

普陀区 2020 学年度第一学期初三质量调研

数学试卷

考生注意:

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, y 关于 x 的二次函数是 ()

A. $y = ax^2 + bx + c$

B. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

C. $y = x(x+1)$

D. $y = (x+2)^2 - x^2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 形如: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 则 y 是 x 的二次函数, 根据定义逐一判断各选项即可得到答案.

【详解】 解: $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a = 0$ 时, y 不是 x 的二次函数, 故 A 错误;

$y = \frac{1}{x^2 + 1}$, y 不是 x 的二次函数, 故 B 错误;

$y = x(x+1)$, 即 $y = x^2 + x$, y 是 x 的二次函数, 故 C 正确;

$y = (x+2)^2 - x^2$, 即 $y = 4x + 4$, y 不是 x 的二次函数, 故 D 错误;

故选: C.

【点睛】 本题考查的是二次函数的定义, 掌握二次函数的定义是解题的关键.

2. 如果点 $A(3, m)$ 在 x 轴上, 那么点 $B(m+2, m-3)$ 所在的象限是 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 D

【解析】

【分析】先根据点 $A(3, m)$ 在 x 轴上可得 $m=0$ ，然后确定 B 的坐标，最后根据 B 的坐标确定 B 所在的象限即可.

【详解】解：∵点 $A(3, m)$ 在 x 轴上

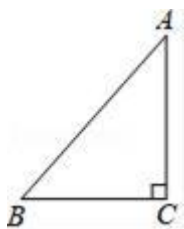
$$\therefore m=0$$

∴ $B(2, -3)$ ，即点 B 在第四象限.

故答案为 D .

【点睛】本题主要考查了平面直角坐标系内点的坐标特征，根据 A 点的位置确定 m 的值成为解答本题的关键.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$. 若 $AB = 3$ ， $BC = 2$ ，则 $\sin A$ 的值为 ()



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据在直角三角形中，正弦为对边比斜边，可得答案.

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 2$ ，得

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3},$$

故选 A.

【点睛】本题考查三角函数，熟记公式是解题关键.

4. 在下列对抛物线 $y = -(x-1)^2$ 的描述中，正确的是 ()

A. 开口向上

B. 顶点在 x 轴上

C. 对称轴是直线 $x = -1$

D. 与 y 轴的交点是 $(0, 1)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质逐项排查即可.

【详解】解: $\because y=-(x-1)^2$

$\therefore$ 该抛物线开口方向向下, 顶点坐标 $(1, 0)$, 顶点在 x 轴上, 对称轴为直线 $x=1$, 与 y 轴交点为 $(0, -1)$, 所以 A、C、D 选项错误, B 选项正确, 故选 B.

【点睛】本题主要考查了函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质, 掌握根据函数解析式确定抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标的方法成为解答本题的关键.

5. 已知 $\vec{a}$ 是非零向量, $\vec{b} = -2\vec{a}$, 下列说法中错误的是 ()

A. $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行

B. $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 互为相反向量

C. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$

D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量的有关定义和运算分别进行判断, 即可得出结论.

【详解】解: A. 因为 $\vec{b} = -2\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$), 则 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行, 故此结论正确;

B. 若两个向量方向相反, 大小相等, 则为相反向量, 故此结论错误;

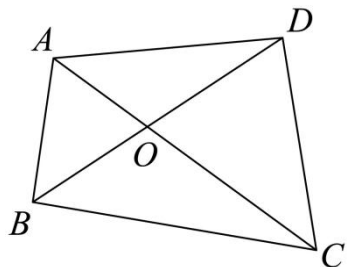
C. 因为 $\vec{b} = -2\vec{a}$, 则 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ 结论正确;

D. $\vec{b} = -2\vec{a}$ 两边同除以 -2, 则 $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, 故此结论正确.

故答案为: B.

【点睛】本题考查了向量的相关应用, 解题的关键是熟练掌握基本知识及运算法则.

6. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$, 由此推得的正确结论是 ()



A. $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$

B. $\frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC}$

C. $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

D. $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

【详解】解: $\because \angle AOB$ 与 $\angle DOC$ 是对顶角

$$\therefore \angle AOB = \angle DOC$$

$$\text{又} \because \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC},$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC,$$

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}.$$

故选: A

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{x-y} =$ _____.

【答案】 $\frac{7}{3}$

【解析】

【分析】由 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 设 $x = 5k (k \neq 0)$, 则 $y = 2k$, 再把 x, y 的值代入代数式即可得到答案.

【详解】解: $\because \frac{x}{y} = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 设 $x = 5k (k \neq 0)$, 则 $y = 2k$,

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} = \frac{5k+2k}{5k-2k} = \frac{7k}{3k} = \frac{7}{3},$$

故答案为: $\frac{7}{3}$.

【点睛】本题考查的是比例的基本性质, 掌握设参数法解决比例的问题是解题的关键.

8. 如果正比例函数 $y = kx$ 的图像经过第一、三象限, 那么 y 的值随着 x 的值增大而_____. (填“增大”或“减小”)

【答案】增大

【解析】

【分析】根据题目信息, 正比例函数 $y = kx$ 的图像经过第一、三象限, 可得 k 的值大于 0, 即可得出结论.

【详解】根据正比例函数的性质可知,

如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第一、三象限, 那么 $k>0$,
那么 y 的值随自变量 x 的值增大而增大.

故答案为: 增大.

【点睛】 本题考查正比例函数的性质, 属于基础题, 熟练掌握正比例函数的性质即可解题.

9. 沿着 x 轴正方向看, 如果抛物线 $y=(a-2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的, 那么 a 的取值范围是
_____.

【答案】 $a > 2$

【解析】

【分析】 利用二次函数的性质得到抛物线开口向上, 则 $a-2 > 0$, 然后解不等式即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y=(a-2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore a-2 > 0$, 解得 $a > 2$.

故答案为: $a > 2$.

【点睛】 本题考查了二次函数图象与系数的关系: 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口.

10. 二次函数 $y=2x^2+4x$ 图像的顶点坐标为_____.

【答案】 $(-1, -2)$

【解析】

【分析】 先将二次函数 $y=2x^2+4x$ 化成顶点式, 然后直接写出顶点坐标即可.

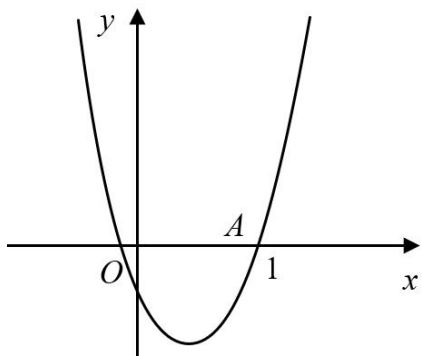
【详解】 解: $\because y=2x^2+4x=2(x+1)^2-2$

$\therefore$ 此函数 $y=2x^2+4x$ 图像的顶点坐标为 $(-1, -2)$.

故答案为 $(-1, -2)$.

【点睛】 本题考查了求二次函数的顶点坐标, 将二次函数的一般式化成顶点式成为解答本题的关键.

11. 如图, 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(1, 0)$, 那么 $f(-1)=$ _____ 0. (填“ $>$ ”“ $<$ ”或“ $=$ ”)



【答案】 $>$

【解析】

【分析】 根据图象与 x 轴的交点，判断其对称轴的位置，再结合抛物线的对称性解题即可.

【详解】 由图象可知，二次函数的对称轴在把 0 至 0.5 之间，二次函数经过点 $A(1,0)$ ，故二次函数在 x 轴上的另一个点在 -0.5 至 0 之间，故 $f(-1) > 0$ ，

故答案为： $>$.

【点睛】 本题考查二次函数的性质，涉及二次函数图象与 x 轴的交点，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

12. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\vec{0}$.

【解析】

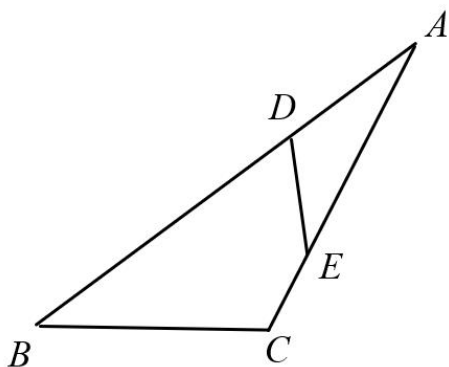
【分析】 由在 $\triangle ABC$ 中，根据三角形法则即可求得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 的值，则可求得答案.

【详解】 $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

故答案为： $\vec{0}$.

【点睛】 本题考查向量的性质，大小和方向是向量的两个要素，分别是向量的代数特征和几何特征，借助于向量可以实现某些代数问题与几何问题的相互转化.

13. 如图， D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点，且 $\angle AED = \angle B$. 如果 $AB = 12$ ， $AE = 6$ ， $EC = 2$ ，那么 AD 的长等于_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 先求出 AC 的长，然后再说明 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，最后运用相似三角形的性质列方程求解即可.

【详解】 解： $\because AE = 6, EC = 2,$

$$\therefore AC = AE + EC = 8$$

$$\because \angle AED = \angle B, \angle A = \angle A$$

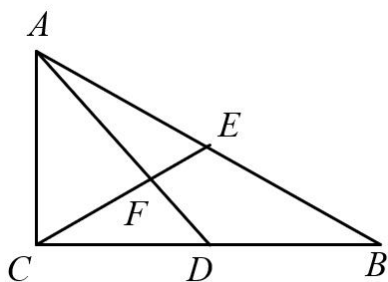
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}, \text{即 } \frac{AD}{8} = \frac{6}{12}, \text{解得 } AD = 4.$$

故答案为 4.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，证得 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 是解答本题的关键.

14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D、E 分别在边 BC、AB 上， $CD = BD$ ， $CE = \frac{1}{2}AB$ ，AD 与 CE 交于点 F，如果 $AB = 6$ ，那么 CF 的长等于_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 根据直角三角形斜边中线的性质可得点 E 为斜边 AB 的中点，推出 DE 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中位线，通过 $\triangle ACF \sim \triangle DEF$ 可得出最终结果.

【详解】 解： $\because CD = BD, \therefore$ 点 D 为 BC 边的中点，

$\because \triangle ABC$ 为直角三角形, $CE = \frac{1}{2}AB = 3$,

$\therefore$ 点 E 为斜边 AB 的中点,

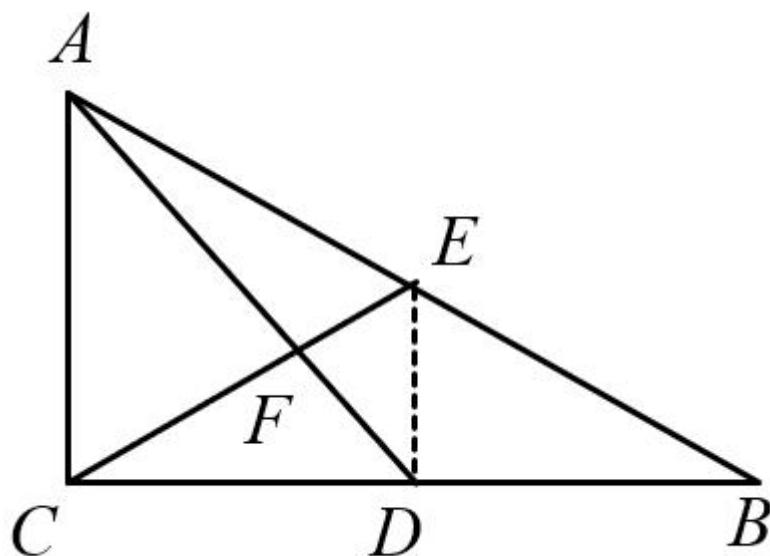
如图, 连接 DE , DE 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中位线,

则 $DE \parallel AC$ 且 $DE = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle DEF$, $\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{CF} = \frac{1}{2}$,

已知 $CE=3$, $\therefore CF=2$.

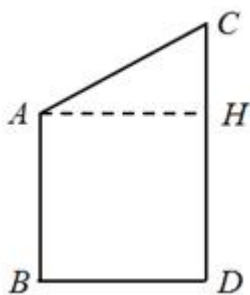
故答案为: 2.



【点睛】 本题考查了直角三角形斜边的中线性质的, 还涉及中位线, 相似三角形的判定和性质, 熟练掌握直角三角形斜边中线的性质, 做出辅助线证明相似求解是解决本题的关键.

15. 如图, 小明在教学楼 AB 的楼顶 A 测得: 对面实验大楼 CD 的顶端 C 的仰角为 α , 底部 D 的俯角为 β ,

如果教学楼 AB 的高度为 m 米, 那么两栋教学楼的高度差 CH 为_____米.



【答案】 $\frac{m \tan \alpha}{\tan \beta}$

【解析】

【分析】连接 AC，由题意知四边形 ABCH 是矩形，则 $DH=AB=m$ ，利用 $\text{Rt}\triangle ADH$ 得到 $\tan \angle DAH = \frac{DH}{AH}$ ，

推出 $AH = \frac{m}{\tan \beta}$ ，再根据 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中 $\tan \angle CAH = \frac{CH}{AH}$ ，即可求出答案.

【详解】连接 AC，

由题意知四边形 ABCH 是矩形，则 $DH=AB=m$ ，

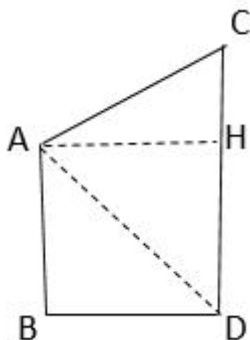
在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $\angle DAH = \beta$ ， $\tan \angle DAH = \frac{DH}{AH}$ ，

$$\therefore AH = \frac{m}{\tan \beta},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中， $\angle CAH = \alpha$ ， $\tan \angle CAH = \frac{CH}{AH}$ ，

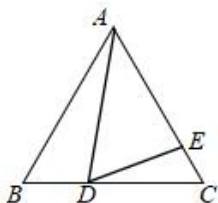
$$\therefore CH = \tan \alpha \cdot \frac{m}{\tan \beta} = \frac{m \tan \alpha}{\tan \beta},$$

故答案为： $\frac{m \tan \alpha}{\tan \beta}$.



【点睛】此题考查锐角三角函数的实际应用，矩形的性质，正确理解题中的仰角和俯角，构建直角三角形利用锐角三角函数解决问题是解题的关键.

16. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上， $\angle ADE = 60^\circ$ ，如果 $BD:DC = 1:2$ ， $AD = 2$ ，那么 DE 的长等于_____.



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】根据一线三等角证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，列出比例式代入数值计算即可.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle BAD = 120^\circ$$

$$\because \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle CDE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{DC}{DE}$$

$$\because BD: DC = 1: 2, AD = 2,$$

$$\text{设 } AB = BC = 3a$$

$$\text{则 } BD = a, DC = 2a$$

$$\therefore \frac{3a}{2} = \frac{2a}{DE}$$

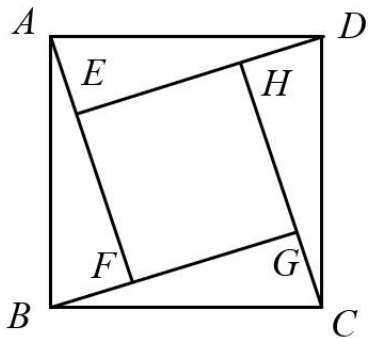
$$\text{解得 } DE = \frac{4}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，相似三角形的性质与判定，掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

17. 勾股定理是世界文明宝库中的一颗璀璨明珠，我国汉代数学家赵爽将四个全等的直角三角形拼成了一个大正方形 $ABCD$ ，同时留下一个小正方形 $EFGH$ 的空隙（如图），利用面积证明了勾股定理. 如果小正方形 $EFGH$ 的面积是 4，

$\sin \angle GBC = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，那么大正方形 $ABCD$ 的面积等于_____.



【答案】 10

【解析】

【分析】由题意知小正方形边长为 2，运用正弦函数定义求解.

【详解】解：由题意知小正方形边长为 2， $\therefore FG=2$ ，

设 $BF=x$ ， $BG=2+x$ ， $\therefore \triangle BGC \cong \triangle AFB$ ，

$\therefore CG=BF=x$ ，

$$\therefore \sin \angle GBC = \frac{CG}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore BC = \frac{10x}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}x$$

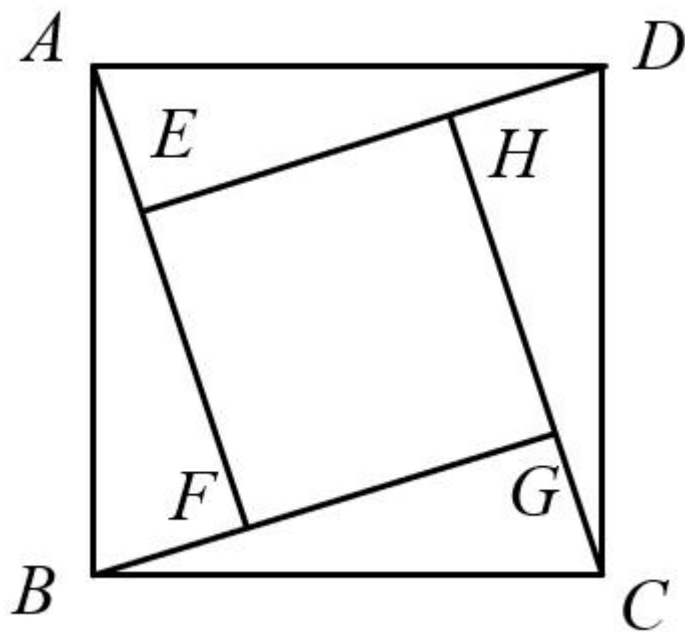
由勾股定理得： $(2+x)^2 + x^2 = 10x^2$

解得： $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{2}$ （舍去）

$$BC = \sqrt{10}$$

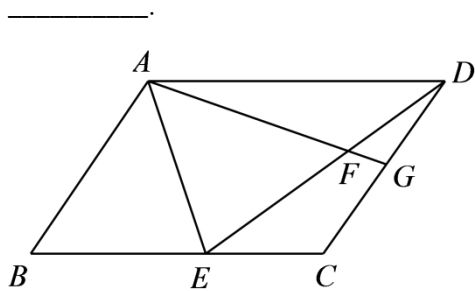
大正方形 $ABCD$ 的面积 $= BC^2 = 10$

故答案为：10.



【点睛】本题考查了解直角三角形、勾股定理的证明和正方形面积，掌握解直角三角形、勾股定理的证明和正方形面积是解题的关键.

18. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折得到 $\triangle AFE$ ，点 B 的对应点 F 恰好落在线段 DE 上，线段 AF 的延长线交边 CD 于点 G ，如果 $BE:EC=3:2$ ，那么 $AF:FG$ 的值等于



【答案】 $\frac{21}{4}$

【解析】

【分析】由轴对称的性质可得： $\angle BEA = \angle FEA$ ， $BE = FE$ ， $\angle ABE = \angle AFE$ ，结合平行四边形的性质，结合 $BE : EC = 3 : 2$ ，设 $BE = 3k$ ，则 $EC = 2k$ ，证明 $BC = AD = DE = 5k$ ，再证明 $\triangle ADG \sim \triangle DFG$ ，可得： $\frac{AD}{DF} = \frac{DG}{FG} = \frac{AG}{DG} = \frac{5k}{2k} = \frac{5}{2}$ ，求解： $FG = \frac{2}{5}DG$ ， $AG = \frac{5}{2}DG$ ，从而可得答案.

【详解】解： $\because \triangle ABE \cong \triangle AFE$

$\therefore \angle BEA = \angle FEA$ ， $BE = FE$ ， $\angle ABE = \angle AFE$ ，

$\because \square ABCD$

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $\angle B = \angle ADC$ ，

$\therefore \angle BEA = \angle DAE = \angle FEA$

$\therefore AD = DE$

$\because BE : EC = 3 : 2$

$\therefore$ 设 $BE = 3k$ ，则 $EC = 2k$ ，

$\therefore BC = AD = DE = 5k$ ，

$\therefore DF = 2k$ ，

$\because \angle DFG = \angle AFE$ ，

$\therefore \angle DFG = \angle ADG$ ，

$\because \angle DGF = \angle AGD$ ，

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle DFG$ ，

$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{DG}{FG} = \frac{AG}{DG} = \frac{5k}{2k} = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore FG = \frac{2}{5}DG$ ， $AG = \frac{5}{2}DG$ ，

$\therefore \frac{AG}{FG} = \frac{25}{4}$ ，

$$\therefore \frac{AG - FG}{FG} = \frac{25 - 4}{4},$$

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{21}{4},$$

故答案为: $\frac{21}{4}$.

【点睛】 本题考查的是平行四边形的性质，轴对称的性质，等腰三角形的判定，相似三角形的判定与性质，掌握以上知识是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ}.$

【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2$

【解析】

【分析】 根据 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$ 求解即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$

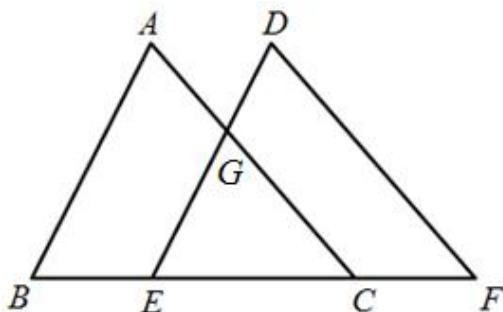
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sqrt{3} - 1$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2.$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值, 解题的关键是熟练记忆一些特殊角的三角函数值.

20. 如图, 已知点 B 、 E 、 C 、 F 在同一条直线上, $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$, AC 与 DE 相交于点 G ,

$$\frac{AG}{GC} = \frac{DG}{GE} = \frac{1}{2}, \quad BE = 2.$$



(1) 求 BF 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{EG} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BF} =$ _____, $\overrightarrow{DF} =$ _ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

【答案】 (1) $BF=8$; (2) $4\vec{b}$, $3\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 (1) 先证 $\triangle CEG \sim \triangle CBA$, 再证 $\triangle ECG \sim \triangle EFD$, 然后求解即可;

(2) 先证 $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BE} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{b}$, 再证 $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\vec{a}$, 然后再由 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = 2\vec{b} + \vec{b} = 3\vec{b}$ 得出结论即可.

【详解】解: (1) $\because AB \parallel GE$,

$$\therefore \angle B = \angle DEC,$$

$$\because \angle ACB = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle CEG \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CE = 2BE = 4,$$

同理 $\triangle ECG \sim \triangle EFD$,

$$\therefore \frac{DG}{GE} = \frac{FC}{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CE = 2FC = 4,$$

$$\therefore FC = 2,$$

$$\therefore BF = BE + EC + FC = 2 + 4 + 2 = 8;$$

$$(2) \overrightarrow{BE} = \vec{b}, \text{ 由 (1) 可知 } BE = CF = \frac{1}{2}EC,$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BE} = 2\vec{b}, \quad \overrightarrow{CF} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = 4\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EG} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\vec{a},$$

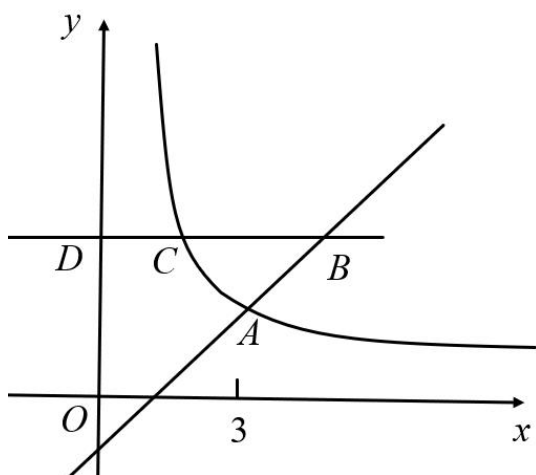
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = 2\vec{b} + \vec{b} = 3\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = 3\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定与向量, 解题的关键是掌握相似三角形的性质与判定.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像与一次函数 $y = kx - 1$ 的图像相交于横坐标为 3 的

点A.



(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 如图, 已知点B在这个一次函数图像上, 点C在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上, 直线 $BC \parallel x$ 轴, 且在点A上方, 并与y轴相交于点D. 如果点C恰好是BD的中点, 求点B的坐标.

【答案】 (1) $y = x - 1$; (2) $B(4, 3)$

【解析】

【分析】 (1) 先将点A的坐标求出来, 然后代入一次函数表达式求解即可;

(2) 根据题意设出C、B两点的坐标, 将B点坐标代入一次函数中即可求出最终结果.

【详解】 解: (1) $\because$ 点A在反比例函数图像上且横坐标为3, 则 $A(3, 2)$,

由题意得 $3k - 1 = 2$,

$\therefore k = 1$,

$\therefore$ 一次函数解析式 $y = x - 1$;

(2) 设 $C(x, \frac{6}{x})$, $\therefore B(2x, \frac{6}{x})$,

又点B在一次函数图像上,

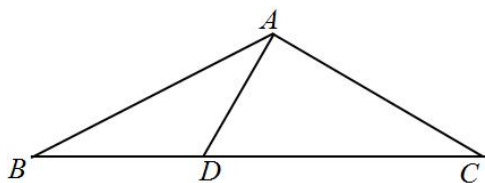
$\therefore \frac{6}{x} = 2x - 1$,

解得 $x = 2$ 或 $x = -\frac{3}{2}$ (舍去).

$\therefore B(4, 3)$.

【点睛】 本题考查一次函数与反比例函数综合题, 难度一般, 熟练掌握一次函数与反比例函数综合题的处理方法, 能够设出点通过未知数求解是解决本题的关键.

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BC上的一点D在边AB的垂直平分线上, $AB^2 = BD \cdot BC$.



(1) 求证: $\angle B = \angle C$;

(2) 如果 $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 10$, 求 $\cos \angle ADC$ 的值.

【答案】 (1) 见解析; (2) $\cos \angle ADC = \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $AB^2 = BD \cdot BC$, 得出 $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$, 可证得 $\triangle ABD \sim \triangle BCA$, 进而证得 $\angle BAD = \angle C$, 再根据线段垂直平分线的性质可推得 $\angle BAD = \angle B$, 根据等量代换即可解得;

(2) 作 $DE \perp AB$ 于 E , 由 AH 垂直平分 BC , 求出 $BE = AE = \sqrt{10}$, $BH = CH = 5$, 由勾股定理求出 AH , 设 $DH = x$, 则 $BD = AD = 5 - x$, 再由勾股定理求出 AD , 然后由三角函数定义即可得出结果.

【详解】 解: (1) 证: $\because AB^2 = BD \cdot BC$,

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB},$$

又 $\angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BCA,$$

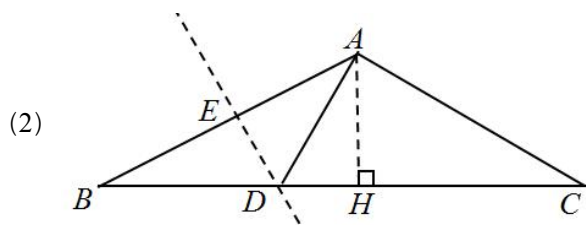
$$\therefore \angle BAD = \angle C,$$

又 DE 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle B,$$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$



作 ED 垂直平分 AB , AH 垂直平分 BC

$$\therefore BE = AE = \sqrt{10}, \quad BH = CH = 5,$$

$$\text{在 Rt} \triangle ABH \text{ 中, } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 5^2} = \sqrt{15}$$

在 $\text{Rt} \triangle ADH$ 中, 设 $DH = x$, 则 $BD = AD = 5 - x$

$$x^2 + 15 = (5 - x)^2$$

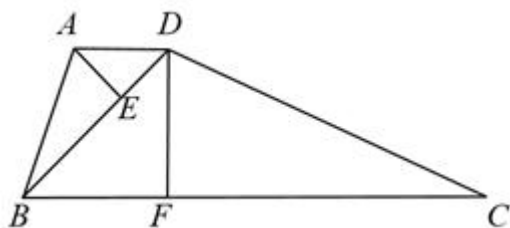
$$x = 1$$

$$\therefore AD = 4$$

$$\therefore \cos \angle ADC = \frac{1}{4}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判断和性质、线段垂直平分线的性质、勾股定理以及三角函数的定义，难度不大，正确做出辅助线是解题的关键.

23. 已知：如图， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABD = \angle C$ ， $AE \perp BD$ ， $DF \perp BC$ ，点 E 、 F 分别为垂足.



(1) 求证： $\frac{AE}{DF} = \frac{BD}{BC}$ ；

(2) 连结 EF ，如果 $\angle ADB = \angle BDF$ ，求证： $DF \cdot DC = EF \cdot BC$ 。

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先证 $\triangle ABD$ 与 $\triangle DCB$ 相似，再根据相似三角形对应线段成比例再进行证明，问题得证；

(2) 先证 $\triangle ABD \sim \triangle EFD$ ，再证 $\triangle DCB \sim \triangle EFD$ ，最后根据相似三角形对应线段成比例进行证明，问题得证.

【详解】证明 (1) $\because AD \parallel BC$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC$$

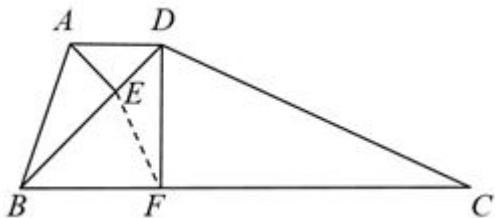
$$\because \angle ABD = \angle C$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

又 $\because AE$ 、 DF 分别是 $\triangle ABD$ 与 $\triangle DCB$ 对应边上的高，

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{BD}{BC}$$

(2) 如图，连结 EF



$\because AD \parallel BC, DF \perp BC,$

$\therefore \angle ADF = 90^\circ,$

$\because \angle ADB = \angle BDF,$

$\therefore \angle ADB = \angle BDF = 45^\circ$

$\because AE \perp BD,$

$\therefore \angle AED = 90^\circ$

$\therefore \frac{DE}{DA} = \cos 45^\circ = \frac{DF}{DB}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle EFD$

$\therefore \triangle DCB \sim \triangle EFD$

$\therefore \frac{DC}{EF} = \frac{BC}{DF}$

$\therefore DF \cdot DC = EF \cdot BC$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

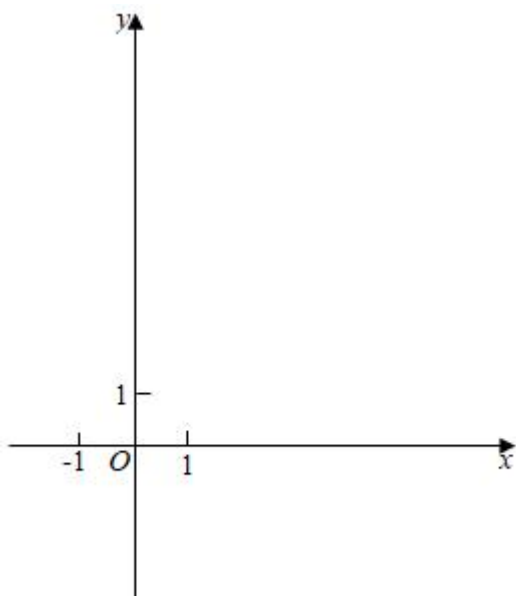
24. 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 与 y 轴交于点 A ，顶点 B 的坐标为 $(2, -1)$.

(1) 直接写出点 A 的坐标，并求抛物线的表达式；

(2) 设点 C 在 x 轴上，且 $\angle CAB = 90^\circ$ ，直线 AC 与抛物线的另一个交点为 D .

①求点 C 、 D 的坐标；

②将抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 沿着射线 BD 的方向平移，平移后的抛物线顶点仍在线段 BD 上，点 A 的对应点为 P . 设线段 AB 与 x 轴的交点为 Q ，如果 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CBQ$ 相似，求点 P 的坐标.



【答案】(1) $(0, 1)$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$; (2) ① $C(-1, 0)$, $D(6, 7)$, ② $(\frac{12}{5}, \frac{29}{5})$

【解析】

【分析】(1) 将顶点 B 和点 A 代入解析式计算出系数即可.

(2) ①利用二次函数写出点 D 的坐标, 利用 $DH=CH$ 列方程计算点 D 的坐标.

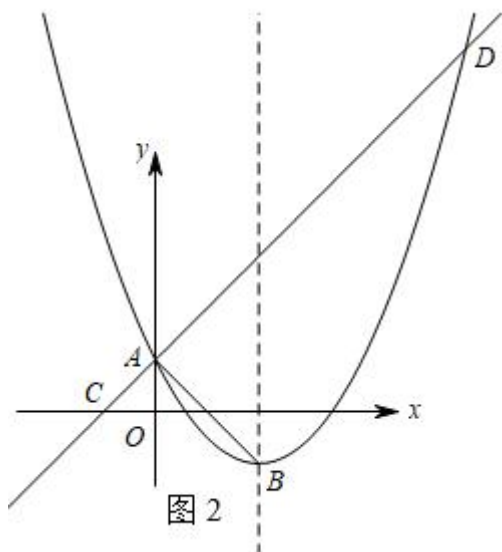
②分类讨论, 利用锐角三角函数找到边的关系, 找出相似三角形, 利用比例关系, 计算出 AP 的长度, 再写出点 P 的坐标.

【详解】解: (1) 由 $y = ax^2 + bx + 1$, 得 $A(0, 1)$.

设抛物线的顶点式为 $y = a(x-2)^2 - 1$, 代入点 $A(0, 1)$, 得 $1 = 4a - 1$.

解得 $a = \frac{1}{2}$. 所以抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

(2) ①如图 2, 由 $A(0, 1)$ 、 $B(2, -1)$, 可知 A、B 两点间的水平距离、竖直距离都是 2, 所以 $\angle OAB = 45^\circ$.



如果点 C 在 x 轴上, 且 $\angle CAB = 90^\circ$, 那么 $\angle CAO = 45^\circ$. 所以 $C(-1, 0)$.

设 $D(x, \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1)$. 作 $DH \perp x$ 轴于 H .

由 $DH = CH$, 得 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = x + 1$.

解得 $x = 6$, 或 $x = 0$ (与点 A 重合, 舍去). 所以 $D(6, 7)$.

②如图 2, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, AB 与 x 轴交于点 $Q(1, 0)$.

由 $A(0, 1)$ 、 $D(6, 7)$, 可知 $\angle EAD = 45^\circ$, $AD = 6\sqrt{2}$.

如图 3, 作 $PE \perp y$ 轴于 E .

过点 B 作 x 轴的平行线, 过点 D 作 y 轴的平行线, 两条直线交于点 F .

由 $B(2, -1)$ 、 $D(6, 7)$, 得 $\tan \angle BDF = \frac{BF}{DF} = \frac{1}{2}$. 所以 $\angle ABC = \angle BDF$.

由 $AP \parallel BD$, 可得 $\angle EAP = \angle BDF$.

所以 $\angle EAP = \angle ABC$.

又因为 $\angle EAP + \angle PAD = 45^\circ$, $\angle ABC + \angle BCQ = 45^\circ$, 所以 $\angle PAD = \angle BCQ$.

因为 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CBQ$ 相似.

①当 $\frac{AP}{AD} = \frac{CQ}{CB}$ 时, $\frac{AP}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$. 解得 $AP = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

此时 $PE = \frac{12}{5}$, $AE = 2PE = \frac{24}{5}$. 所以 $P(\frac{12}{5}, \frac{29}{5})$.

②当 $\frac{AP}{AD} = \frac{CB}{CQ}$ 时, $\frac{AP}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 解得 $AP = 6\sqrt{5}$.

此时 $PE = 6$, $AE = 2PE = 12$. 所以 $P(6, 13)$. 但此时平移后的抛物线的顶点已经不在线段 BD 上了.

综上所述, 点 P 的坐标为 $(\frac{12}{5}, \frac{29}{5})$.

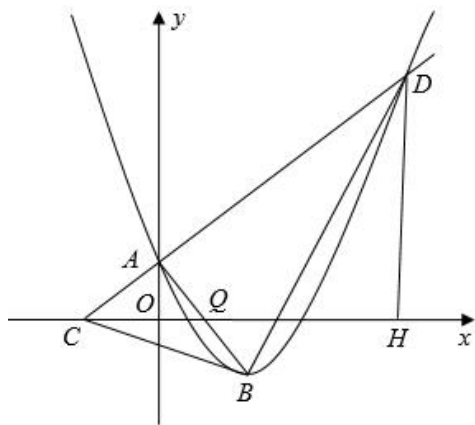


图 2

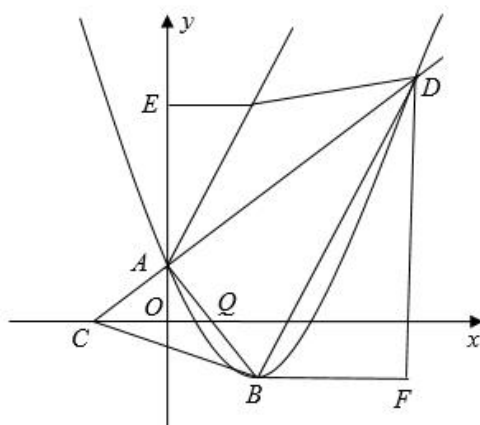
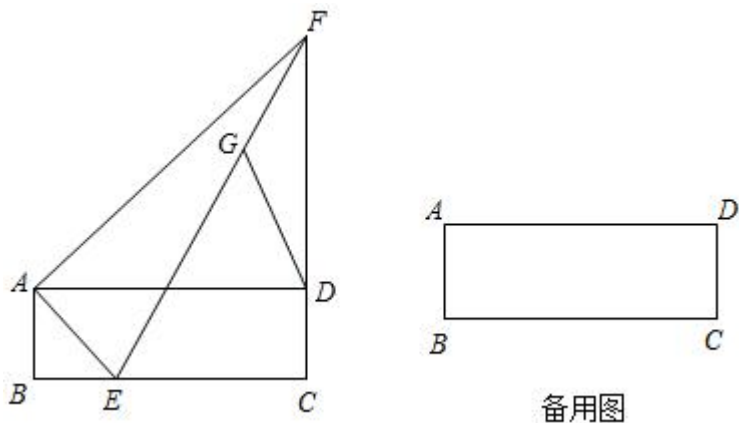


图 3

【点睛】本题考查相似三角形、锐角三角函数、二次函数. 灵活使用相似三角形的判定是难点.

25. 如图, 矩形 ABCD 中, $AB = 1$, $BC = 3$, 点 E 是边 BC 上一个动点 (不与点 B、C 重合), AE 的垂线 AF 交 CD 的延长线于点 F, 点 G 在线段 EF 上, 满足 $FG : GE = 1 : 2$, 设 $BE = x$.

- (1) 求证: $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE}$;
- (2) 当点 G 在 $\triangle ADF$ 的内部时, 用 x 的代数式表示 $\angle ADG$ 的余切;
- (3) 当 $\angle FGD = \angle AFE$ 时, 求线段 BE 的长.



【答案】(1) 见解析; (2) $\frac{3-x}{6x-1}$; (3) $\frac{9-\sqrt{77}}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 根据题意可证明 $\angle DAF = \angle BAE$, 又由于 $\angle ABE = \angle ADF = 90^\circ$, 即证明 $\triangle ADF \sim \triangle ABE$, 所以 $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE}$.

(2) 作 $GH \perp CF$ 于 H, 根据题意可求出 $DF = 3BE = 3x$, 根据平行线分线段成比例得出 $\frac{GH}{EC} = \frac{FH}{FC} = \frac{FG}{FE} = \frac{1}{3}$, 即可列出关于 x 的等式, 从而得出 GH 和 FH 的长, 即可求出 HD 的长, $\cot \angle ADG = \cot \angle DGH = \frac{GH}{HD}$, 即可求出结果.

(3) 作 $EM \parallel GD$ 交 DC 于点 M, 即可知 $\frac{FD}{DM} = \frac{FG}{GE} = \frac{1}{2}$, 可求出 DM, 从而求出 CM, 根据图形可证明 $\triangle ABE \sim \triangle ECM$, 即可得到 $\frac{AB}{BE} = \frac{EC}{CM}$, 即列出关于 x 的方程, 解出 x 即可.

【详解】(1) 如图, 因为 $AF \perp AE$,

$$\therefore \angle EAF = \angle BAD = \angle ADF = 90^\circ.$$

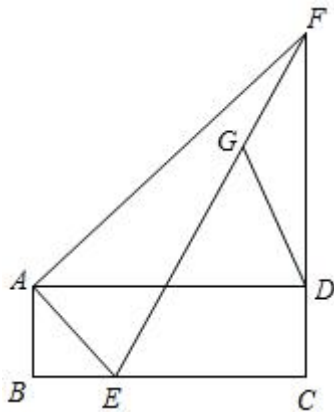
$\therefore$ 同角的余角相等,

$$\therefore \angle DAF = \angle BAE.$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ADF = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABE.$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE}.$$



$$(2) \text{ 由 } \frac{DF}{BE} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{1}, \text{ 得 } DF = 3BE = 3x.$$

如图, 作 $GH \perp CF$ 于 H , 那么 $GH \parallel BC \parallel AD$.

$$\text{根据题意结合平行线分线段成比例得: } \frac{GH}{EC} = \frac{FH}{FC} = \frac{FG}{FE} = \frac{1}{3}.$$

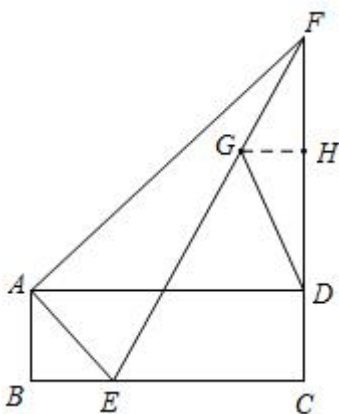
$$\because EC = BC - BE, \quad FC = CD + DF,$$

$$\therefore \frac{GH}{3-x} = \frac{FH}{3x+1} = \frac{1}{3}. \text{ 即 } GH = \frac{1}{3}(3-x), \quad FH = \frac{1}{3}(3x+1).$$

$$\text{在 Rt}\triangle GHD \text{ 中, } HD = DF - FH = 3x - \frac{1}{3}(3x+1) = 2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(6x-1),$$

$$\therefore \angle ADG = \angle DGH,$$

$$\therefore \cot \angle ADG = \cot \angle DGH = \frac{GH}{HD} = \frac{\frac{1}{3}(3-x)}{\frac{1}{3}(6x-1)} = \frac{3-x}{6x-1}.$$



(3) 当点 G 在 $\triangle ADF$ 内部时, 很明显 $\angle FGD$ 和 $\angle AFE$ 不相等. 所以点 G 在 $\triangle ADF$ 外部.

$$\text{如图, 作 } EM \parallel GD \text{ 交 } DC \text{ 于点 } M, \text{ 那么 } \frac{FD}{DM} = \frac{FG}{GE} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore DM = 6x,$$

$$\therefore MC = 1 - 6x.$$

如果 $\angle FGD = \angle AFE$, 那么 $AF \parallel GD \parallel EM$.

$$\therefore \angle AEM + \angle EAF = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle AEM = 90^\circ.$$

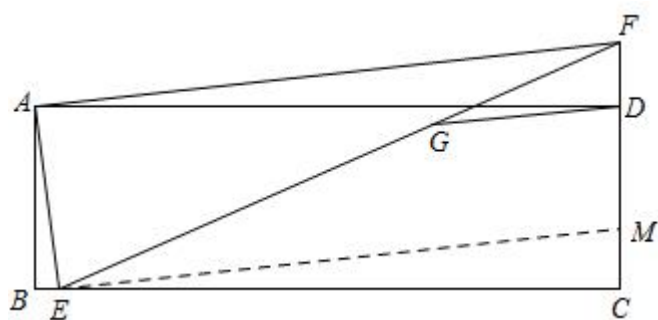
$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECM.$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{EC}{CM}. \quad \text{即} \quad \frac{1}{x} = \frac{3-x}{1-6x}.$$

整理, 得 $x^2 - 9x + 1 = 0$.

$$\text{解得 } x_1 = \frac{9 - \sqrt{77}}{2}, \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{77}}{2} > 3 \quad (\text{不符合题意, 舍去}).$$

$$\text{所以 } BE = \frac{9 - \sqrt{77}}{2}.$$



【点睛】 本题考查三角形相似的判定与性质, 矩形, 余角, 平行线的性质. 综合性较强, 作出辅助线是解答本题的关键.

