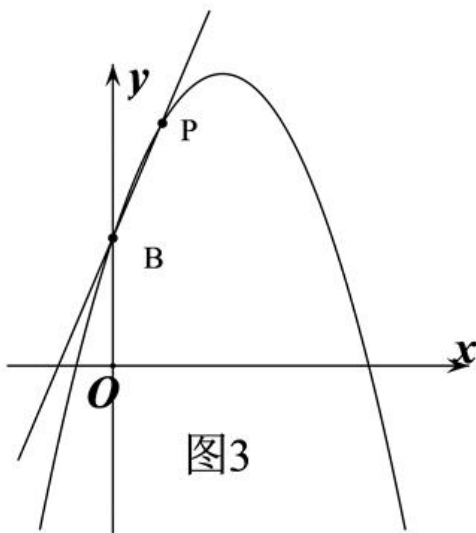
$$\therefore \frac{(m+2)(m-2)}{2m-1} < 0, \quad \begin{cases} (m+2)(m-2) > 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} (m+2)(m-2) < 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } m < -2 \text{ 或 } \frac{1}{2} < m < 2,$$

又 $\because$ 顶点 A 在第一象限, $\therefore m > 0$,

$\because$ 点 A 与点 P 不重合, $\therefore m \neq 1$,

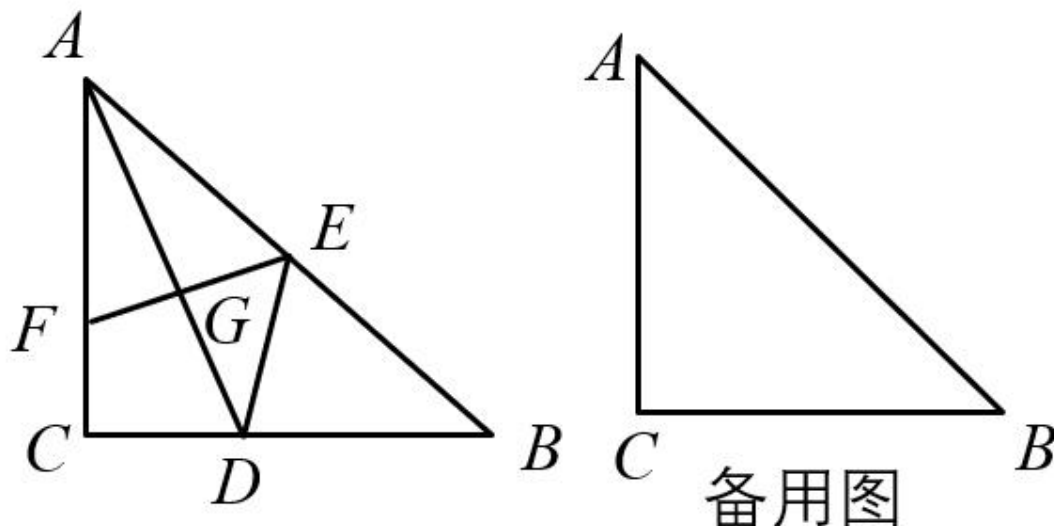
综上所述, $\frac{1}{2} < m < 2$ 且 $m \neq 1$.



【点睛】 本题考查抛物线与坐标轴交点, 抛物线顶点, 一次函数与抛物线交点等问题, 还涉及解直角三角形, 综合性比较强, 难度比较大, 需要有较强的数形结合思想, 充分掌握一次函数和二次函数综合知识, 运用图形解题是解决本题的关键.

25. 如图, 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4$, 点 D 为边 BC 上一动点 (与点 B 、 C 不重

合), 点 E 为边 AB 上一点, $\angle EDB = \angle ADC$, 过点 E 作 $EF \perp AD$, 垂足为点 G, 交射线 AC 于点 F.



- (1) 如果点 D 为边 BC 的中点, 求 $\angle DAB$ 的正切值;
- (2) 当点 F 在边 AC 上时, 设 $CD = x$, $CF = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;
- (3) 联结 DF 如果 $\triangle CDF$ 与 $\triangle AGE$ 相似, 求线段 CD 的长.

【答案】(1) $\tan \angle DAB = \frac{1}{3}$; (2) $y = -2x + 4 (0 < x \leq 2)$; (3) $4\sqrt{2} - 4$, $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

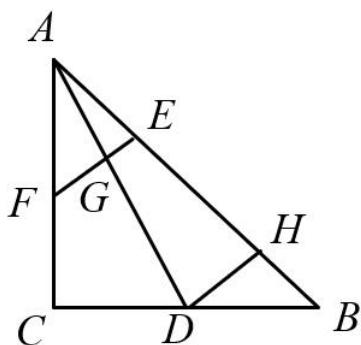
【分析】(1) 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H, 在 $Rt\triangle ACB$ 中, 利用勾股定理得 AD、AB 的长, 再结合等积法, 解得 DH、AH 的长即可解题;

(2) 根据相似三角形对应边成比例的性质, 表示 $EH = \frac{4(4-x)}{x+4}$, 再证明 $\triangle AFE \sim \triangle BDE$

$$\text{由 } \frac{AF}{DB} = \frac{AE}{BE} \text{ 即 } \frac{4-y}{4-x} = \frac{4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}}{\frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}} \text{ 得到与 } x \text{ 的关系;}$$

(3) 根据相似三角形对应边成比例的性质, 结合 (2) 中 y 关于 x 的函数解析式联立方程组, 继而解得 x、y 的值即可解题.

【详解】(1) 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H,



在 $Rt\triangle ACB$ 中, $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = 2\sqrt{5}$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} DB \cdot AC = 4$$

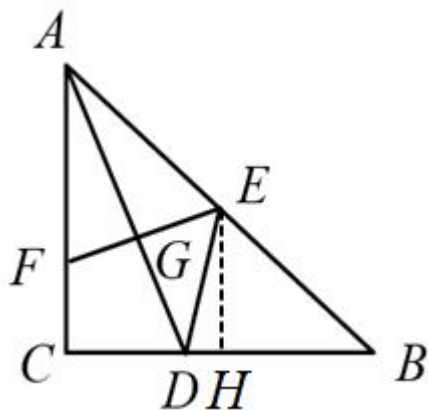
$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$$

$$\therefore DH = \sqrt{2},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \frac{DH}{AH} = \frac{1}{3};$$

(2) 过 E 作 $EH \perp CB$ 于 H



$$\therefore \angle EDB = \angle ADC, \quad \angle C = \angle EHD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle EHD.$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{EH}{DH} \quad \text{即} \quad \frac{4}{x} = \frac{EH}{4-x-EH}.$$

$$\therefore EH = \frac{4(4-x)}{x+4}.$$

$$\therefore EH \perp CB, \quad \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = BC = 4$$

$$\therefore EB = \sqrt{2}EH = \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}, \quad AB = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore AE = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}$$

$$\therefore EF \perp AD, \quad \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFG = \angle ADC.$$

$$\therefore \angle EDB = \angle ADC$$

$$\therefore \angle AFG = \angle EDB.$$

$$\therefore \angle FAE = \angle B = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle BDE.$$

$$\therefore \frac{AF}{DB} = \frac{AE}{BE} \text{ 即 } \frac{4-y}{4-x} = \frac{4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}}{\frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}}.$$

整理得, $y = -2x + 4 (0 < x \leq 2)$;

(3) 在 $\text{Rt}\triangle MDB$ 中, $DB = 4 - x$,

$$\text{所以 } MD = MB = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - x).$$

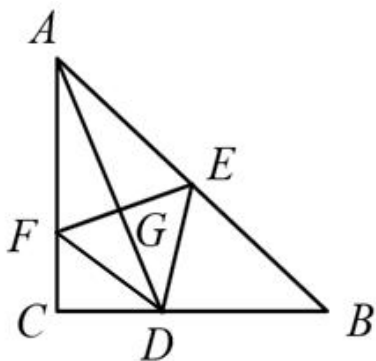
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADM \text{ 中, } AM = AB - MB = 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 + x).$$

$$\text{所以 } \tan \angle DAB = \frac{DM}{AM} = \frac{4-x}{4+x}.$$

按照点 F 的位置, 分两种情况讨论 $\triangle CDF$ 与 $\triangle AGE$ 相似:

① 点 F 在线段 AC 上, 此时 $y = 4 - 2x$.

如图,



如果 $\angle FDC = \angle DAB$, 由 $\tan \angle FDC = \tan \angle DAB$, 得 $\frac{y}{x} = \frac{4-x}{4+x}$.

结合 $y = 4 - 2x$, 整理, 得 $x^2 + 8x + 16 = 0$.

解得 $x = 4\sqrt{2} - 4$ 或 $-4\sqrt{2} - 4$ (舍去),

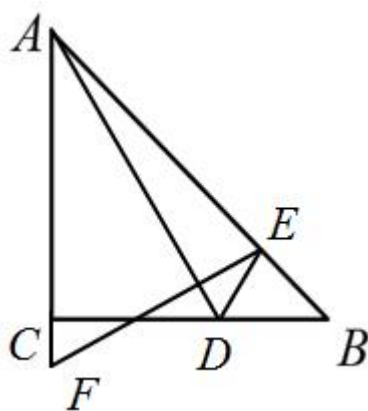
如果 $\angle CFD = \angle DAB$, 由 $\tan \angle CFD = \tan \angle DAB$, 得 $\frac{x}{y} = \frac{4-x}{4+x}$.

结合 $y = 4 - 2x$, 整理, 得 $x^2 - 16x + 16 = 0$.

解得 $x = 8 - 4\sqrt{3}$ 或 $8 + 4\sqrt{3}$ (舍去)

②点 F 在线段 AC 的延长线上, 此时 $y = 2x - 4$

如图



如果 $\angle FDC = \angle DAB$, 由 $\frac{y}{x} = \frac{4-x}{4+x}$ 结合 $y = 2x - 4$, 整理, 得 $3x^2 - 16 = 0$.

解得 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (舍去)

如果 $\angle CFD = \angle DAB$, $\frac{x}{y} = \frac{4-x}{4+x}$ 与 $y = 2x - 4$

整理, 得 $3x^2 - 8x + 16 = 0$.

此方程无解.

综上, CD 的值为 $4\sqrt{2} - 4$ 、 $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查勾股定理、相似三角形的性质, 涉及解二元一次方程组等知识, 解题关键是根据题意利用相似三角形性质构造方程.

