

2020-2021 学年上海市普陀区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1.（4 分）下列函数中， y 关于 x 的二次函数是（ ）

A. $y = ax^2 + bx + c$

B. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

C. $y = x(x+1)$

D. $y = (x+2)^2 - x^2$

2.（4 分）如果点 $A(3, m)$ 在 x 轴上，那么点 $B(m+2, m-3)$ 所在的象限是（ ）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3.（4 分）已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 2$ ，那么 $\tan B$ 的值等于（ ）

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4.（4 分）在下列对抛物线 $y = -(x-1)^2$ 的描述中，正确的是（ ）

A. 开口向上

B. 顶点在 x 轴上

C. 对称轴是直线 $x = -1$

D. 与 y 轴的交点是 $(0, 1)$

5.（4 分）已知 $\vec{a}$ 是非零向量， $\vec{b} = -2\vec{a}$ ，下列说法中错误的是（ ）

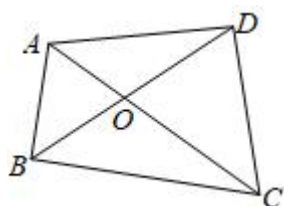
A. $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行

B. $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 互为相反向量

C. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$

D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

6.（4 分）如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$ ，由此推得的正确结论是（ ）



A. $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$

B. $\frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC}$

C. $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

D. $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

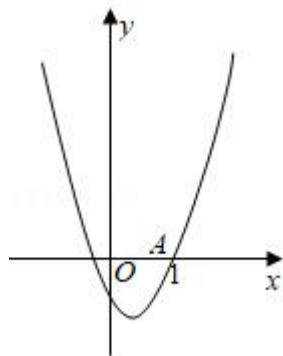
7.（4 分）已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ ，那么 $\frac{x+y}{x-y} =$ _____.

8.（4 分）如果正比例函数 $y = kx$ 的图象经过第一、三象限，那么 y 的值随着 x 的值增大而_____。（填“增大”或“减小”）

9. (4分) 沿着 x 轴正方向看, 如果抛物线 $y = (a - 2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的, 那么 a 的取值范围是_____.

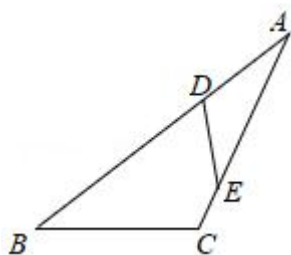
10. (4分) 二次函数 $y = 2x^2 + 4x$ 图象的顶点坐标为_____.

11. (4分) 如图, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(1, 0)$, 那么 $f(-1)$ _____ 0. (填 “>”、“<” 或 “=”)

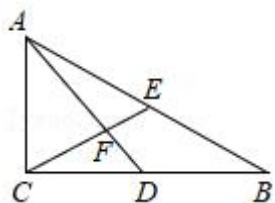


12. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} =$ _____.

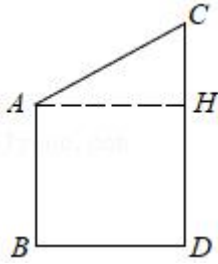
13. (4分) 如图, D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点, 且 $\angle AED = \angle B$. 如果 $AB = 12$, $AE = 6$, $EC = 2$, 那么 AD 的长等于_____.



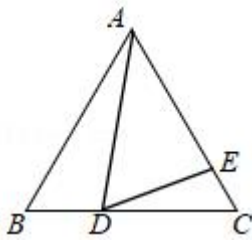
14. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上, $CD = BD$, 点 E 为 AB 的中点, AD 与 CE 交于点 F , 如果 $AB = 6$, 那么 CF 的长等于_____.



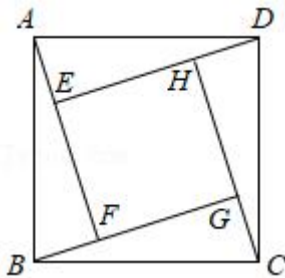
15. (4分) 如图, 小明在教学楼 AB 的楼顶 A 测得: 对面实验大楼 CD 的顶端 C 的仰角为 α , 底部 D 的俯角为 β . 如果教学楼 AB 的高度为 m 米, 那么两栋教学楼的高度差 CH 为米.



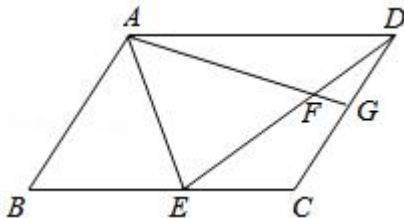
16. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, $\angle ADE = 60^\circ$, 如果 $BD:DC = 1:2$, $AD = 2$, 那么 DE 的长等于_____.



17. (4分) 勾股定理是世界文明宝库中的一颗璀璨明珠, 我国汉代数学家赵爽将四个全等的直角三角形拼成了一个大正方形 $ABCD$, 同时留下一个小正方形 $EFGH$ 的空隙(如图), 利用面积证明了勾股定理. 如果小正方形 $EFGH$ 的面积是 4, $\sin \angle GBC = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 那么大正方形 $ABCD$ 的面积等于_____.



18. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, 将 $\triangle ABE$ 沿着直线 AE 翻折得到 $\triangle AFE$, 点 B 的对应点 F 恰好落在线段 DE 上, 线段 AF 的延长线交边 CD 于点 G , 如果 $BE:EC = 3:2$, 那么 $AF:FG$ 的值等于_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ}$.

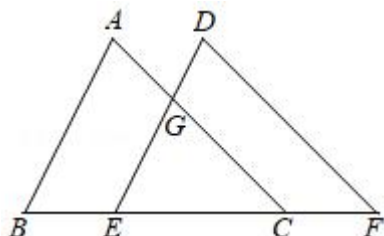
20. (10分) 如图, 已知点 B 、 E 、 C 、 F 在同一条直线上, $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$, AC 与 DE

相交于点 G , $\frac{AG}{GC} = \frac{DG}{GE} = \frac{1}{2}$, $BE = 2$.

(1) 求 BF 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{EG} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BF} =$ _____, $\overrightarrow{DF} =$

(用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

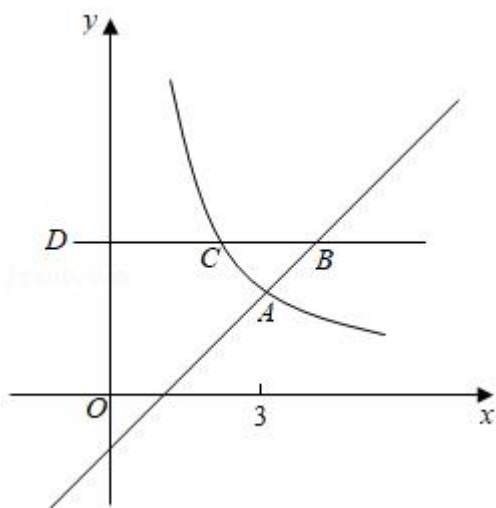


21. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象与一次函数 $y = kx - 1$ 的图

象相交于横坐标为 3 的点 A .

(1) 求这个一次函数的解析式;

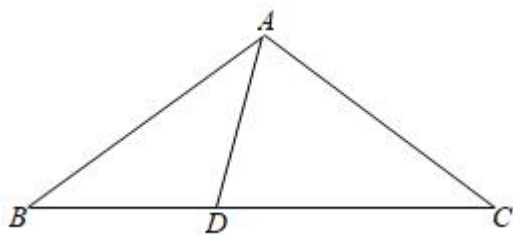
(2) 如图, 已知点 B 在这个一次函数图象上, 点 C 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上, 直线 $BC \parallel x$ 轴, 且在点 A 上方, 并与 y 轴相交于点 D . 如果点 C 恰好是 BD 的中点, 求点 B 的坐标.



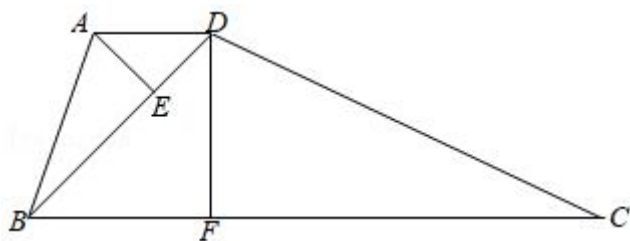
22. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BC 上的一点 D 在边 AB 的垂直平分线上, $AB^2 = BD \cdot BC$.

(1) 求证: $\angle B = \angle C$;

(2) 如果 $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 10$, 求 $\cos \angle ADC$ 的值.



23. (12分) 已知：如图， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABD = \angle C$ ， $AE \perp BD$ ， $DF \perp BC$ ，点 E 、 F 分别为垂足。



(1) 求证： $\frac{AE}{DF} = \frac{BD}{BC}$ ；

(2) 联结 EF ，如果 $\angle ADB = \angle BDF$ ，求证： $DF \cdot DC = EF \cdot BC$ 。

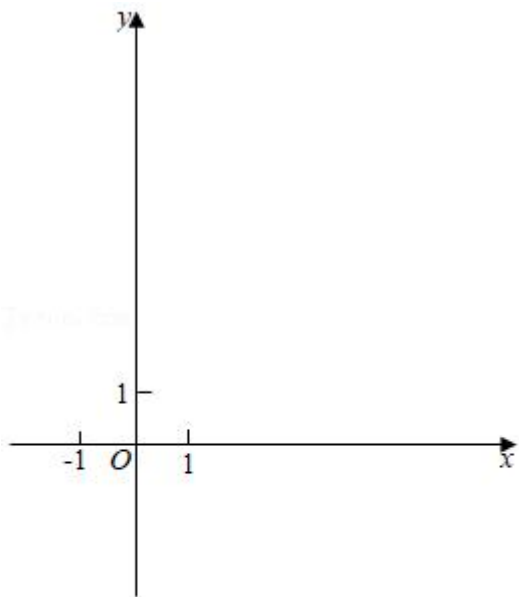
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图)，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 与 y 轴交于点 A ，顶点 B 的坐标为 $(2, -1)$ 。

(1) 直接写出点 A 的坐标，并求抛物线的表达式；

(2) 设点 C 在 x 轴上，且 $\angle CAB = 90^\circ$ ，直线 AC 与抛物线的另一个交点为点 D 。

①求点 C 、 D 的坐标；

②将抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 沿着射线 BD 的方向平移；平移后的抛物线顶点仍在线段 BD 上；点 A 的对应点为点 P 。设线段 AB 与 x 轴的交点为点 Q ，如果 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CBQ$ 相似，求点 P 的坐标。



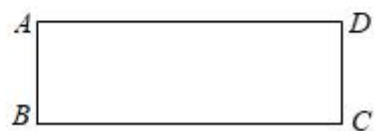
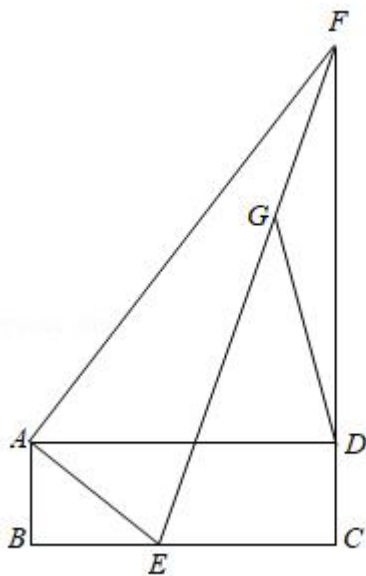
25. (14分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $BC = 3$, 点 E 是边 BC 上一个动点 (不与点 B 、 C 重合), AE 的垂线 AF 交 CD 的延长线于点 F . 点 G 在线段 EF 上, 满足 $FG:GE = 1:$

2. 设 $BE = x$.

(1) 求证: $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE}$;

(2) 当点 G 在 $\triangle ADF$ 的内部时, 用 x 的代数式表示 $\angle ADG$ 的余切;

(3) 当 $\angle FGD = \angle AFE$ 时, 求线段 BE 的长.



备用图

2020-2021 学年上海市普陀区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1.（4 分）下列函数中， y 关于 x 的二次函数是（ ）

A. $y = ax^2 + bx + c$

B. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

C. $y = x(x+1)$

D. $y = (x+2)^2 - x^2$

【分析】利用二次函数定义进行分析即可.

【解答】解：A、当 $a = 0$ 时，不是二次函数，故此选项不合题意；

B、含有分式，不是二次函数，故此选项不合题意；

C、 $y = x(x+1) = x^2 + x$ ，是二次函数，故此选项符合题意；

D、 $y = (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4$ ，不是二次函数，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点评】此题主要考查了二次函数，关键是掌握判断函数是否是二次函数，首先是要看它的右边是否为整式，若是整式且仍能化简的要先将其化简，然后再根据二次函数的定义作出判断，要抓住二次项系数不为 0 这个关键条件.

2.（4 分）如果点 $A(3, m)$ 在 x 轴上，那么点 $B(m+2, m-3)$ 所在的象限是（ ）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【分析】根据 x 轴上的点的纵坐标为 0 列式求出 m 的值，然后计算即可得解.

【解答】解： $\because A(3, m)$ 在 x 轴上，

$$\therefore m = 0,$$

$$\therefore m+2 = 2, m-3 = -3,$$

$\therefore B(m+2, m-3)$ 所在的象限是第四象限.

故选：D.

【点评】本题考查了点的坐标，熟记 x 轴上的点的纵坐标为 0， y 轴上的点的横坐标为 0 是解题的关键.

3.（4 分）已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 2$ ，那么 $\tan B$ 的值等于（ ）

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

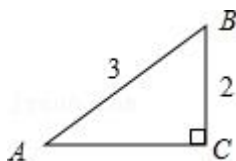
【分析】画出相应的图形，根据勾股定理和锐角三角函数的意义求解后，再做出判断即可.

【解答】解：如图，由勾股定理得，

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

故选：C.



【点评】本题考查锐角三角函数、勾股定理，掌握锐角三角函数的意义是解决问题的关键.

4. (4分) 在下列对抛物线 $y = -(x-1)^2$ 的描述中，正确的是 ()

A. 开口向上

B. 顶点在 x 轴上

C. 对称轴是直线 $x = -1$

D. 与 y 轴的交点是 $(0, 1)$

【分析】根据二次函数的性质以及图象上点的坐标特征进行解答即可.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = -(x-1)^2$ 中 $a = -1 < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下，故 A 错误；

$\because$ 抛物线的解析式为： $y = -(x-1)^2$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 0)$ ，故 B 正确，C 错误；

令 $x = 0$ ，则 $y = -1$ ，

$\therefore$ 与 y 轴的交点是 $(0, -1)$ ，故 D 错误.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数的性质，要会用顶点式确定抛物线开口方向，顶点坐标，对称轴；会求与 y 轴交点坐标.

5. (4分) 已知 $\vec{a}$ 是非零向量， $\vec{b} = -2\vec{a}$ ，下列说法中错误的是 ()

A. $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行

B. $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 互为相反向量

C. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$

D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

【分析】根据共线向量的判定与性质进行解答.

【解答】解: A、由 $\vec{b} = -2\vec{a}$ 知, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 所以 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行, 故本选项说法正确.

B、由 $\vec{b} = -2\vec{a}$ 知, $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$, 所以 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 不互为相反向量, 故本选项说法不正确.

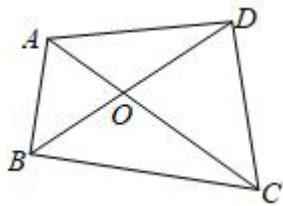
C、由 $\vec{b} = -2\vec{a}$ 知, $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 故本选项说法正确.

D、由 $\vec{b} = -2\vec{a}$ 知, $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, 故本选项说法正确.

故选: B.

【点评】本题主要考查了平面向量的知识, 属于基础题, 注意: 平面向量既有大小, 又有方向.

6. (4分) 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$, 由此推得的正确结论是 ()



- A. $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$ B. $\frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC}$ C. $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ D. $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$

【分析】由 $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$ 得到 $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$, 加上 $\angle AOB = \angle DOC$, 则可判断 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$,

利用相似比可对 A、C 选项进行判断; 证明 $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, 根据相似三角形的性质可 B

选项进行判断; 利用 $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$, $\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC}$ 可对 D 选项进行判断.

【解答】解: $\because \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$,

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC},$$

$$\because \angle AOB = \angle DOC,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC,$$

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}, \text{ 所以 A 选项的结论正确;}$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}, \text{ 所以 C 选项的结论错误;}$$

$$\because \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}, \angle AOD = \angle BOC,$$

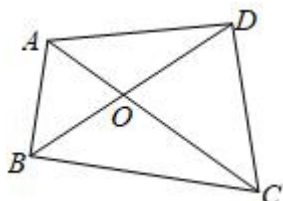
$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle BOC,$$

$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC}$, 所以 B 选项的结论错误;

$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$, $\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC}$,

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$ 不一定成立, 所以 D 选项的结论错误.

故选: A .



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质: 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用, 寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形; 可利用相似三角形的性质得到对应角相等, 通过相似比进行几何计算.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{x-y} = -\frac{7}{3}$.

【分析】 利用比例的性质计算即可得到答案.

【解答】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{5}{2}$,

$$\therefore x = \frac{5}{2}y,$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{5}{2}y+y}{\frac{5}{2}y-y} = \frac{7}{3}.$$

故答案为: $\frac{7}{3}$.

【点评】 本题考查了比例线段: 熟练掌握比例的性质是解决此题的关键.

8. (4 分) 如果正比例函数 $y = kx$ 的图象经过第一、三象限, 那么 y 的值随着 x 的值增大而增大. (填“增大”或“减小”)

【分析】 根据正比例函数的性质进行解答即可.

【解答】 解: 函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第一、三象限, 那么 y 的值随 x 的值增大而增大,

故答案为: 增大.

【点评】此题主要考查了正比例函数的性质，关键是掌握正比例函数的性质：正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线，当 $k > 0$ 时，该直线经过第一、三象限，且 y 的值随 x 的值增大而增大；当 $k < 0$ 时，该直线经过第二、四象限，且 y 的值随 x 的值增大而减小。

9. (4分) 沿着 x 轴正方向看，如果抛物线 $y = (a - 2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的，那么 a 的取值范围是 $a > 2$ 。

【分析】利用二次函数的性质得到抛物线开口向上，则 $a - 2 > 0$ ，然后解不等式即可。

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (a - 2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的，

$\therefore$ 抛物线开口向上，

$\therefore a - 2 > 0$ ，解得 $a > 2$ 。

故答案为 $a > 2$ 。

【点评】本本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小。当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下。

10. (4分) 二次函数 $y = 2x^2 + 4x$ 图象的顶点坐标为 $(-1, -2)$ 。

【分析】直接利用配方法将原式变形，进而求出顶点坐标。

【解答】解： $y = 2x^2 + 4x$

$$= 2(x^2 + 2x)$$

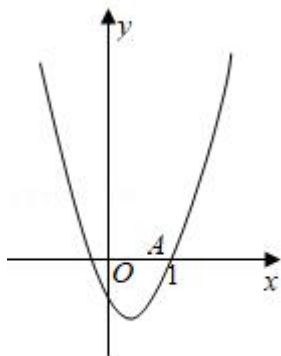
$$= 2(x + 1)^2 - 2,$$

则二次函数图象的顶点坐标为： $(-1, -2)$ 。

故答案为： $(-1, -2)$ 。

【点评】此题主要考查了配方法求二次函数的顶点坐标，正确进行配方是解题关键。

11. (4分) 如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(1, 0)$ ，那么 $f(-1)$ $>$ 0. (填“ $>$ ”、“ $<$ ”或“ $=$ ”)



【分析】根据图象可知当 $x = -1$ ， $y > 0$ 。

【解答】解：∵二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(1, 0)$ ，对称轴在 y 轴的左侧，

∴当 $x = -1$ ， $y > 0$ ，

∴ $f(-1) > 0$ ，

故答案为 $>$ 。

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，数形结合是解题的关键。

12. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \underline{\underline{\vec{0}}}$ 。

【分析】利用三角形法则解答。

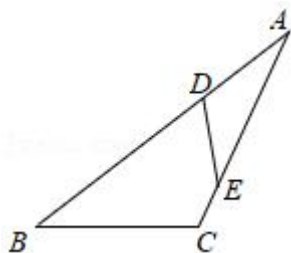
【解答】解：如图， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ，则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ 。

故答案是： $\vec{0}$ 。



【点评】本题主要考查了平面向量，熟记三角形法则解题即可，属于基础题。

13. (4分) 如图， D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点，且 $\angle AED = \angle B$ 。如果 $AB = 12$ ， $AE = 6$ ， $EC = 2$ ，那么 AD 的长等于 4。



【分析】先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，然后利用相似比计算 AD 的长。

【解答】解：∵ $\angle AED = \angle B$ ， $\angle EAD = \angle BAC$ ，

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，

∴ $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ，即 $\frac{AD}{6+2} = \frac{6}{12}$ ，

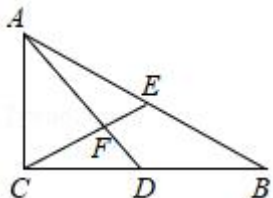
∴ $AD = 4$ 。

故答案为 4。

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用

图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；可利用相似三角形的性质得到对应角相等，通过相似比进行几何计算．

14. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上， $CD = BD$ ，点 E 为 AB 的中点， AD 与 CE 交于点 F ，如果 $AB = 6$ ，那么 CF 的长等于 2．



【分析】 连接 DE ，根据已知条件得到 DE 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中位线，根据三角形中位线的性质得到 $DE = \frac{1}{2}AC$ ， $DE \parallel AC$ ，由相似三角形的性质即可得到结论．

【解答】 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， E 为 AB 的中点，

$$\therefore AE = BE = CE = \frac{1}{2}AB,$$

连接 DE ，

$$\because CD = BD,$$

$\therefore DE$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC, DE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle ACF \sim \triangle DEF,$$

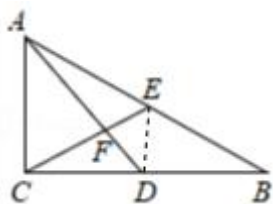
$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\because AB = 6,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore CF = \frac{2}{3}CE = 2,$$

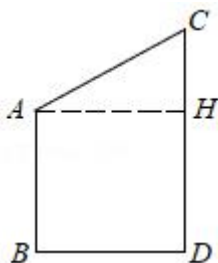
故答案为：2．



【点评】 本题考查了直角三角形斜边上的中线，相似三角形的判定和性质，三角形中位

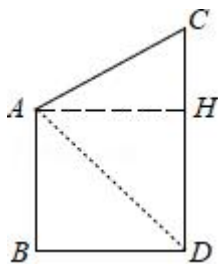
线的性质定理，正确的识别图形是解题的关键．

15. (4分) 如图，小明在教学楼 AB 的楼顶 A 测得：对面实验大楼 CD 的顶端 C 的仰角为 α ，底部 D 的俯角为 β ．如果教学楼 AB 的高度为 m 米，那么两栋教学楼的高度差 CH 为 $\frac{m \cdot \tan \alpha}{\tan \beta}$ 米．



【分析】 根据正切的定义分别求出 DH 、 CH ，结合图形计算即可．

【解答】 解：连接 AD ，过点 A 作 $AH \perp CD$ 于点 H ，则四边形 $ABDH$ 是矩形，



$$\therefore AB = DH = m \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $\angle DAH = \beta$ ，

$$\therefore \tan \beta = \frac{DH}{AH},$$

$$\therefore AH = \frac{m}{\tan \beta},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中， $\angle CAH = \alpha$ ，

$$\therefore CH = AH \cdot \tan \alpha = \frac{m}{\tan \beta} \cdot \tan \alpha = \frac{m \cdot \tan \alpha}{\tan \beta} \text{ (米)},$$

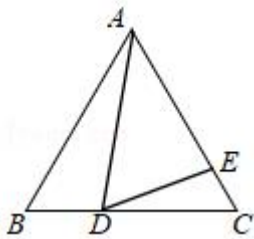
答：两栋教学楼的高度差 CH 为 $\frac{m \cdot \tan \alpha}{\tan \beta}$ 米．

故答案为： $\frac{m \cdot \tan \alpha}{\tan \beta}$ ．

【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键．

16. (4分) 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上， $\angle ADE = 60^\circ$ ，

如果 $BD:DC = 1:2$ ， $AD = 2$ ，那么 DE 的长等于 $\frac{4}{3}$ ．



【分析】由等边三角形的性质得出 $AB = DC$ ， $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，由相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{DC} = \frac{AD}{DE}$ ，则可求出答案．

【解答】解 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AB = DC, \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle ADB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{AD}{DE},$$

$$\therefore BD : DC = 1 : 2,$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{3}{2},$$

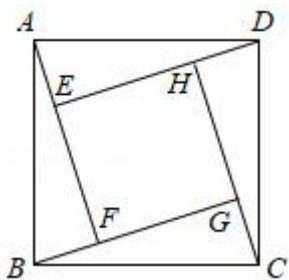
$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{2}{DE},$$

$$\therefore DE = \frac{4}{3}.$$

故答案为： $\frac{4}{3}$ ．

【点评】本题考查了等边三角形的性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键．

17. (4分) 勾股定理是世界文明宝库中的一颗璀璨明珠，我国汉代数学家赵爽将四个全等的直角三角形拼成了一个大正方形 $ABCD$ ，同时留下一个小正方形 $EFGH$ 的空隙(如图)，利用面积证明了勾股定理．如果小正方形 $EFGH$ 的面积是 4， $\sin \angle GBC = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，那么大正方形 $ABCD$ 的面积等于 10．



【分析】设 $BC = \sqrt{10}x$, $CG = x$, 根据勾股定理得到 $BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = \sqrt{10x^2 - x^2} =$

$3x$, 根据正方形的面积公式即可得到结论.

【解答】解: 在 $\text{Rt}\triangle CBG$ 中, $\sin \angle GBC = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore$ 设 $BC = \sqrt{10}x$, $CG = x$,

$\therefore BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = \sqrt{10x^2 - x^2} = 3x$,

$\therefore$ 小正方形 $EFGH$ 的面积是 4,

$\therefore FG = 2$,

$\therefore x + 2 = 3x$,

$\therefore x = 1$,

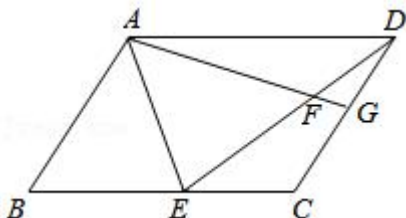
$\therefore BC = \sqrt{10}$,

$\therefore$ 大正方形 $ABCD$ 的面积等于 10,

故答案为: 10.

【点评】本题考查了解直角三角形的应用, 正方形的面积的计算, 正确的理解题意是解题的关键.

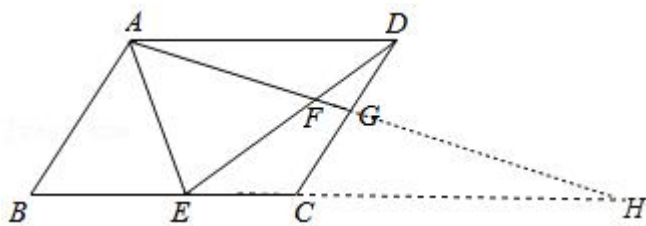
18. (4 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, 将 $\triangle ABE$ 沿着直线 AE 翻折得到 $\triangle AFE$, 点 B 的对应点 F 恰好落在线段 DE 上, 线段 AF 的延长线交边 CD 于点 G , 如果 $BE: EC = 3: 2$, 那么 $AF: FG$ 的值等于 21: 4.



【分析】延长 BC , AG 交于点 H , 设 $BE = 3x$, $EC = 2x$, 由平行四边形的性质可得 $AD = BC = 5x$, $AD \parallel BC$, 由折叠的性质可得 $\angle AEB = \angle AEF$, $BE = EF = 3x$, 通过证明 $\triangle ADF$

$\sim \triangle HEF$, $\triangle ADG \sim \triangle HCG$, 可求 $AF = \frac{42}{5}y$, $FG = AG - AF = \frac{8y}{5}$, 即可求解.

【解答】解：如图，延长 BC , AG 交于点 H ,



$$\because BE:EC = 3:2,$$

$$\therefore \text{设 } BE = 3x, EC = 2x,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = 5x, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$$

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿着直线 AE 翻折得到 $\triangle AFE$,

$$\therefore \angle AEB = \angle AEF, BE = EF = 3x,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AED,$$

$$\therefore AD = DE = 5x,$$

$$\therefore DF = 2x,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle HEF,$$

$$\therefore \frac{AD}{EH} = \frac{DF}{EF} = \frac{AF}{FH},$$

$$\therefore \frac{5x}{EH} = \frac{2}{3} = \frac{AF}{FH},$$

$$\therefore EH = \frac{15x}{2}, AF = \frac{2}{3}FH,$$

$$\therefore CH = EH - EC = \frac{11}{2}x,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle HCG,$$

$$\therefore \frac{AD}{CH} = \frac{AG}{GH},$$

$$\therefore \frac{5x}{\frac{11}{2}x} = \frac{AG}{GH} = \frac{10}{11},$$

$$\therefore \text{设 } AG = 10y, GH = 11y,$$

$$\therefore AH = 21y,$$

$$\therefore AF = \frac{21y}{5} \times 2 = \frac{42}{5}y,$$

$$\therefore FG = AG - AF = \frac{8y}{5},$$

$$\therefore AF : FG = 21 : 4,$$

故答案为 21 : 4.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，折叠的性质，平行四边形的性质，灵活运用这些性质进行推理是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 计算： $\cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ}$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值以及二次根式的性质化简得出答案.

【解答】 解：原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sqrt{3} - 1$$

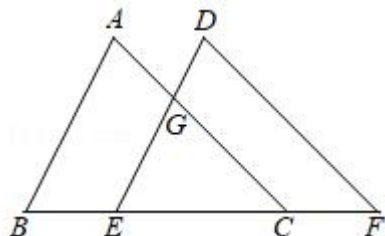
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2.$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 如图，已知点 B 、 E 、 C 、 F 在同一条直线上， $AB \parallel DE$ ， $AC \parallel DF$ ， AC 与 DE 相交于点 G ， $\frac{AG}{GC} = \frac{DG}{GE} = \frac{1}{2}$ ， $BE = 2$.

(1) 求 BF 的长；

(2) 设 $\overrightarrow{EG} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BF} = \underline{4\vec{b}}$ ， $\overrightarrow{DF} = \underline{-\frac{3}{2}\vec{a} + 3\vec{b}}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



【分析】 (1) 利用平行线分线段成比例定理求出 EC ， CF 即可.

(2) 证明 $BF = 4BE$ ， $DF = \frac{3}{2}GC$ ，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{GC}$ ，即可解决问题.

【解答】 解：(1) $\because AB \parallel DE$,

$$\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{BE}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\because BE = 2,$$

$$\therefore EC = 4,$$

$$\because AC \parallel DF,$$

$$\therefore \frac{DG}{GE} = \frac{CF}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CF = 2,$$

$$\therefore BF = BE + EC + CF = 2 + 4 + 2 = 8.$$

$$(2) \because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{BE}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\because AC \parallel DF,$$

$$\therefore \frac{DG}{GE} = \frac{CF}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EC = 2BE = 2CF,$$

$$\therefore BF = 4BE,$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = 4\vec{b}, \quad \overrightarrow{EC} = 2\vec{b},$$

$$\because CG \parallel DF,$$

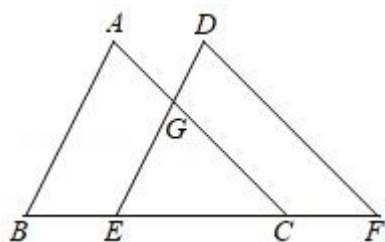
$$\therefore CG : DF = EG : ED = 2 : 3,$$

$$\therefore DF = \frac{3}{2}GC,$$

$$\therefore \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC} = -\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 3\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } 4\vec{b}, \quad -\frac{3}{2}\vec{a} + 3\vec{b}.$$

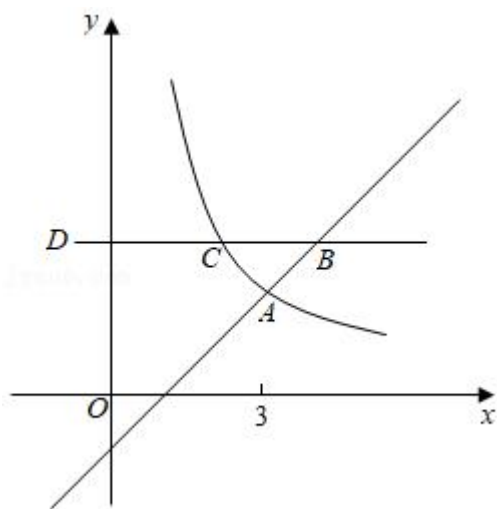


【点评】 本题考查相似三角形的性质，平面向量等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

21. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象与一次函数 $y = kx - 1$ 的图象相交于横坐标为 3 的点 A .

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 如图, 已知点 B 在这个一次函数图象上, 点 C 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上, 直线 $BC \parallel x$ 轴, 且在点 A 上方, 并与 y 轴相交于点 D . 如果点 C 恰好是 BD 的中点, 求点 B 的坐标.



【分析】 (1) 把点 A 的横坐标代入直线解析式 $y = \frac{6}{x}$, 可求得点 A 的纵坐标, 把点 A 的横纵坐标代入 $y = kx - 1$, 即可求得所求的一次函数解析式;

(2) 设点 $B(m, m - 1)$, 则点 $C(\frac{1}{2}m, m - 1)$, 代入 $y = \frac{6}{x}$ 即可求得 m 的值, 从而求得 B 的坐标.

【解答】 解: (1) $\because$ 横坐标为 3 的点 A 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,

$$\therefore y = \frac{6}{3} = 2,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(3, 2)$,

$$\therefore 2 = 3k - 1,$$

$$\therefore k = 1,$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = x - 1$;

(2) 设点 $B(m, m - 1)$, 则点 $C(\frac{1}{2}m, m - 1)$,

$\because$ 点 C 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,

$$\therefore \frac{1}{2}m(m-1) = 6,$$

解得 $m_1 = 4$, $m_2 = -3$,

$\because$ 点 B 在第一象限

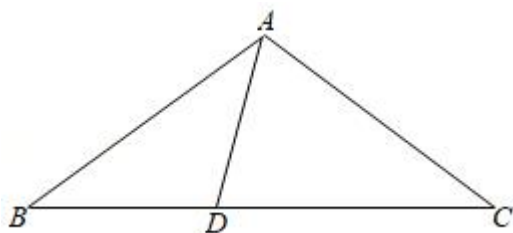
$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4, 3)$.

【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 待定系数法求一次函数的解析式, 反比例函数图象上点的坐标特征, 难度适中. 求出反比例函数的解析式是解题的关键.

22. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BC 上的一点 D 在边 AB 的垂直平分线上, $AB^2 = BD \cdot BC$.

(1) 求证: $\angle B = \angle C$;

(2) 如果 $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 10$, 求 $\cos \angle ADC$ 的值.



【分析】 (1) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$, 由相似三角形的性质得出 $\angle BAD = \angle C$, 由中垂线的性质得出 $BD = AD$, 可得出 $\angle BAD = \angle B$, 则可得出结论;

(2) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 求出 $BD = 4$, 设 $DE = x$, 则 $CE = 6 - x$, 由勾股定理得出 $4^2 - x^2 = (2\sqrt{10})^2 - (6 - x)^2$, 解方程求出 $DE = 1$, 则可得出答案.

【解答】 (1) 证明: $\because AB^2 = BD \cdot BC$,

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB},$$

又 $\because \angle ABD = \angle ABC$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$,

$\therefore \angle BAD = \angle C$,

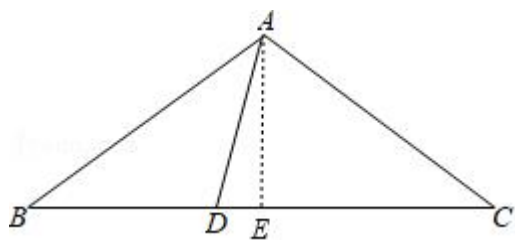
$\because D$ 在边 AB 的垂直平分线上,

$\therefore BD = AD$,

$\therefore \angle BAD = \angle B$,

$\therefore \angle B = \angle C$;

(2) 解：过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ,



$$\because AB = 2\sqrt{10}, BC = 10, AB^2 = BD \cdot BC,$$

$$\therefore (2\sqrt{10})^2 = BD \times 10,$$

$$\therefore BD = 4,$$

$$\therefore AD = 4, DC = 6,$$

$$\because \angle B = \angle C,$$

$$\therefore AC = AB = 2\sqrt{10}.$$

设 $DE = x$, 则 $CE = 6 - x$,

$$\because AD^2 - DE^2 = AE^2, AC^2 - CE^2 = AE^2,$$

$$\therefore 4^2 - x^2 = (2\sqrt{10})^2 - (6 - x)^2,$$

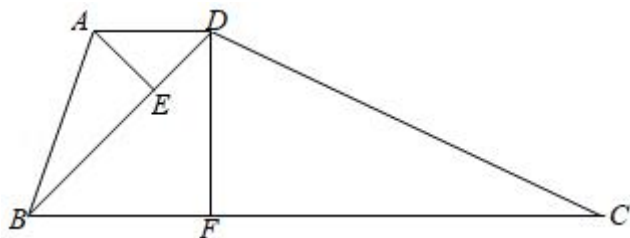
解得 $x = 1$,

$$\therefore DE = 1,$$

$$\therefore \cos \angle ADC = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{4}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，勾股定理，等腰三角形的性质，锐角三角函数的定义，中垂线的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

23. (12 分) 已知：如图， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABD = \angle C$ ， $AE \perp BD$ ， $DF \perp BC$ ，点 E 、 F 分别为垂足.



(1) 求证： $\frac{AE}{DF} = \frac{BD}{BC}$;

(2) 联结 EF ，如果 $\angle ADB = \angle BDF$ ，求证： $DF \cdot DC = EF \cdot BC$.

【分析】 (1) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$ ，由相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{BC}$ ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle$

DCB ，由相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{BC}$ ，则可得出结论；

(2) 证明 $\triangle ADB \sim \triangle EDF$ ，由相似三角形的性质得出 $\angle ABD = \angle EFD$ ，证明 $\triangle EDF \sim \triangle DBC$ ，得出 $\frac{DF}{BC} = \frac{EF}{DC}$ ，则可得出结论。

【解答】(1) 证明： $\because AE \perp BD, DF \perp BC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{AB}{DC},$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{BD}{BC};$$

(2) 证明： $\because \angle ADB = \angle DBF, \angle ADB = \angle BDF, \angle BFD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DBF = \angle BDF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle ADE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle AED$ 和 $\triangle BFD$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{BD}{DF} = \sqrt{2},$$

又 $\because \angle ADE = \angle BDF$,

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle EDF,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle EFD,$$

$$\because \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle C,$$

$$\because \angle EDF = \angle DBC,$$

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{EF}{DC},$$

$$\therefore DF \cdot DC = EF \cdot BC.$$

【点评】 本题考查了平行线的性质，等腰直角三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

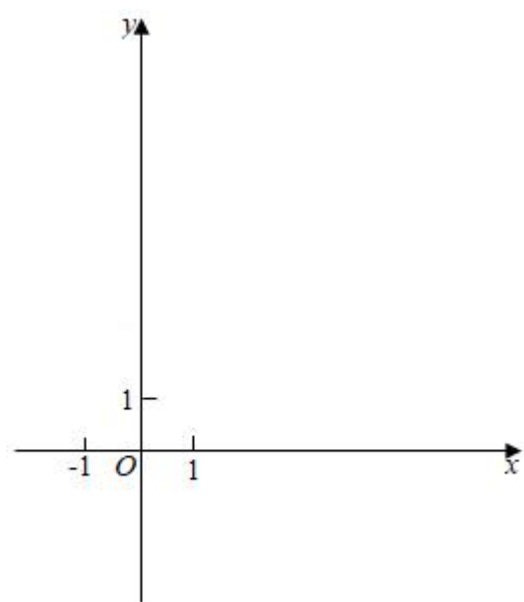
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 与 y 轴交于点 A , 顶点 B 的坐标为 $(2, -1)$.

(1) 直接写出点 A 的坐标, 并求抛物线的表达式;

(2) 设点 C 在 x 轴上, 且 $\angle CAB = 90^\circ$, 直线 AC 与抛物线的另一个交点为点 D .

①求点 C 、 D 的坐标;

②将抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 沿着射线 BD 的方向平移; 平移后的抛物线顶点仍在线段 BD 上; 点 A 的对应点为点 P . 设线段 AB 与 x 轴的交点为点 Q , 如果 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CBQ$ 相似, 求点 P 的坐标.



【分析】 (1) 先令 $x = 0$ 可得 $y = 1$, 得点 A 的坐标, 根据抛物线的顶点 $B(2, -1)$, 利用待定系数法可得抛物线的表达式;

(2) ①根据点 A 和 B 的坐标得 $\angle BAO = 45^\circ$, 所以 $\angle CAO = 45^\circ$, 可知 $\triangle ACO$ 是等腰直角三角形, 可得 C 的坐标, 从而得 AC 的解析式, 联立方程组可得直线 AC 与抛物线的交点 D 的坐标;

②先证明 $\angle PAD = \angle ADB = \angle BCQ$, 设 $P(m, 2m+1)$, 根据平移后 B 的对称点 B' 在线段 BD 上可知 $0 \leq m \leq 4$, 如果 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CBQ$ 相似, 存在两种情况: $\frac{AP}{CQ} = \frac{AD}{BC}$ 或 $\frac{AP}{BC} = \frac{AD}{CQ}$, 列方程可得结论.

【解答】 解: (1) 当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

$$\therefore A(0, 1),$$

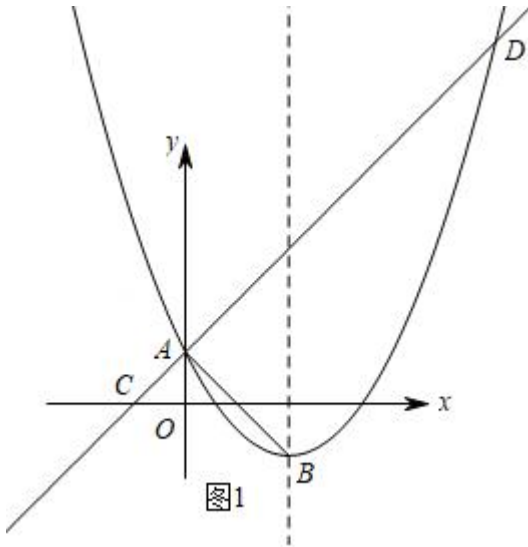
设抛物线的解析式为: $y = a(x - 2)^2 - 1$,

把 $A(0, 1)$ 代入得: $1 = a(0 - 2)^2 - 1$,

$$\therefore a = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$;

(2) ①如图 1,



$$\because A(0, 1), B(2, -1),$$

$$\therefore \angle BAO = 45^\circ,$$

$$\because \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAO = 45^\circ,$$

$$\therefore OC = OA = 1,$$

$$\therefore C(-1, 0),$$

设 AC 的解析式为: $y = kx + m$,

$$\text{则} \begin{cases} -k + m = 0 \\ m = 1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = 1 \\ m = 1 \end{cases},$$

$\therefore AC$ 的解析式为: $y = x + 1$,

$$\text{则} \begin{cases} y = x + 1 \\ y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 7 \end{cases},$$

$$\therefore D(6, 7);$$

$$\textcircled{2} \because A(0, 1), B(2, -1),$$

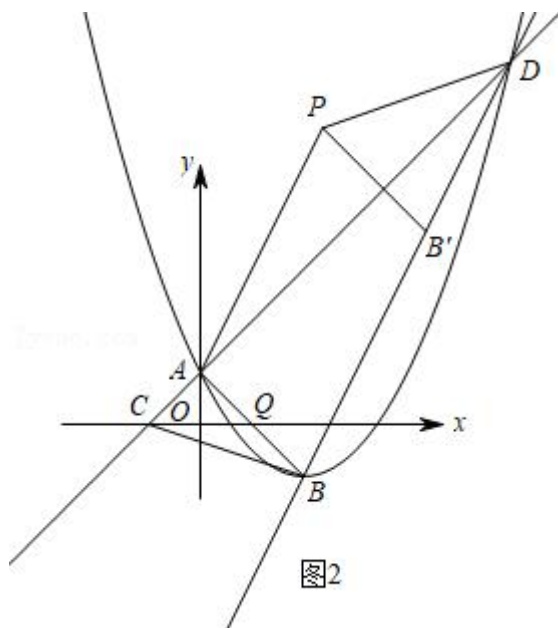
同理得直线 AB 的解析式为: $y = -x + 1$,

$$\therefore Q(1, 0),$$

$$\therefore CQ = 2, BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore D(6, 7), A(0, 1),$$

$$\therefore AD = \sqrt{6^2 + (7-1)^2} = 6\sqrt{2}, AB = \sqrt{2^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2},$$



如图 2, 同理得: 直线 BD 的解析式为: $y = 2x - 5$,

由平移得: $AP \parallel BD$, 则直线 AP 的解析式为: $y = 2x + 1$,

$$\therefore \angle PAD = \angle ADB,$$

$$\therefore \tan \angle BCQ = \frac{1}{3} = \frac{AB}{AD} = \tan \angle ADB,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle BCQ,$$

设抛物线平移后的顶点为 B' , $P(m, 2m+1)$, 则 $AP = \sqrt{5}m$, $B'(m+2, 2m-1)$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 沿着射线 BD 的方向平移; 平移后的抛物线顶点仍在线段 BD 上,

$$\therefore 0 \leq m \leq 4,$$

如果 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CBQ$ 相似, 有以下两种情况:

$$i) \text{ 当 } \frac{AP}{CQ} = \frac{AD}{BC} \text{ 时, 即 } \frac{\sqrt{5}m}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{10}},$$

$$\text{解得: } m = 2.4,$$

$$\therefore P(2.4, 5.8);$$

$$ii) \text{ 当 } \frac{AP}{BC} = \frac{AD}{CQ} \text{ 时, 即 } \frac{\sqrt{5}m}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{2}}{2},$$

解得： $m=6$ （不符合题意，舍去），

综上， $P(2.4, 5.8)$ 。

【点评】 本题是二次函数的综合应用，解答本题主要应用了待定系数法求二次函数和一次函数的解析式，两点的距离公式，相似三角形的性质和判定，平移的性质等知识，解题时，注意数形结合，使抽象的问题变得具体化，降低了解题的难度。

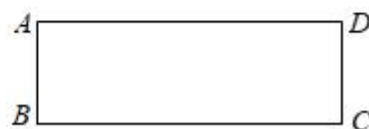
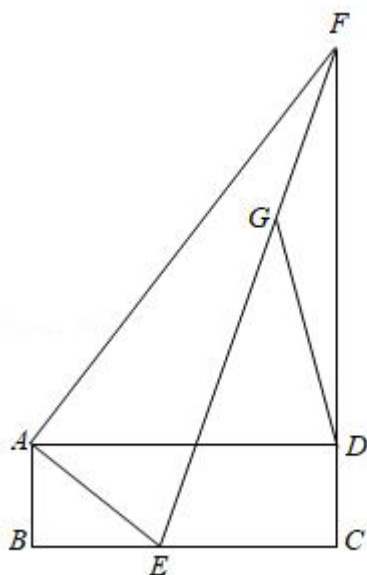
25.（14分）如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ， $BC=3$ ，点 E 是边 BC 上一个动点（不与点 B 、 C 重合）， AE 的垂线 AF 交 CD 的延长线于点 F 。点 G 在线段 EF 上，满足 $FG:GE=1:$

2. 设 $BE=x$ 。

（1）求证： $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE}$ ；

（2）当点 G 在 $\triangle ADF$ 的内部时，用 x 的代数式表示 $\angle ADG$ 的余切；

（3）当 $\angle FGD = \angle AFE$ 时，求线段 BE 的长。



备用图

【分析】（1）证明 $\triangle ABE \sim \triangle ADF$ ，可得结论。

（2）如图 1 中，过点 G 作 $GN \perp BC$ 于 N 交 AD 于 M ，则四边形 $MNCD$ 是矩形。用 x 表示出 GM ， DM 即可解决问题。

（3）如图 2 中，过点 G 作 $GH \perp CD$ 于 H 。证明 $\angle FAD = \angle DGH$ ，可得 $\tan \angle FAD = \tan \angle DGH$ ，由此构建方程求解即可。

【解答】（1）证明：如图 1 中， $\because AE \perp AF$ ，

$\therefore \angle EAF = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle B = \angle BAD = \angle ADC = \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE}.$$

(2) 解: 如图 1 中, 过点 G 作 $GN \perp BC$ 于 N 交 AD 于 M , 则四边形 $MNCD$ 是矩形.

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BE},$$

$$\therefore \frac{3}{1} = \frac{DF}{x},$$

$$\therefore DF = 3x, \quad CF = 3x+1,$$

$$\therefore GN \parallel CF,$$

$$\therefore \triangle ENG \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{EN}{EC} = \frac{GN}{CF} = \frac{EG}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EN = \frac{2}{3}(3-x), \quad GN = \frac{2}{3}(1+3x),$$

$$\therefore GM = GN - MN = \frac{2}{3}(1+3x) - 1 = 2x - \frac{1}{3}, \quad DM = CN = EC - EN = 3 - x - \frac{2}{3}(3-x) = \frac{1}{3}(3-x),$$

$$\therefore \cot \angle ADG = \frac{DM}{GM} = \frac{\frac{1}{3}(3-x)}{2x - \frac{1}{3}} = \frac{3-x}{6x-1}.$$

(3) 如图 2 中, 过点 G 作 $GH \perp CD$ 于 H .

$$\therefore \angle AFE = \angle DGF,$$

$$\therefore AF \parallel DG,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle ADG,$$

$$\therefore AD \parallel GH,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle DGH,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle DGH,$$

$$\because GH \parallel EC,$$

$$\therefore \triangle FGH \sim \triangle FEC,$$

$$\therefore \frac{GH}{EC} = \frac{FH}{FC} = \frac{FG}{FE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore GH = \frac{1}{3}(3-x), \quad FH = \frac{1}{3}(3x+1),$$

$$\therefore DH = FH - DF = \frac{1}{3}(3x+1) - 3x = \frac{1}{3} - 2x,$$

$$\because \tan \angle FAD = \tan \angle DGH,$$

$$\therefore \frac{3x}{3} = \frac{\frac{1}{3} - 2x}{\frac{1}{3}(3-x)},$$

$$\text{整理得, } x^2 - 9x + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{9-\sqrt{77}}{2} \text{ 或 } \frac{9+\sqrt{77}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\text{经检验 } x = \frac{9-\sqrt{77}}{2} \text{ 是分式方程的解,}$$

$$\therefore BE = \frac{9-\sqrt{77}}{2}.$$

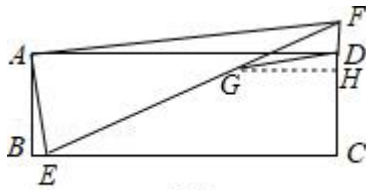


图2

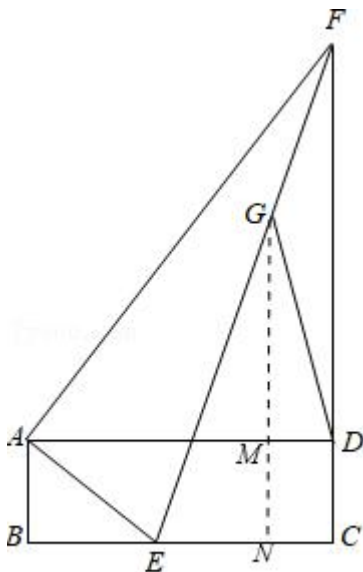


图1

【点评】 本题属于相似形综合题，考查了矩形的性质，相似三角形的判定和性质，解直

角三角形等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题．