

崇明区 2020 学年第一学期教学质量调研测试卷

九年级数学

(满分 150 分、完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 已知线段 a 、 b 、 c 、 d 的长度满足等式 $ab = cd$, 如果某班四位学生分别将该等式改写成了如下四个比例式, 那么其中错误的是 ()

A. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

B. $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$

C. $\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$

D. $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据比例的两内项之积等于两外项之积逐项排查即可.

【详解】解: A. 由 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 可得 $bc = ad$, 故 A 选项符合题意;

B. 由 $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ 可得 $ab = cd$, 故 B 选项不符合题意;

C. 由 $\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$ 可得 $ab = cd$, 故 C 选项不符合题意;

D. 由 $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$ 可得 $ab = cd$, 故 D 选项不符合题意.

故答案为 A.

【点睛】本题主要考查了比例的基本性质, 即掌握两内项之积等于两外项之积成为解答本题的关键.

2. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 如果连接 AG , 并延长 AG 交边 BC 于点 D , 那么下列说法中错误的是 ()

A. $BD = CD$

B. $AG = GD$

C. $AG = 2GD$

D. $BC = 2BD$

【答案】B

【解析】

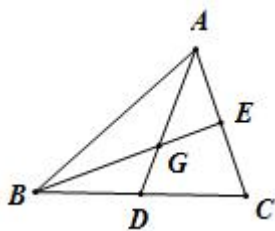
【分析】根据三角形重心的定义和性质解答即可.

【详解】解: $\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore BD = CD, AG = 2GD, BC = 2BD,$$

$\therefore$ A、C、D 正确，B 错误，

故选 B.



【点睛】 本题考查的是三角形的重心的概念和性质，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍.

3. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么下列结论中正确的是 ()

- A. $\vec{a} = \vec{b}$ B. $\vec{a} + \vec{b} = 2$ C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ D. $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据单位向量的定义进行选择.

【详解】 解: $\because \vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个单位向量,

$\therefore$ 它们的长度相等, 但是方向不一定相同;

$$\therefore |\vec{a}| + |\vec{b}| = 2 \text{ 正确};$$

故选: D.

【点睛】 本题考查单位向量的含义; 属于基础题.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC = 8$, $BC = 6$, 那么 $\angle A$ 的正弦值为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用勾股定理可求出 AB 的长, 根据正弦函数的定义即可得答案.

【详解】 $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

故选：A.

【点睛】本题考查解直角三角形，解题的关键是熟练掌握各三角函数的定义，属于中考常考题型.

5. 抛物线 $y = a(x-k)^2 + k$ 的顶点总在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 直线 $y = x$ 上 D. 直线 $y = -x$ 上

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线的顶点式可知其顶点坐标为 (k, k) ，再根据横坐标与纵坐标相等即可得出结论.

【详解】 $\because$ 抛物线的解析式为 $y = a(x-k)^2 + k$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 (k, k) ,

$\therefore$ 顶点坐标的横坐标与纵坐标相等,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标总在直线 $y = x$ 上.

故选：C.

【点睛】本题考查的是二次函数的性质，根据抛物线的顶点式得出其顶点横坐标与纵坐标相等是解答此题的关键.

6. 如果某正多边形的外接圆半径是其内切圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍，那么这个正多边形的边数是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】如图，画出简图，根据切线的性质可得 $\angle OCA = 90^\circ$ ，根据 $\angle AOC$ 的余弦可得 $\angle AOC = 45^\circ$ ，即可得出此多边形的中心角为 90° ，即可求出多边形的边数.

【详解】如图，OA、OC 分别为此多边形的外接圆和内切圆的半径，AB 为边长，

$\therefore OC \perp AB$,

$\therefore \angle OCA = 90^\circ$,

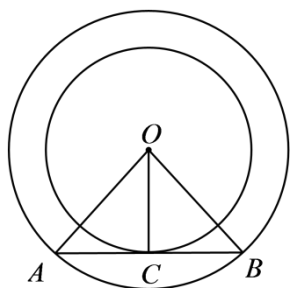
$\therefore$ 外接圆半径是其内切圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍，

$$\therefore \cos \angle AOC = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore \angle AOC = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，即此多边形的中心角为 90° ，

$\therefore$ 此多边形的边数 $= 360^\circ \div 90^\circ = 4$,



故选：B.

【点睛】本题考查正多边形和圆及三角函数的定义，熟练掌握余弦的定义并熟记特殊角的三角函数值是解题关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ ，则 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】由 $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ 得到 $x = \frac{5}{3}y$ ，代入式子计算即可.

【详解】 $\because \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$,

$$\therefore x = \frac{5}{3}y,$$

$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{\frac{5}{3}y-y}{y} = \frac{2}{3},$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】此题考查比例的性质，正确进行变形，熟练掌握和灵活运用相关运算法则是解题的关键.

8. 已知线段 $AB = 6\text{cm}$ ，点 C 是 AB 的黄金分割点，且 $AC > BC$ ，那么线段 AC 的长为_____.

【答案】 $3\sqrt{5}-3$

【解析】

【分析】根据黄金比值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，列式计算即可.

【详解】 $\because$ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点， $AC > BC$,

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = (3\sqrt{5}-3) \text{ cm},$$

故答案为 $3\sqrt{5}-3$.

【点睛】 本题考查的是黄金分割的概念，把一条线段分成两部分，使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项，这样的线段分割叫做黄金分割，它们的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做黄金比.

9. 如果两个相似三角形的一组对应边上的高之比为 $1:4$ ，那么这两个三角形的面积比为_____.

【答案】 $1:16$

【解析】

【分析】 根据对应高的比等于相似比，相似三角形的面积比等于相似比的平方解答.

【详解】 解： $\because$ 相似三角形对应高的比等于相似比，

$\therefore$ 两三角形的相似比为 $1:4$ ，

$\therefore$ 两三角形的面积比为 $1:16$.

故答案为： $1:16$.

【点睛】 本题考查对相似三角形性质的理解，相似三角形对应高的比等于相似比.

10. 计算： $2(\vec{a}-2\vec{b})+3(2\vec{a}+\vec{b})=$ _____.

【答案】 $8\vec{a}-\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据向量的线性运算以及实数与向量相乘的运算法则计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & 2(\vec{a}-2\vec{b})+3(2\vec{a}+\vec{b}) \\ &= 2\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{a}+3\vec{b} \\ &= 8\vec{a}-\vec{b}. \end{aligned}$$

故答案为 $8\vec{a}-\vec{b}$.

【点睛】 本题主要考查了向量的线性运算以及实数与向量相乘，掌握相关运算法则成为解答本题的关键.

11. 如果一段斜坡的水平宽度为 12 米，坡度 $i=1:3$ ，那么这段斜坡的铅垂高度为_____米.

【答案】 4

【解析】

【分析】根据坡度 $i = \frac{\text{铅垂高度}}{\text{水平宽度}}$ ，即可求解.

【详解】设这段斜坡的铅垂高度为 x ,

$$\therefore \frac{x}{12} = \frac{1}{3}$$

解得 $x=4$ 米.

故答案为: 4.

【点睛】本题考查解直角三角形的实际应用，了解坡度和铅垂高度与水平宽度的关系是解答本题的关键.

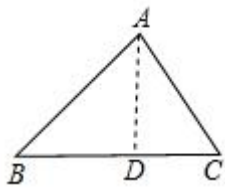
12. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $BC=7$, $\sin B = \frac{4}{5}$, 那么 $\angle C =$ _____度.

【答案】45

【解析】

【分析】过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D, 求出 AD 长, 根据勾股定理求出 BD, 从而得出 CD 长, 继而得出 $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形, 即可得出 $\angle C$ 的度数.

【详解】过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D, 则 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$,



在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $AB=5$,

$$\therefore \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AD=4,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore BC = 7,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 7 - 3 = 4,$$

$\therefore \triangle ADC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle C = 45^\circ.$$

故答案为: 45.

【点睛】本题考查了解直角三角形, 勾股定理, 等知识点的应用, 正弦函数的定义, 是所对的直角边与斜边的比是解题的关键.

13. 函数 $y = 2x^2 + 4x - 5$ 的图象与 y 轴的交点的坐标为_____.

【答案】 $(0, -5)$

【解析】

【分析】 求与 y 轴的交点坐标，令 $x=0$ 可求得 y 的值，可得出函数与 y 轴的交点坐标.

【详解】 解： 令 $x=0$ ，代入 $y = 2x^2 + 4x - 5$ 解得 $y=-5$ ，

$\therefore$ 二次函数 $y = 2x^2 + 4x - 5$ 的图象与 y 轴交点坐标是 $(0, -5)$.

故答案为： $(0, -5)$.

【点睛】 本题主要考查函数与坐标轴的交点坐标,掌握求函数与坐标轴交点的求法是解题的关键，即与 x 轴的交点令 $y=0$ 求 x ，与 y 轴的交点令 $x=0$ 求 y .

14. 如果将抛物线 $y = (x-1)^2$ 先向左平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，那么所得的新抛物线的解析式为_____.

【答案】 $y = (x+1)^2 + 1$

【解析】

【分析】 先确定原抛物线的顶点坐标，再根据平移方式确定平移后的顶点坐标，最后直接写出抛物线解析式即可.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = (x-1)^2$ 的顶点坐标为 $(1,0)$

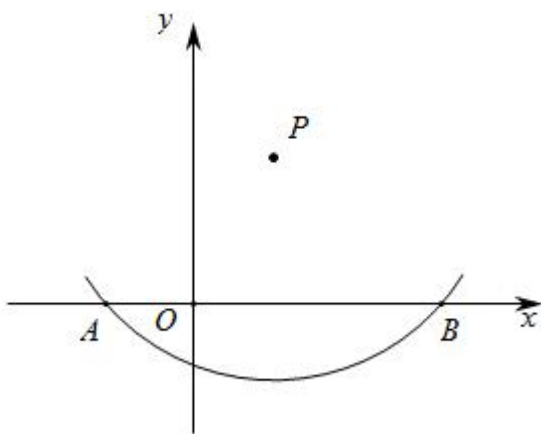
$\therefore$ 向左平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位后抛物线的顶点坐标为 $(-1,1)$

$\therefore$ 平移后抛物线解析式为 $y = (x+1)^2 + 1$.

故答案为 $y = (x+1)^2 + 1$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数图象的平移变换，理解二次函数的平移规律“左加右减，上加下减”成为解答本题的关键.

15. 如图，在直角坐标系中，以点 P 为圆心的弧与 x 轴交于 A 、 B 两点，已知点 P 的坐标为 $(1, y)$ ，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，那么点 B 的坐标为_____.



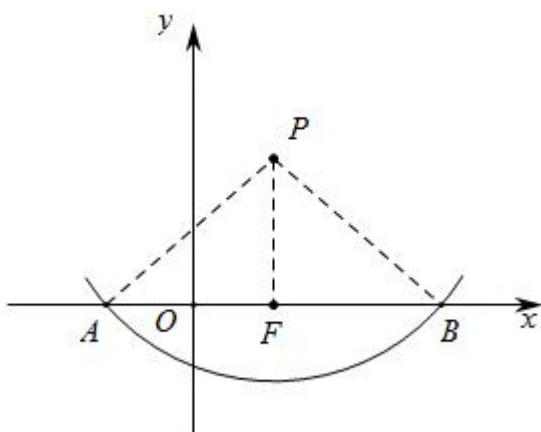
【答案】(3,0)

【解析】

【分析】连接 PA 、 PB ，作 $PF \perp AB$ 于点 F ，再根据圆的垂径定理即可得出答案.

【详解】如图，连接 PA 、 PB ，作 $PF \perp AB$ 于点 F ，根据题意可知 $OF=1$ ，再由垂径定理可知， $AF=BF=AO+OF=2$ ，所以 $OB=OF+BF=1+2=3$ ，即 B 点坐标为 $(3, 0)$.

故答案为：(3, 0).



【点睛】本题考查垂径定理. 作出 $PF \perp AB$ ，再结合垂径定理“垂直于弦的直径平分弦且平分这条弦所对的两条弧”是解答本题的关键.

16. 如果大小不同的两个圆外切时的圆心距为 5 厘米，并且它们内切时的圆心距为 1 厘米，那么其中较大圆的半径为_____厘米.

【答案】3

【解析】

【分析】根据两圆位置关系内切，圆心距=两圆半径之差，以及外切时， $r+R=d$ ，即可求出.

【详解】解：∵两圆相内切，设小圆半径为 r ，大圆的半径为 R ，

$$\therefore \begin{cases} r+R=5 \\ R-r=1 \end{cases},$$

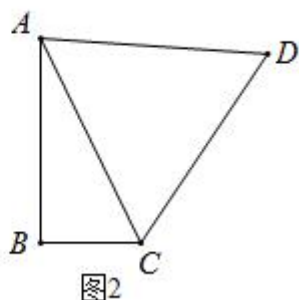
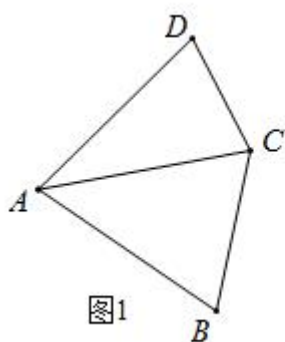
$$\therefore R=3, r=2,$$

$\therefore$ 大圆的半径为 3 厘米.

故答案为: 3.

【点睛】本题主要考查了两圆的位置关系，用到的知识点为：两圆内切，圆心距=两圆半径之差，外切时， $r+R=d$.

17. 我们约定：如果一个四边形存在一条对角线，使得这条对角线是四边形某两边的比例中项，那么就称这个四边形为“闪亮四边形”，这条对角线为“闪亮对角线”. 相关两边为“闪亮边”. 例如：图 1 中的四边形 $ABCD$ 中， $AB=AC=AD$ ，则 $AC^2=AB \cdot AD$ ，所以四边形 $ABCD$ 是闪亮四边形， AC 是闪亮对角线， AB 、 AD 是对应的闪亮边. 如图 2，已知闪亮四边形 $ABCD$ 中， AC 是闪亮对角线， AD 、 CD 是对应的闪亮边，且 $\angle ABC=90^\circ$ ， $\angle D=60^\circ$ ， $AB=4$ ， $BC=2$ ，那么线段 AD 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{5}$

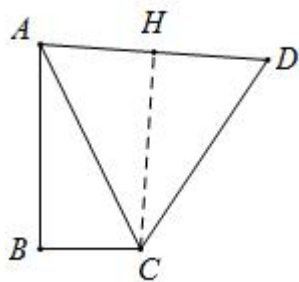
【解析】

【分析】根据“闪亮四边形”的定义可知 $AC^2=CD \times AD$ ，再证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形即可解决问题.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是闪亮四边形， AC 是闪亮对角线， CD 、 AD 是对应的闪亮边.

$$\therefore AC^2 = CD \cdot AD,$$

如图，作 $CH \perp AD$ 于 H ,



$$\therefore DH = CD \cdot \cos \angle D, \quad CH = CD \cdot \sin \angle D$$

$$AH = AD - CD \cdot \cos \angle D$$

$$\therefore AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$= (AD - CD \cdot \cos \angle D)^2 + (CD \cdot \sin \angle D)^2$$

$$= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle D$$

$$= AD^2 + CD^2 - AD \cdot CD$$

$$\therefore AC^2 = CD \cdot AD,$$

$$\therefore AD^2 - 2AD \cdot CD + CD^2 = 0$$

$$\therefore (AD - CD)^2 = 0$$

$$\therefore AD = CD$$

$$\therefore \angle D = 60^\circ$$

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形

$$\therefore AC = CD = AD$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle D = 60^\circ, \quad AB = 4, \quad BC = 2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \quad (\text{负值舍去})$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{5}$$

故答案为: $2\sqrt{5}$

【点睛】 本题考查了等边三角形的判定，勾股定理以及解直角三角形等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4\sqrt{2}$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. 点 D 为线段 AB 的中点, 点 E 在边 AC 上, 连结 DE , 沿直线 DE 将 $\triangle ADE$ 折叠得到 $\triangle A'DE$. 连接 AA' , 当 $A'E \perp AC$ 时, 则线段 AA' 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 求出 AC 的长, 证明 $\triangle ADE \cong \triangle ACB$, 推出 $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$, 由此求出 AE 即可解决问题.

【详解】 解: 过点 A 作 $AM \perp BC$, 在 $Rt\triangle ABM$ 中, $AM = AB \times \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

$$AC = AM \div \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore A'E \perp AC,$$

$$\angle AEA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'DE$$

$$\therefore \angle AED = \angle A'ED = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle B,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAB,$$

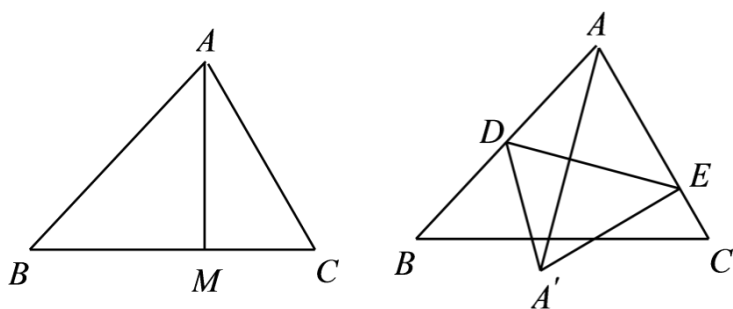
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\frac{AE}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

$$AE = 2\sqrt{3}$$

$$AA' = \sqrt{2}AE = 2\sqrt{6}$$



【点睛】本题属于三角形综合题,考查了解直角三角形的应用,翻折变换,全等三角形的性质,相似三角形的判定和性质等知识,解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\tan 60^\circ + \frac{2\cos 30^\circ + \cot 45^\circ}{2\sin 30^\circ} - \sin^2 45^\circ.$

【答案】 $2\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

【解析】

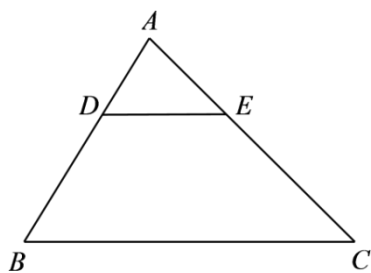
【分析】先用特殊角的三角函数值化简,然后再进行计算即可.

【详解】解: $\tan 60^\circ + \frac{2\cos 30^\circ + \cot 45^\circ}{2\sin 30^\circ} - \sin^2 45^\circ$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3} + \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2 \times \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2} \\
&= 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了特殊角的三角函数值，牢记特殊角的三角函数值成为解答本题的关键.

20. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $DB = 4$ ， $AC = 8$.



(1) 求线段 AE 的长；

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

①请直接写出向量 $\overrightarrow{AE}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式， $\overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

②连接 BE ，在图中作出向量 $\overrightarrow{BE}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量. 【可以不写作法，但必须写出结论】

【答案】 (1) $AE = \frac{8}{3}$ ； (2) ① $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ； ②作图见解析.

【解析】

【分析】 (1) 先求出 AB ，再据平行线分线段成比例，写出关于 AE 、 AC 、 AD 、 AB 的等比式，问题可解.

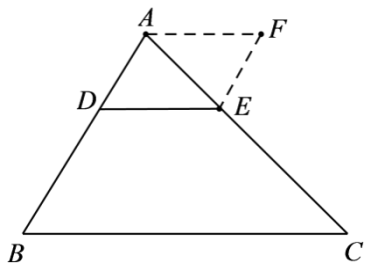
(2) ①以 AD 、 DE 为边作平行四边形 $ADEF$ ，先再求得 $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\vec{b}$ ，据 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ 问题可解；②以 BD 、 DE 为边作平行四边形即可.

【详解】 解：(1) $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore AE = \frac{8}{3}.$$

(2) ①如下图



$\because DE \parallel BC$

$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

又 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$

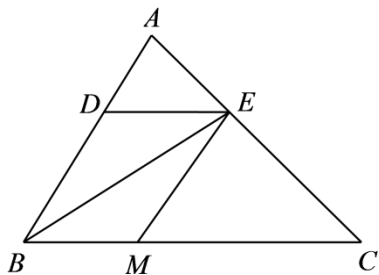
$$\therefore \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$\because$ 四边形 ADEF 是平行四边形

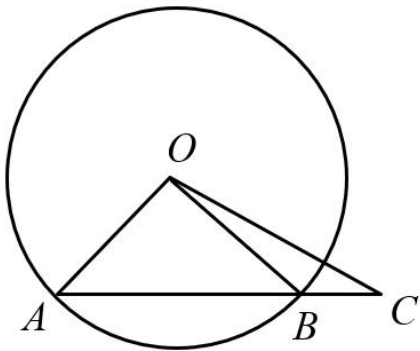
$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

② 如下图, $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{BM}$ 是 $\overrightarrow{BE}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.



21. 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$, 在 $\odot O$ 中, OA 、 OB 都是圆的半径, 且 $OA \perp OB$. 点 C 在线段 AB 的延长线上, 且 $OC = AB$.



(1) 求线段 BC 的长;

(2) 求 $\angle BOC$ 的正弦值.

【答案】 (1) $BC = \sqrt{3} - 1$; (2) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

【解析】

【分析】 (1) 过点 O 作 $OD \perp AB$ 交 AB 于点 D , 先利用勾股定理求解 $AB = 2 = OC$, 从而可得 $OD = BD = 1$, 再利用勾股定理求解 CD , 从而可得答案;

(2) 过点 B 作 $BE \perp OC$ 交 OC 于点 E , 由 $\angle C = 30^\circ, BC = \sqrt{3} - 1$, 求解 BE 的长, 再利用 $\sin \angle BOC = \frac{BE}{OB}$, 从而可得答案.

【详解】 解: (1) 过点 O 作 $OD \perp AB$ 交 AB 于点 D ,

$$\because OA = OB, \angle AOB = 90^\circ, OA = OB = \sqrt{2}, OC = AB,$$

$$\therefore AB = OC = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\therefore OD = BD = 1,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ODC \text{ 中, } \sin \angle DOC = \frac{OD}{OC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{3} - 1.$$

(2) 过点 B 作 $BE \perp OC$ 交 OC 于点 E ,

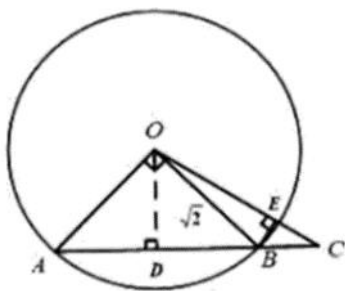
$$\because \angle C = 30^\circ, BC = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

$$\therefore \sin \angle BOC = \frac{BE}{OB}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$



根据题意知, $\angle PAB=90^{\circ}-60^{\circ}=30^{\circ}$, $\angle PBA=30^{\circ}+90^{\circ}=120^{\circ}$

$$\therefore \angle PAB+\angle PBA+\angle APB=180^{\circ}$$

$$\therefore \angle APB=180^{\circ}-30^{\circ}-120^{\circ}=30^{\circ}$$

$$\therefore \angle PAB=\angle APB$$

$$\therefore PB=AB=28\times\frac{1}{2}=14(\text{海里})$$

$$\therefore PQ=14(\text{海里})$$

$$\therefore PQ=PB$$

$$\therefore PF\parallel BE$$

$$\therefore \angle BPF=\angle PBE=30^{\circ}$$

$$\therefore \angle QPF=30^{\circ}$$

$$\therefore \angle BPQ=60^{\circ}$$

$\therefore \triangle PBQ$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle PBQ=60^{\circ}$$

$$\therefore \angle PBA=120^{\circ}$$

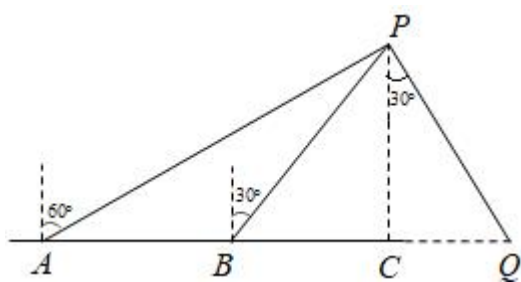
$$\therefore \angle PBA+\angle PBQ=120^{\circ}+60^{\circ}=180^{\circ}$$

$\therefore$ 点 A、B、Q 在同一直线上

所以, 如果海监船保持原航向继续航行, 那么它能到达 Q 处;

故答案为: 14, 等边, 能;

(2) 过点 P 作 $PC\perp BQ$ 交 BQ 于点 C,



$\therefore \triangle BPQ$ 是等边三角形,

$$\therefore PC=7\sqrt{3},$$

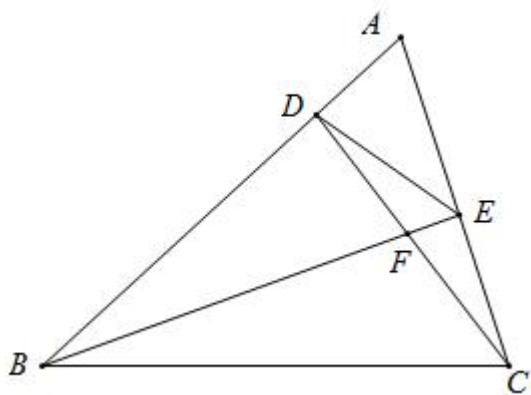
$$\therefore 7\sqrt{3}>12,$$

$\therefore$ 海监船继续向正东方向航行是安全的.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-方向角问题以及等腰直角三角形的判定与性质, 熟练掌握锐角

三角函数的概念是解题的关键.

23. 已知: 如图, D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点, 且 $\angle AED = \angle ABC$, 连接 BE 、 CD 相交于点 F .



(1) 求证: $\angle ABE = \angle ACD$;

(2) 如果 $ED = EC$, 求证: $\frac{DF^2}{BD^2} = \frac{EF}{EB}$.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 先说明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ 可得 $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$, 再说明 $\triangle ADC \sim \triangle AEB$, 最后根据相似三角形对应角相等即可证明:

(2) 先说明 $\triangle EDF \sim \triangle EBD$ 得到 $\frac{DF}{BD} = \frac{EF}{DE} = \frac{DE}{BE}$, 进一步可得 $\left(\frac{DF}{BD}\right)^2 = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{DE}{BE}$ 即可证明.

【详解】证明: (1) $\because \angle AED = \angle ACB$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$,

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle AEB$,

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$;

(2) $\because ED = EC$,

$\therefore \angle EDC = \angle ACD$,

$\because \angle ABE = \angle ACD$

$\therefore \angle EDC = \angle ABE$,

$$\text{又} \because \angle DEF = \angle DEF,$$

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle EBD,$$

$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{EF}{DE} = \frac{DE}{BE},$$

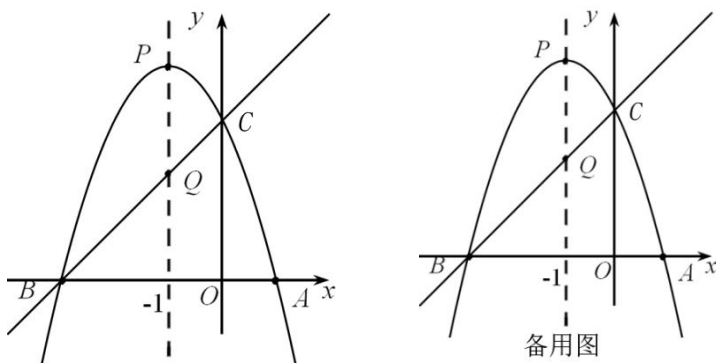
$$\therefore \left(\frac{DF}{BD}\right)^2 = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore \frac{DF^2}{BD^2} = \frac{EF}{EB}.$$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，灵活运用相似三角形的判定定理成为解答本题的关键。

24. 如图，已知对称轴为直线 $x = -1$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，

其中点 A 的坐标为 $(1, 0)$ 。



(1) 求点 B 的坐标及抛物线的表达式；

(2) 记抛物线的顶点为 P ，对称轴与线段 BC 的交点为 Q ，将线段 PQ 绕点 Q ，按顺时针方向旋转 120° ，请判断旋转后点 P 的对应点 P' 是否还在抛物线上，并说明理由；

(3) 在 x 轴上是否存在点 M ，使 $\triangle MOC$ 与 $\triangle BCP$ 相似？若不存在，请说明理由；若存在请直接写出点 M 的坐标【不必书写求解过程】。

【答案】(1) $B(-3, 0)$ ， $y = -x^2 - 2x + 3$ ；(2) P' 在抛物线上，理由见解析；(3) 存在； $M(1, 0)$ 或 $(9, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(-9, 0)$

【解析】

【分析】(1) 根据轴对称图形的性质，对应点到对称轴的距离相等，方向相反，可得点 B 的坐标，用待定系数法求得函数解析式。

(2) 求出直线 BC 的解析式，计算得出线段 PQ 的长度，过 P' 作 $P'D$ 平行于 x 轴， $P'D$ 交抛物线对称轴于点 D ，根据旋转角度解直角三角形，得出 P' 的坐标，将 P' 的横坐标代入抛物线的解析式，计算并判断即可得出答案。

(3) 根据勾股定理可得出 $\triangle BCP$ 是直角三角形, 根据相似三角形的性质分类讨论, 得出点 M 的坐标.

【详解】解: (1) $\because$ A、B 是关于直线 $x = -1$ 轴对称图形的两点, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 $-1 - [1 - (-1)] = -3$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-3, 0)$;

将 A、B 两点坐标值代入 $y = ax^2 + bx + 3$ 可列方程组:

$$\begin{cases} 0 = a + b + 3 \\ 0 = 9a - 3b + 3 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) $\because$ 点 P 为抛物线顶点, 直线 $x = -1$ 为抛物线的对称轴,

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 -1, 纵坐标为 $y = -x^2 - 2x + 3 = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 3 = 4$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-1, 4)$,

直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$, 将 B、C 的值代入可列方程:

$$\begin{cases} 3 = 0 + b \\ 0 = -3k + b \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

$\therefore$ BC 与对称轴交于点 Q,

$\therefore$ 当 $x = -1$, $y = x + 3 = -1 + 3 = 2$,

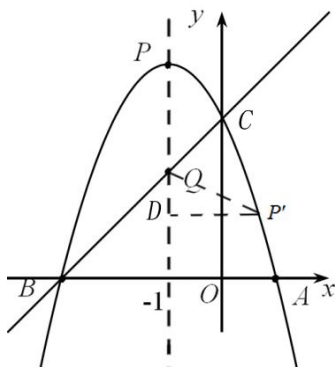
$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(-1, 2)$,

$$PQ = 4 - 2 = 2,$$

$\therefore$ P' 是点 P 绕点 Q 顺时针旋转 120° 得到的,

$$\therefore P'Q = PQ = 2,$$

过 P' 作 $P'D$ 平行于 x 轴, $P'D$ 交抛物线对称轴于点 D, 如图:



$\therefore$ 在 $Rt\triangle QDP'$ 中, $\angle P'QD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $P'Q = 2$,

$\therefore QD = 1$, $DP' = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 P' 横坐标为点 D 横坐标加 DP' , 即: $-1 + \sqrt{3}$,

点 P' 纵坐标为点 Q 纵坐标减 DQ , 即: $2 - 1 = 1$,

将 P' 的横坐标值代入 $y = -x^2 - 2x + 3$,

$$y = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 3 = 1,$$

$\therefore P'$ 的坐标符合抛物线表达式,

$\therefore P'$ 在抛物线上.

$$(3) \because BP^2 = [-3 - (-1)]^2 + (0 - 4)^2 = 20,$$

$$PC^2 = (-1 - 0)^2 + (4 - 3)^2 = 2,$$

$$BC^2 = (-3 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 18,$$

$$20 = 18 + 2,$$

$$\therefore BP^2 = PC^2 + BC^2,$$

$\therefore \triangle BCP$ 是直角三角形, $\angle BCP = 90^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{2}$,

$\because M$ 是 x 轴上一点, $\angle COM = 90^\circ$,

若 $\angle OCM = \angle CBP$, 则 $\triangle OCM \sim \triangle CBP$,

$$\therefore \frac{OC}{OM} = \frac{CB}{CP} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3,$$

此时, 点 M 坐标为 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$,

若 $\angle OCM = \angle CPB$, 则 $\triangle OCM \sim \triangle CPB$,

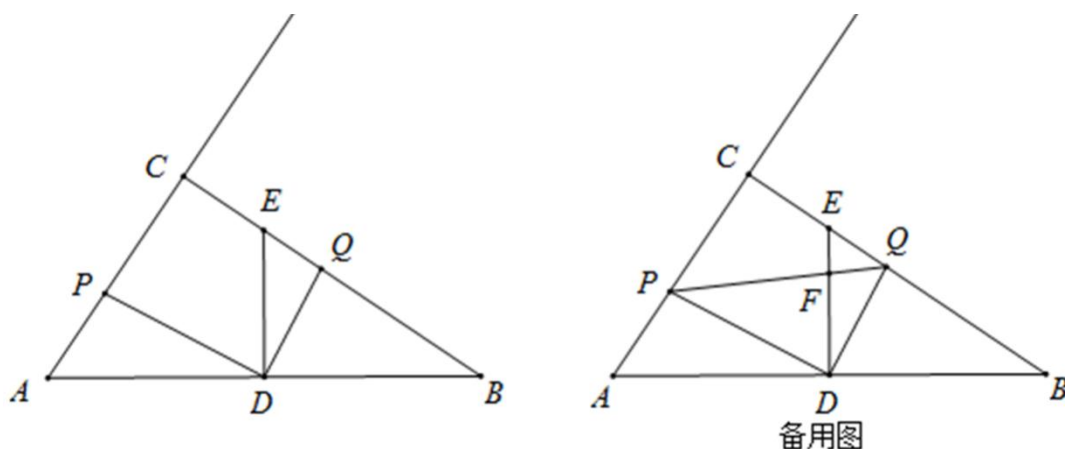
$$\therefore \frac{OC}{OM} = \frac{CP}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3},$$

此时，点 M 坐标为 $(9,0)$ 或 $(-9,0)$ ，

$\therefore$ 综上，点 M 存在，点 M 坐标为 $(1,0)$ 或 $(9,0)$ 或 $(-1,0)$ 或 $(-9,0)$ 。

【点睛】本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式、勾股定理及相似三角形的性质，运用分类讨论的思想是解决第 (3) 小题的关键。

25. 如图， $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，点 D 为斜边 AB 的中点， $ED \perp AB$ ，交边 BC 于点 E ，点 P 为射线 AC 上的动点，点 Q 为边 BC 上的动点，且运动过程中始终保持 $PD \perp QD$ 。



(1) 求证： $\triangle ADP \sim \triangle EDQ$ ；

(2) 设 $AP = x$ ， $BQ = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出该函数的定义域；

(3) 连接 PQ ，交线段 ED 于点 F ，当 $\triangle PDF$ 为等腰三角形时，求线段 AP 的长。

【答案】(1) 证明见解析；(2) $y = \frac{25}{4} - \frac{3}{4}x \left(0 \leq x \leq \frac{25}{3} \right)$ ；(3) $\frac{25}{6}$ 或 $\frac{5}{3}$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据 $ED \perp AB$ ， $PD \perp QD$ 得 $\angle A = \angle DEQ$ ， $\angle ADP = \angle EDQ$ ，即可得 $\triangle ADP \sim \triangle EDQ$ 。

(2) 先根据相似三角形的性质、中点性质以及锐角三角函数的概念得出 $\frac{EQ}{AP} = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{BD} = \tan B$ ，求出 $EQ = \frac{3}{4}x$ ，再根据 $BQ = BE - EQ$ ，列出函数关系式，化简即可。

(3) 先证 $\triangle PDF \sim \triangle BDQ$ ，再分 3 种情况讨论，分别求出 AP 的长。

【详解】解：(1) $\because PD \perp QD$ ， $ED \perp AB$ ，

$$\therefore \angle ADP + \angle PDE = 90^\circ, \quad \angle EDQ + \angle PDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle EDQ,$$

$$\because ED \perp AB, \quad \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, \quad \angle B + \angle DEQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DEQ,$$

$$\therefore \triangle ADP \sim \triangle EDQ.$$

$$(2) \because \triangle ADP \sim \triangle EDQ,$$

$$\therefore \frac{EQ}{AP} = \frac{ED}{AD},$$

$$\because \text{点 } D \text{ 为斜边 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \frac{EQ}{AP} = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{BD},$$

$$\because ED \perp AB, \quad AC=6, \quad BC=8,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中}, \quad \tan B = \frac{ED}{BD} = \frac{ED}{AD} = \frac{EQ}{AP} = \frac{6}{8}, \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10,$$

$$\because D \text{ 为 } AB \text{ 中点},$$

$$\therefore BD=5, \quad DE=\frac{15}{4},$$

$$\therefore BE = \sqrt{DE^2 + BD^2} = \frac{25}{4},$$

$$\because AP = x,$$

$$\therefore EQ = \frac{3}{4}x,$$

$$\therefore BQ = BE - EQ = y,$$

$$\therefore y = \frac{25}{4} - \frac{3}{4}x \quad (0 \leq x \leq \frac{25}{3}).$$

$$(3) \because \tan \angle FPD = \frac{DQ}{DP} = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{BD} = \tan B,$$

$$\therefore \angle FPD = \angle B,$$

$$\because \angle PDF + \angle EDQ = 90^\circ, \quad \angle BDQ + \angle EDQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PDF = \angle BDQ,$$

$$\therefore \triangle PDF \sim \triangle BDQ,$$

$$\therefore \triangle PDF \text{ 为等腰三角形时, } \triangle BDQ \text{ 亦为等腰三角形},$$

①若 $DQ = BQ$ ，则 $\angle QDB = \angle B$ ，

$$\because \angle QDB + \angle EDQ = 90^\circ, \quad \angle B + \angle DEB = 90^\circ,$$

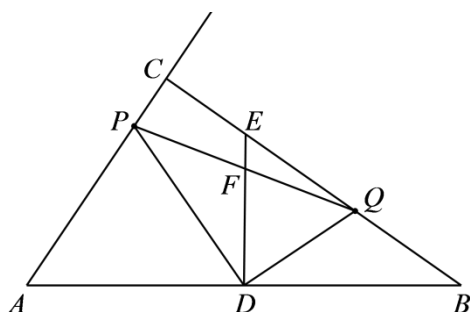
$$\therefore \angle DEB = \angle EDQ,$$

$$\therefore DQ = QE,$$

$\therefore$ 点 Q 为 BE 中点，

$$\therefore y = BQ = \frac{25}{4} - \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}BE = \frac{25}{4},$$

$$\text{解得: } x = \frac{25}{6}.$$



②若 $BD = BQ$ ，则 $BQ = \frac{1}{2}AB = 5$

$$\therefore y = \frac{25}{4} - \frac{3}{4}x = 5,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{3}.$$

③若 $DQ = BD$ ，

$\therefore$ 连接 PQ ，交线段 ED 于点 F

$\therefore$ 点 Q 在线段 BE 上，

$$\therefore \angle BDQ \leq 90^\circ,$$

$$\because AC < BC, \quad \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B < 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle DQB + \angle BDQ = 2\angle B + \angle BDQ < 180^\circ, \text{ 此种情况舍去.}$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质和判定及三角函数，正确和熟练应用相似三角形的性质得到各线段之间的数量关系是解决本题的关键.