

上海市宝山区 2021 届初三一模数学试卷

一、选择题

1. 如果 C 是线段 AB 延长线上一点, 且 $AC:BC=3:1$, 那么 $AB:BC$ 等于 ().

- A. 2:1 B. 1:2 C. 4:1 D. 1:4

【答案】A

【解析】

【分析】先画出图形, 设 BC 为 k , 然后用 k 表示出 AB , 最后求出 $AB:BC$ 即可.

【详解】解: 根据题意可画出下图:



$\because AC:BC=3:1$, 设 BC 为 k ,

$\therefore AC=3k$,

$\therefore AB=AC-BC=2k$,

$\therefore AB:BC=2k:k=2:1$.

故答案为 A.

【点睛】本题主要考查了线段的和差, 根据题意画出图形成为解答本题的关键.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=5$, $BC=3$, 那么 $\sin A$ 的值为 ().

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正弦的定义解答即可.

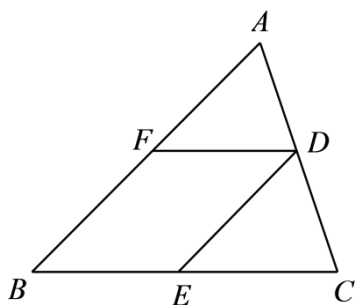
【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=5$, $BC=3$,

$$\text{则 } \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

故选: A.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义, 掌握锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦是解题的关键.

3. 如图, $AB \parallel DE$, $BC \parallel DF$, 已知 $AF:FB=m:n$, $BC=a$, 那么 CE 等于 ().



A. $\frac{am}{n}$

B. $\frac{an}{m}$

C. $\frac{am}{m+n}$

D. $\frac{an}{m+n}$

【答案】D

【解析】

【分析】先证明：四边形 $DEBF$ 是平行四边形，可得 $DF = BE$ ，利用 $AF : FB = m : n$ ，再求解 $\frac{AF}{AB} = \frac{m}{m+n}$ ，再证明 $\triangle ADF \sim \triangle ACB$ ，利用相似三角形的性质求解 BE ，再利用线段的和差可得答案.

【详解】解： $\because AB \parallel DE, BC \parallel DF$,

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形，

$$\therefore DF = BE,$$

$$\because AF : FB = m : n,$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{m}{m+n},$$

$$\because DF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ACB$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

$$\because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{m}{m+n},$$

$$\because BC = a,$$

$$\therefore BE = \frac{ma}{m+n},$$

$$\therefore CE = a - \frac{ma}{m+n} = \frac{na}{m+n}.$$

故选：D.

【点睛】 本题考查的是平行四边形的判定与性质，比例的基本性质，相似三角形的判定与性质，掌握以上知识是解题的关键.

4. 已知点 M 是线段 AB 的中点，那么下列结论中，正确的是 ().

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 0$

【答案】B

【解析】

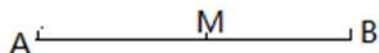
【分析】根据题意画出图形，因为点 M 是线段 AB 的中点，所以根据线段中点的定义解答.

【详解】解：A、 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ，故本选项错误；

B、 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，故本选项正确；

C、 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ ，故本选项错误；

D、 $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ，故本选项错误.



【点睛】本题考查了线段的中点定义，注意向量的方向及运算法则.

5. 若将抛物线 $y = x^2$ 先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，就得到抛物线 ()

A. $y = (x-1)^2 + 2$

B. $y = (x-1)^2 - 2$

C. $y = (x+1)^2 + 2$

D. $y = (x+1)^2 - 2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次函数图象左加右减，上加下减的平移规律进行解答即可.

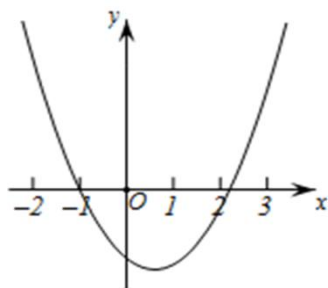
【详解】解：将抛物线 $y = x^2$ 先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，就得到抛物线：

$$y = (x-1)^2 + 2$$

故答案为：A.

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质，图象平移规律“左加右减，上加下减”是解题关键.

6. 如图所示是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像的一部分，那么下列说法中不正确的是 ().



A. $ac < 0$

B. 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$

C. $a - b + c = 0$

D. 点 $(-2, y_1)$ 和 $(2, y_2)$ 在抛物线上, 则 $y_1 > y_2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据图象分别求出 a 、 c 的符号, 即可判断 A; 根据抛物线与 x 轴的两个交点可判断出该抛物线的对称轴不是 $x=1$, 即可判断 B; 把 $x=-1$ 代入二次函数的解析式, 再根据图象即可判断 C; 将 $x=-2$ 与 $x=2$ 带入二次函数, 可得出 y_1 与 y_2 的值, 即可判断 D.

【详解】解: $\because$ 二次函数的图象开口向上,

$\therefore a > 0$,

$\because$ 二次函数的图象交 y 轴的负半轴于一点,

$\therefore c < 0$,

$\therefore ac < 0$ 选项 A 正确;

$\because$ 由图像可看出, 抛物线与 x 轴的交点一个为 $x=-1$, 另一个在 $x=2$ 和 $x=3$ 中间, 不关于 $x=1$ 对称,

$\therefore$ 抛物线的对称轴不是 $x=1$ 选项 B 错误;

把 $x=-1$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得: $y=a-b+c$, 由图像可知, $x=-1$ 时 $y=0$,

$\therefore a-b+c=0$ 选项 C 正确;

把 $x=-2$ 和 $x=2$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 中, 由图像可知, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$,

$\therefore y_1 > y_2$ 选项 D 正确;

故选: B.

【点睛】本题考查二次函数的性质, 解题的关键时熟练运用抛物线的图像判断系数 a 、 b 、 c 之间的关系, 同时注意特殊点与对称轴之间的关系, 属于中等题型.

二、填空题

7. 如果 $2x = 3y$, 那么 $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 直接利用已知得出 $x = \frac{3}{2}y$ ，进而代入得出答案.

【详解】 解： $\because 2x = 3y$,

$$\therefore x = \frac{3}{2}y,$$

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{\frac{3}{2}y+y}{y} = \frac{5}{2}.$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点睛】 本题主要考查了比例的性质，正确将已知变形是解题关键.

8. 已知线段 $a = 2$ 厘米， $c = 8$ 厘米，那么线段 a 和 c 的比例中项 b 的长度为_____厘米.

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据线段的比例中项可直接进行列式求解.

【详解】 解： 由题意可得：

$$b^2 = ac = 2 \times 8 = 16,$$

$$\therefore b = 4 \text{ cm};$$

故答案为 4.

【点睛】 本题主要考查比例中项，熟练掌握比例中项是解题的关键.

9. 如果线段 AB 的长为 2，点 P 是线段 AB 的黄金分割点，那么较短的线段 $AP =$ _____.

【答案】 $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 设较短的线段 $AP = x$ ，则 $BP = AB - AP$ ，根据黄金分割点的性质列方程并求解，即可得到答案.

【详解】 设较短的线段 $AP = x$

$\because AB$ 的长为 2

$$\therefore BP = AB - AP = 2 - x$$

$$\therefore \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP}$$

$$\therefore \frac{2-x}{2} = \frac{x}{2-x}$$

$$\therefore (2-x)^2 = 2x$$

$$\therefore x = 3 + \sqrt{5} \text{ 或 } 3 - \sqrt{5} \quad (\text{经检验均为方程的根})$$

$$3 + \sqrt{5} > 2, \text{ 故舍去}$$

$$\therefore 2 - x = 2 - (3 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1 \neq 0$$

$$\therefore x = 3 - \sqrt{5}$$

$$\therefore \text{较短的线段 } AP = 3 - \sqrt{5}$$

故答案为: $3 - \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了黄金分割点、分式方程、一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握黄金分割点、分式方程、一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

10. 计算: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $5\vec{a} - 4\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据向量的表示方法可直接进行解答.

【详解】 解: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = 6\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{a} - \vec{b} = 5\vec{a} - 4\vec{b},$

故答案为: $5\vec{a} - 4\vec{b}.$

【点睛】 本题考查的是平面向量的知识，熟悉相关性质是解题的关键.

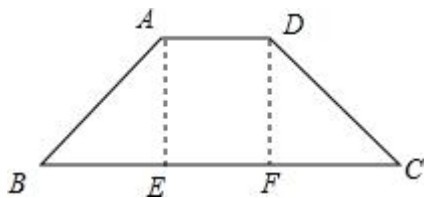
11. 已知等腰梯形上底为 5，高为 4，底角的余弦值为 $\frac{3}{5}$ ，那么其周长为_____.

【答案】 26

【解析】

【分析】 作 $DF \perp BC$ 于 F , $AE \perp BC$ 于 E , 根据等腰梯形的性质就可以得出 $\triangle AEB \cong \triangle DFC$ 就可以求出 $FC = BE$, 然后根据底角的余弦值为 $\frac{3}{5}$, 求得 BE , AB , 从而求出周长.

【详解】 解: 如图示, 作 $DF \perp BC$ 于 F , $AE \perp BC$ 于 E ,



∵ 四边形 ABCD 是等腰梯形,

∴ $\angle B = \angle C$, $AB = CD$, $AD \parallel BC$,

∴ $\angle ADF = \angle DFC = 90^\circ$,

∴ $\angle AEF = \angle DFE = \angle ADF = 90^\circ$,

∴ 四边形 AEFD 是矩形, $EF = AD = 5$,

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle DFC$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle AEB = \angle DFC, \\ AE = DF \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle AEB = \angle DFC, \\ AE = DF \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle AEB = \angle DFC, \\ AE = DF \end{cases}$$

∴ $\triangle AEB \cong \triangle DFC$ (AAS),

∴ $BE = CF$;

$$\because \cos B = \frac{3}{5} = \frac{BE}{AB},$$

设 $BE = 3x$, 则 $AB = 5x$,

根据勾股定理, 有: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4$,

解之得: $x = 1$ (取正值),

∴ $BE = 3$, $AB = 5$,

∴ $FC = BE = 3$, $DC = AB = 5$,

∴ 周长 = $AB + BE + EF + FC + CD + AD$

$$= 5 + 3 + 5 + 3 + 5 + 5 = 26,$$

故答案是: 26.

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质的运用, 三角函数, 矩形的判定及性质的运用, 等腰三角形的性质的运用, 全等三角形的判定及性质的运用, 能熟练应用相关性质是解题的关键.

12. 某公司 10 月份的产值是 100 万元, 如果该公司第四季度每个月产值的增长率相同, 都为 $x(x > 0)$, 12 月份的产值为 y 万元, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.

【答案】 $y = 100(1+x)^2$;

【解析】

【分析】根据：现有量=原有量 $\times(1+\text{增长率})^n$ ，即可列方程求解.

【详解】依题意得： $y=100(1+x)^2$

故答案为： $y=100(1+x)^2$

【点睛】考查了一元二次方程的应用，可直接套公式：原有量 $\times(1+\text{增长率})^n$ =现有量， n 表示增长的次数.

13. 如果抛物线 $y=m(x+1)^2+m$ (m 是常数) 的顶点坐标在第二象限，那么它的开口方向_____.

【答案】向上

【解析】

【分析】根据解析式写出顶点，根据顶点坐标在第二象限求出 m 的取值故可求解.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y=m(x+1)^2+m$ 的得到为 $(-1, m)$

又顶点坐标在第二象限

$\therefore m > 0$

$\therefore$ 开口向上

故答案为：向上.

【点睛】此题主要考查二次函数的性质，解题的关键是熟知顶点式的特点.

14. 已知一条抛物线具有以下特征：(1) 经过原点；(2) 在 y 轴左侧的部分，图像上升，在 y 轴右侧的部分，图像下降；试写出一个符合要求的抛物线的表达式：_____.

【答案】 $y=-x^2$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】设出符合条件的函数解析式，再根据二次函数的图象在 y 轴左侧部分是上升的，在 y 轴右侧部分是下降的可知该函数图象的开口向下，对称轴为 y 轴，即 $a < 0$ ， $b = 0$ ，再把 $A(0,0)$ 代入，得出符合条件的函数解析式即可.

【详解】解：设出符合条件的函数解析式为： $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ ，

$\because$ 二次函数的图象在 y 轴左侧部分是上升的，在 y 轴右侧部分是下降的，

$\therefore$ 该函数图象的开口向下，对称轴为 y 轴，即 $a < 0$ ， $b = 0$ ，

$\because$ 函数图象经过 $A(0,0)$ ，

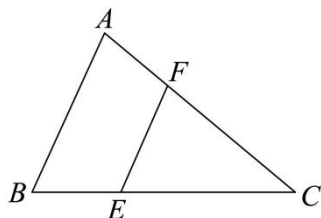
$\therefore c = 0$ ，

∴ 符合条件的二次函数解析式可以为: $y = -x^2$ (答案不唯一).

故答案为: $y = -x^2$ (答案不唯一).

【点睛】 本题考查的是二次函数的性质, 先根据题意设出函数解析式, 再根据二次函数的性质判断出 a 的符号及对称轴是解答此题的关键, 此题属开放性题目, 答案不唯一.

15. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $EF \parallel AB$, $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$, 如果四边形 $ABEF$ 的面积为 25, 那么 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】 45

【解析】

【分析】 根据 $EF \parallel AB$, 易得 $\triangle CFE \sim \triangle CAB$, 再依据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 即可求出三角形 ABC 的面积.

【详解】 解: $\because EF \parallel AB$

$\therefore \triangle CFE \sim \triangle CAB$

$$\text{又} \because \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AC}{FC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FEC}} = \frac{9}{4}$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 x

$$\text{则} \frac{x}{x-25} = \frac{9}{4},$$

解得, $x=45$,

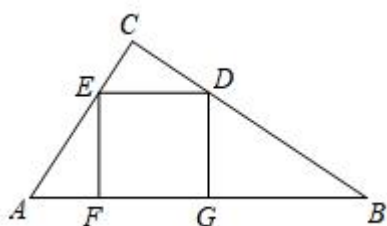
经检验 $x=45$ 是原方程的根

故答案为: 45

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 依据相似三角形面积比是相似比的平方, 构建方程, 是解决问题关键.

16. 在一块直角三角形铁皮上截一块正方形铁皮, 如图, 已有的铁皮是 $\text{Rt} \triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, 要截得的正方形 $EFGD$ 的边 FG 在 AB 上, 顶点 E 、 D 分别在边 CA 、 CB 上, 如果 $AF = 4$, $GB = 9$, 那么正方

形铁皮的边长为_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 设正方形铁皮的边长为 x ，证明 $\triangle AEF \sim \triangle DBG$ ，得到 $\frac{EF}{BG} = \frac{AF}{DG}$ ， $\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$ ，求解即可.

【详解】 设正方形铁皮的边长为 x ,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

在正方形 $EFGD$ 中, $EF = DG = FG = x$, $\angle EFG = \angle DGF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AFE = \angle BGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle B,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DBG,$$

$$\therefore \frac{EF}{BG} = \frac{AF}{DG},$$

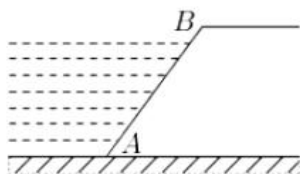
$$\therefore \frac{x}{9} = \frac{4}{x},$$

解得 $x = 6$ (负值舍去),

故答案为: 6.

【点睛】 此题考查正方形的性质, 相似三角形的判定及性质, 根据已知条件证明 $\triangle AEF \sim \triangle DBG$ 是解题的关键.

17. 如图, 某堤坝的坝高为 12 米, 如果迎水坡的坡度为 $1:0.75$, 那么该大坝迎水坡 AB 的长度为_____米.



【答案】 15

【解析】

【分析】过点 B 作 $BC \perp AC$ 于 C ，由迎水坡的坡度为 $1:0.75$ ，得到 $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$ ，求出 $AC=9$ 米，再利用勾股定理求出答案.

【详解】过点 B 作 $BC \perp AC$ 于 C ,

$\because$ 迎水坡的坡度为 $1:0.75$,

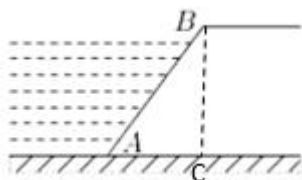
$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3},$$

$\therefore BC=12$ 米,

$\therefore AC=9$ 米,

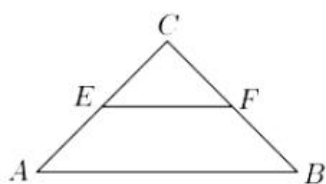
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15(\text{米}),$$

故答案为: 15.



【点睛】此题考查坡度的定义，解直角三角形的实际应用，勾股定理，正确理解迎水坡的坡度为 $1:0.75$ 得到 $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$ 是解题的关键.

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 E 、 F 分别是边 CA 、 CB 的中点，已知点 P 在线段 EF 上，联结 AP ，将线段 AP 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 DP ，如果点 P 、 D 、 C 在同一直线上，那么 $\tan \angle CAP = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{2}-1$.

【解析】

【分析】分两种情形：①当点 D 在线段 PC 上时，延长 AD 交 BC 的延长线于 H . 证明 $AD=DC$ 即可解决问题.

【详解】解：①如图 2 中，当点 D 在线段 PC 上时，延长 AD 交 BC 的延长线于 H .

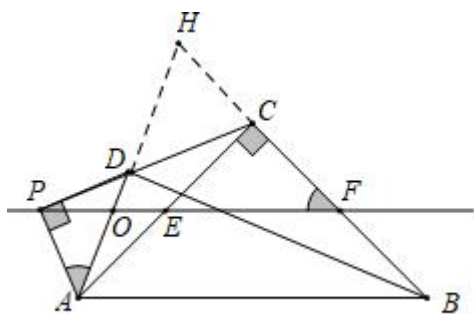


图2

$$\because CE = EA, CF = FB,$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\because AC = AB, \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\because PD = PA, \angle APD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle PAD = \angle PDA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HDC = \angle PDA = 45^\circ,$$

$$\because \text{点 } E \text{ 是边 } CA \text{ 的中点},$$

$$\therefore EA = EP = EC$$

$$\therefore \angle EPC = \angle CEP,$$

$$\because \angle HDC = \angle DCA + \angle DAC = 45^\circ,$$

$$\angle CEF = \angle DCA + \angle EPC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EPC = \angle ECP,$$

$$\therefore DA = DC, \text{ 设 } AP = a, \text{ 则 } DA = DC = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore PC = (\sqrt{2} + 1)a$$

$$\therefore \tan \angle CAP = \frac{PC}{PA} = \frac{(\sqrt{2} + 1)a}{a} = \sqrt{2} + 1$$

②如图 3 中, 当点 P 在线段 CD 上时,

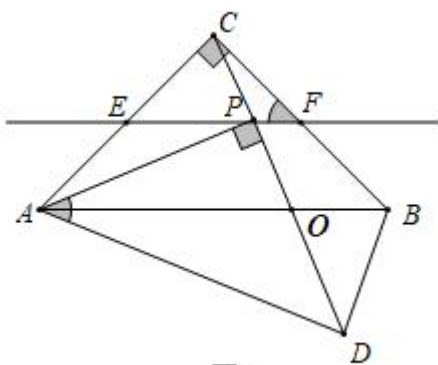


图3

由①可知, $EF \parallel AB$, $\angle CAB = \angle PDA = 45^\circ$,

$$\therefore \angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - 45^\circ,$$

$$\angle COA = 180^\circ - \angle ACO - 45^\circ$$

$$\therefore \angle CAD = \angle COA,$$

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CPE = \angle COA,$$

$$\therefore \angle CPE = \angle CAD,$$

$\because$ 点 E 是边 CA 的中点,

$$\therefore EA = EP = EC$$

$$\therefore \angle ECP = \angle CPE,$$

$$\therefore \angle ECP = \angle CAD,$$

$$\therefore DA = DC, \text{ 设 } AP = a, \text{ 则 } PD = a, DA = DC = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore PC = (\sqrt{2} - 1)a$$

$$\therefore \tan \angle CAP = \frac{PC}{PA} = \frac{(\sqrt{2} - 1)a}{a} = \sqrt{2} - 1$$

$\therefore$ 点 P 在线段 EF 上, 情况①不满足条件, 情况②满足条件,

综上所述, $\tan \angle CAP$ 的值是 $\sqrt{2} - 1$.

【点睛】 本题考查了旋转变换, 等腰直角三角形的性质, 中位线的性质, 外角的性质, 三角形内角和, 勾股定理和三角函数等知识, 熟悉相关性质是解题的关键.

三、解答题

19. 计算: $\frac{1 - \cos^2 45^\circ}{\cot 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}.$

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$

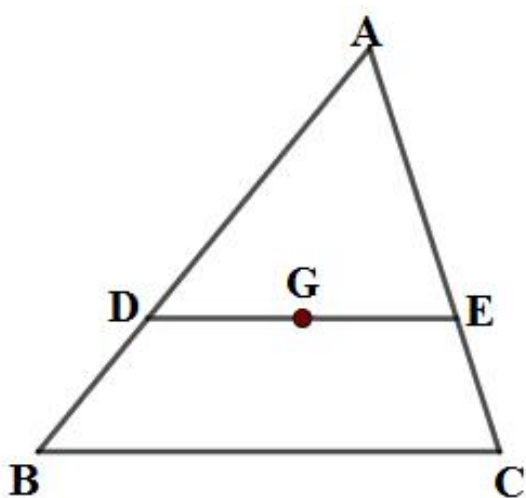
【解析】

【分析】 根据特殊角的三角函数值进行计算求解.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{11}.$

【点睛】 本题考查特殊角的三角函数值, 解题的关键是掌握特殊角的三角函数值.

20. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, 且 DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心点 G , $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BE}$;

(2) 求作向量 $\frac{2}{3}(3\vec{a} - \vec{b})$ (不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量).

【答案】 (1) $\overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据重心到顶点的距离是它到对边中点距离的 2 倍, 分析得到 $DE = \frac{2}{3}BC$, 再根据向量的加法法则, 首尾顺次相连, 由三角形法则即可求解;

(2) 取 AD 的中点 J , 延长 CB 到 I , 使 $BI = DE$, 以 BJ 、 BI 为邻边作平行四边形 $BJKI$, 边接 BK , 则 $\overrightarrow{BK}$ 即是所求作的向量.

【详解】 解: (1) 如图, 连接 AG 并延长交 BC 于点 F , 则 $GF = \frac{1}{2}AG$,

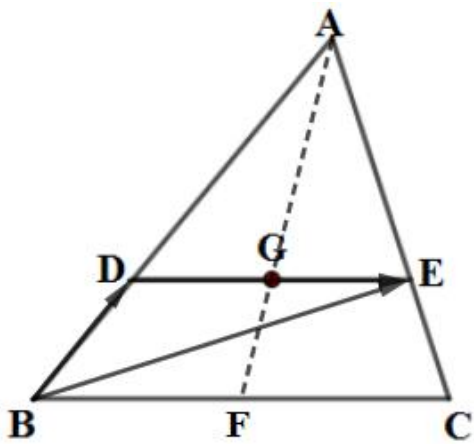
$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3},$$

$$\because DE \parallel BC, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}, \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$



$$(2) \because \overrightarrow{BD} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = 3\vec{a},$$

作 AD 的中点 J,

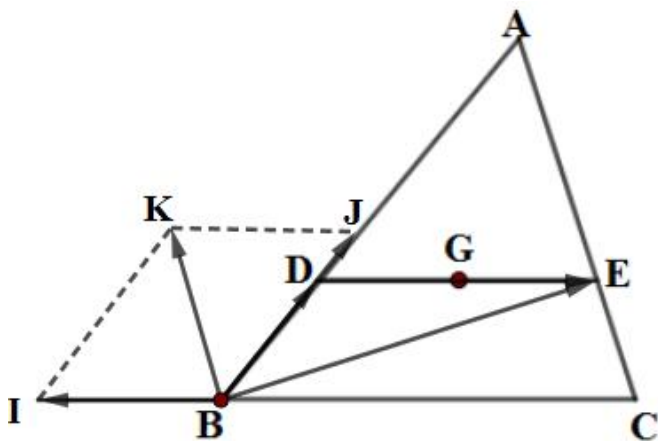
$$\therefore BJ = \frac{2}{3} \times 3\vec{a} = 2\vec{a},$$

延长 CB 到 I, 使得 BI=DE,

$$\therefore \overrightarrow{BI} = -\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\text{以 BJ、BI 为邻边作平行四边形 BJKI, 则 } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BI} = 2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}(3\vec{a} - \vec{b}),$$

$\therefore \overrightarrow{BK}$ 即是所求的求作的向量



【点睛】 本题考查了向量的知识，掌握法则向量的平行四边形法则，向量的三角形法则是解题的关键.

21. 已知二次函数 $y = ax^2 - ax (a \neq 0)$ 的图像经过点 $(-1, 2)$.

(1) 求该二次函数的解析式和顶点坐标;

(2) 能否通过所求得的抛物线的平移得到抛物线 $y = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$? 如果能, 请说明怎样平移, 如果不能, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 - x$, 顶点为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; (2) 可以, 先向左平移 2 个单位, 再向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位

【解析】

【分析】 (1) 把点 $(-1, 2)$ 代入函数解析式, 求出 a 的值即可得到解析式, 再把一般式写成顶点式得到顶点坐标;

(2) 把所给的函数解析式化为顶点式, 根据函数图象的平移法则进行求解.

【详解】 解: (1) 把点 $(-1, 2)$ 代入函数解析式, 得 $a + a = 2$, 解得 $a = 1$,

$$\therefore y = x^2 - x,$$

$$\text{写成顶点式: } y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{顶点坐标是 } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right);$$

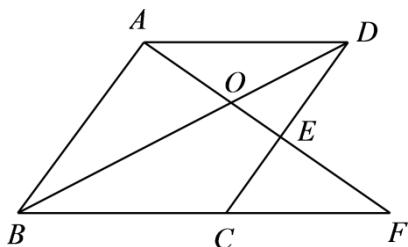
$$(2) \text{ 将 } y = x^2 + 3x + \frac{1}{2} \text{ 也写成顶点式, 得 } y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4},$$

$$\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2, \quad \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

∴把原抛物线先向左平移 2 个单位，再向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位.

【点睛】 本题考查二次函数解析式的求解和图象的平移，解题的关键是掌握解析式的求解方法和函数图象的平移方法.

22. 如图，点 O 是菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点，联结 AO 并延长，交 CD 于点 E ，交 BC 的延长线于点 F .



(1) 求证: $AB^2 = DE \cdot BF$;

(2) 如果 $OE = 1$, $EF = 2$, 求 $\frac{CF}{BF}$ 的长.

【答案】 (1) 见解析; (2) $\frac{CF}{BF} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据菱形的性质证明 $\triangle ABO \sim \triangle EDO$, $\triangle BFO \sim \triangle DAO$, 得到 $\frac{AB}{ED} = \frac{BF}{DA}$, 再由 $AB = DA$, 即可证明结论;

(2) 连接 OC , 先证明 $\triangle ADO \cong \triangle CDO$ (SAS) 得到 $\angle DAO = \angle DCO$, 就可以证明 $\triangle OEC \sim \triangle OCF$, 根据对应边成比例求出 OC 的长, 再根据 $\triangle ADE \sim \triangle FCE$, 利用对应边成比例求出结果.

【详解】 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AB = DA$,

$\therefore \triangle ABO \sim \triangle EDO$, $\triangle BFO \sim \triangle DAO$,

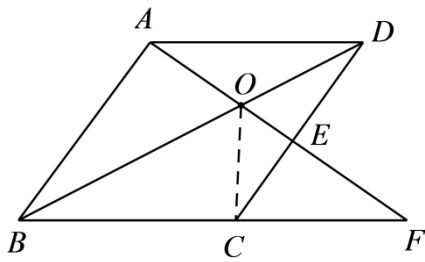
$\therefore \frac{AB}{ED} = \frac{BO}{DO}$, $\frac{BF}{DA} = \frac{BO}{DO}$,

$\therefore \frac{AB}{ED} = \frac{BF}{DA}$,

$\because AB = DA$,

$\therefore AB^2 = DE \cdot BF$;

(2) 如图, 连接 OC ,



$\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore AD=DC, \angle ADO = \angle CDO,$

在 $\triangle ADO$ 和 $\triangle CDO$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADO = \angle CDO, \\ DO = DO \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CDO (SAS),$

$\therefore \angle DAO = \angle DCO,$

$\therefore AD \parallel BF,$

$\therefore \angle DAO = \angle OFC,$

$\therefore \angle DCO = \angle OFC,$

$\therefore \angle COE = \angle FOC,$

$\therefore \triangle OEC \sim \triangle OCF,$

$\therefore \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OF},$ 即 $OC^2 = OE \cdot OF,$

$\therefore OE = 1, EF = 2,$

$\therefore OF = 1 + 2 = 3,$

$\therefore OC = \sqrt{3},$

$\therefore AO = OC = \sqrt{3},$

$\therefore AD \parallel CF,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FCE,$

$\therefore \frac{AD}{FC} = \frac{AE}{FE} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$

$\therefore BC = AD = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} FC,$

$$BF = BC + CF = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}FC + FC = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}FC,$$

$$\therefore \frac{CF}{BF} = \frac{2}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题考查相似三角形，解题的关键是掌握相似三角形的性质和判定.

23. 某校数学活动课上，开展测量学校教学大楼(AB)高度的实践活动，三个小组设计了不同方案，测量数据如下表:

课 题	测量教学大楼(AB)的高度		
测 量 工 具	测量角度的仪器，皮尺等		
测 量 小 组	第一组	第二组	第三组
测 量 方 案 示 意 图			
说 明	点C、D在点B的正东方向	GH是教学大楼旁的居民住宅楼	EF是教学大楼正南方向的“校训石”，借助EF进行测量，使P、E、A三点在一条直线上，点P、F在点B的正

			南方向
测量数据	从点 C 处测得 A 点的仰角为 37° ，从点 D 处测得 A 点的仰角为 45° ， $CD = 12$ 米	从点 G 处测得 A 点的仰角为 37° ，测得 B 点的俯角为 45°	$EF = 9$ 米，从点 P 处测得 A 点的仰角为 37° ，从点 F 处测得 A 点的仰角为 45°

(1) 根据测量方案和所得数据，第_____小组的数据无法算出大楼高度？

(2) 请选择其中一个可行方案及其测量数据，求出教学大楼的高度.

【参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ 】

【答案】 (1) 二； (2) 36 米

【解析】

【分析】 (1) 根据第二组只测了角度，未给出距离相关信息即可判断；

(2) 由锐角三角函数可求 $BC = \frac{AB}{\tan C}$ ， $BD = \frac{AB}{\tan \angle ADB}$ ，由 $BC - BD = CD$ ，列出方程可求解.

【详解】 (1) $\because$ 第二组中没有线段长度的数据，所以无法测出 AB 的高度，

$\therefore$ 填第二组，

故答案为：二.

(2) 可选第一组的方案，

设 $AB = xm$ ，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\tan C = \frac{AB}{BC}$ ，

$$\therefore BC = \frac{AB}{\tan C} = \frac{x}{\tan 37^\circ} = \frac{4}{3}x,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$ ，

$$\therefore BD = \frac{AB}{\tan \angle ADB} = \frac{x}{\tan 45^\circ} = x,$$

$$\therefore BC - BD = CD,$$

$$\therefore \frac{4}{3}x - x = 12,$$

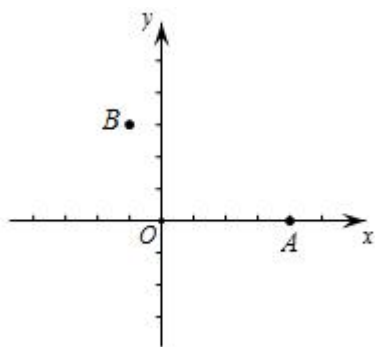
$$\therefore x = 36.$$

答：教学大楼高 36 米.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，利用数学知识解决实际问题中学数学的重要内容. 解决此问题的关键在于正确理解题意的基础上建立数学模型，把实际问题转化为数学问题.

24. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过 $A(4, 0)$ ， $B(-1, 3)$ 两点，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 C ，点

D 与点 B 关于抛物线的对称轴对称，联结 BC 、 BD 。



- (1) 求该抛物线的表达式以及对称轴；
- (2) 点 E 在线段 BC 上，当 $\angle CED = \angle OBD$ 时，求点 E 的坐标；
- (3) 点 M 在对称轴上，点 N 在抛物线上，当以点 O 、 A 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形时，求这个平行四边形的面积。

【答案】 (1) $y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}x$ ，对称轴为 $x = 2$ ； (2) $E(1, 1)$ ； (3) 当 OA 为边时， $S = \frac{144}{5}$ ；当 OA 为对角线时， $S = \frac{48}{5}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 将 $A(4, 0)$ ， $B(-1, 3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx$ ，求解即可；

(2) 过 B 点作 $BF \perp x$ 轴交 x 轴于点 F ，过 E 点作 $EH \perp x$ 轴交 x 轴于点 H ，根据 B 点坐标是 $(-1, 3)$ ，对称轴为 $x = 2$ ，易得 $\triangle BCF$ 是等腰直角三角形， $\triangle ECH$ 也是等腰直角三角形，求出 $BC = 3\sqrt{2}$ ，根据 $\angle CED = \angle OBD$ ，点 D 与点 B 关于抛物线的对称轴对称，可证得 $\triangle OBC = \triangle EDB$ ， $\triangle DBE = \triangle BCO$ ，则 $\triangle DBE \sim \triangle BCO$ ，有 $\frac{DB}{BC} = \frac{EB}{OC}$ ，可得 $EB = 2\sqrt{2}$ ，即可得 $EC = \sqrt{2}$ ，据此求解即可；

(3) 分两种情况讨论：当 OA 为对角线时，当 OA 为边时，分别求出 N 点坐标，然后求解即可。

【详解】 解：(1) 将 $A(4, 0)$ ， $B(-1, 3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx$ ，

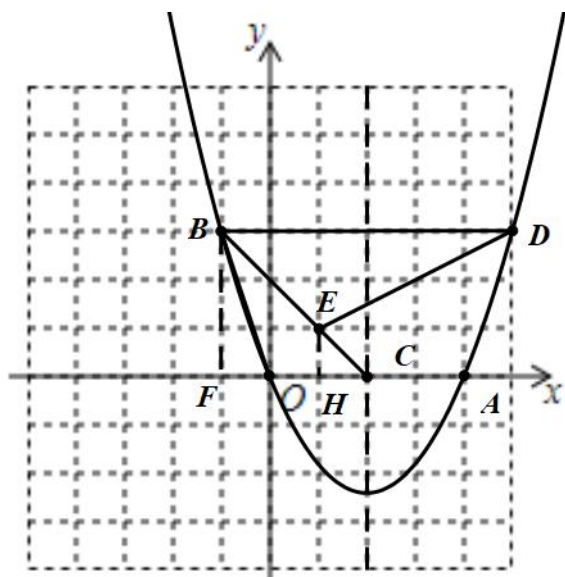
$$\text{得：} \begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ a - b = 3 \end{cases}, \text{解之得：} \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = -\frac{12}{5} \end{cases},$$

$\therefore$ 该抛物线的表达式是 $y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}x$ ，

$$\therefore y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}x = \frac{3}{5}(x^2 - 4x) = \frac{3}{5}(x - 2)^2 - \frac{12}{5},$$

∴ 对称轴为 $x = 2$;

(2) 如图示: 过 B 点作 $BF \perp x$ 轴叫 x 轴与点 F , 过 E 点作 $EH \perp x$ 轴叫 x 轴与点 H ,



∵ B 点坐标是 $(-1, 3)$, 对称轴为 $x = 2$,

∴ $BF = CF = 3$,

∴ $\triangle BCF$ 是等腰直角三角形, 则 $\triangle ECH$ 也是等腰直角三角形,

∴ $BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$,

∴ $\angle CED = \angle OBD$,

$\angle CED = \angle EBD + \angle EDB$,

$\angle OBD = \angle EBD + \angle OBC$

∴ $\angle OBC = \angle EDB$,

∵ 点 D 与点 B 关于抛物线的对称轴对称, 则 D 点坐标是 $(5, 3)$,

∴ $BD \parallel FA$

∴ $\angle DBE = \angle BCO$

∴ $\triangle DBE \sim \triangle BCO$

∴ $\frac{DB}{BC} = \frac{EB}{OC}$,

∵ $BD = 6, OC = 2$,

∴ $\frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{EB}{2}$, 即有 $EB = 2\sqrt{2}$,

∴ $EC = BC - EB = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

∴ $\triangle ECH$ 是等腰直角三角形,

∴ $EH = HC = 1$

$$\therefore OH = 1$$

即点 E 的坐标是 $(1,1)$;

$$(3) \because OA = 4$$

①当 OA 是平行四边形的边长时, 如图 2 所示,

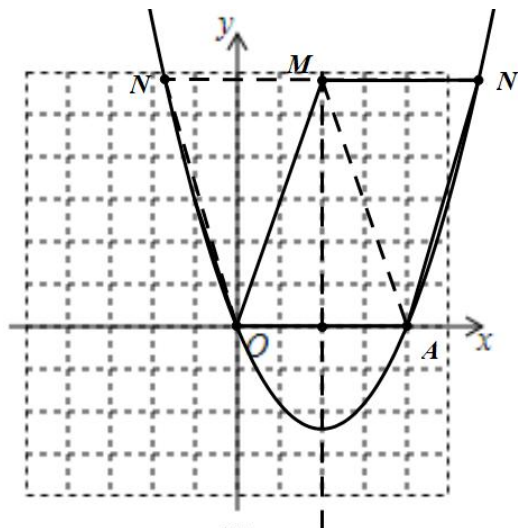


图 2

则 MN 必定在 y 轴的上方, 并有 $MN = OA = 4$,

$\because$ 点 M 在对称轴上,

$\therefore$ 点 N 的横坐标是 6 或 -2,

又 $\because$ 点 N 在抛物线上,

$$\therefore \text{当 } x = 6 \text{ 时, } y = \frac{3}{5} \cdot 6^2 - \frac{12}{5} \cdot 6 = \frac{36}{5},$$

$$\therefore \text{平行四边形 } OANM \text{ 的面积} = 4 \cdot \frac{36}{5} = \frac{144}{5};$$

$$\text{当 } x = -2 \text{ 时, } y = \frac{3}{5} \cdot (-2)^2 - \frac{12}{5} \cdot (-2) = \frac{36}{5},$$

$$\text{同理可得平行四边形 } OANM \text{ 的面积} = 4 \cdot \frac{36}{5} = \frac{144}{5};$$

②当 OA 是平行四边形的对角线时, 如图 3 所示,

(3) 过点 M 作射线 CD 的垂线, 垂足为点 F , 设 $\frac{BD}{BC} = x$, $\tan \angle FMD = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域.

【答案】(1) 见解析;

$$(2) DE = \frac{5\sqrt{2}}{4};$$

$$(3) y = 1 - \sqrt{2}x (0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

【解析】

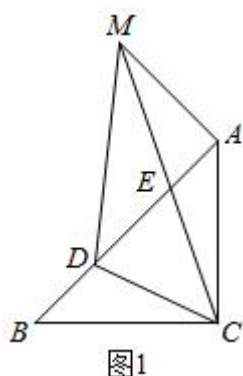
【分析】(1) 证明两个角相等证明 $\triangle CDE \sim \triangle BCE$, 列比例式可得结论;

(2) 如图 2, 过 D 作 $DN \perp AC$ 于 N , 根据 $\triangle ADN$ 是等腰直角三角形, 得 $AN = DN$, 由平行线分线段成比例定理得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$, 计算 DN 和 CN 的长, 利用勾股定理计算 CD 和 BD 的长, 根据 (1) 中的相似三角形, 列比例式得: $\frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BE} = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 设 $DE = \sqrt{5}x$, $CE = 3x$, 代入比例式可得结论;

(3) 如图 3, 作辅助线构建全等三角形, 证明 $\triangle AMC \cong \triangle BPC$ (ASA), 得 $CM = CP$, 证明 $\triangle MCD \cong \triangle PCD$ (SAS), 得 $\angle MDC = \angle PDC = \angle BDC$, 证明 $\triangle BCD \sim \triangle CMD$, 列比例式得 $\frac{BD}{BC} = \frac{CD}{CM}$, 根据三角函数的定义和等量代换可得比例式, 并根据 D, E 是 AB 上一点, $\angle DCE = 45^\circ$, 可知当点 E 与 A 重合时, BD 最大为 $\frac{1}{2}AB$, 可得 x 的取值范围.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1, $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$,



$$\therefore \angle B = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCE,$$

$$\because \angle CED = \angle CEB,$$

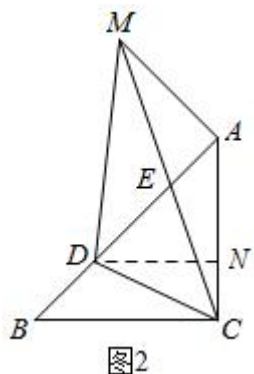
$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{DE}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = BE \cdot DE;$$

【小问 2 详解】

解：如图 2，过 D 作 $DN \perp AC$ 于 N ，



$$\therefore \angle AND = 90^\circ,$$

$$\because \angle DAN = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ADN$ 是等腰直角三角形，

$$\because DN \parallel BC, AD = 2BD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\because AC = 3,$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{2}, AN = DN = 2, CN = 1,$$

$$\because AD = 2BD,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2},$$

$$\text{由勾股定理得: } DC = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

由 (1) 知: $\triangle CDE \sim \triangle BCE$,

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BE} = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{设 } DE = \sqrt{5}x, CE = 3x,$$

$$\therefore \frac{3x}{\sqrt{2} + \sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore DE = \sqrt{5}x = \frac{5\sqrt{2}}{4};$$

【小问 3 详解】

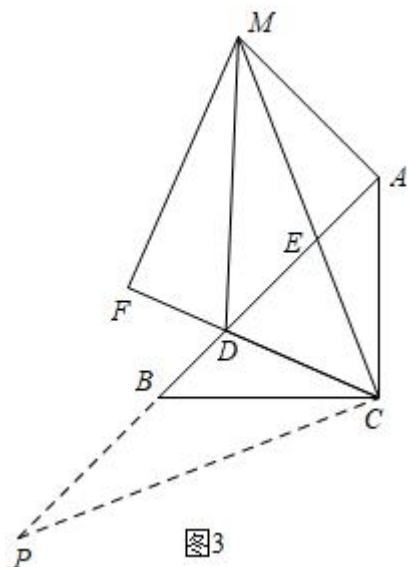
解：如图 3，过点 C 作 $CP \perp CM$ ，交 AB 的延长线于点 P ，

$$\because \angle DCE = 45^\circ, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM + \angle BCD = 45^\circ = \angle BCD + \angle BCP,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle ACM,$$

$$\because \angle CBP = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = \angle CAM, AC = BC,$$



$$\therefore \triangle AMC \cong \triangle BPC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CM = CP,$$

$$\because \angle DCM = \angle DCP = 45^\circ, CD = CD,$$

$$\therefore \triangle MCD \cong \triangle PCD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle MDC = \angle PDC = \angle BDC,$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ = \angle MCD,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle CMD,$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{BC}{CM}, \text{ 即 } \frac{BD}{BC} = \frac{CD}{CM},$$

$$\because FM \perp FC, \angle DCE = 45^\circ,$$

∴ $\triangle CFM$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CM = \sqrt{2} FM,$$

$$\therefore y = \tan \angle FMD$$

$$= \frac{DF}{MF} = \frac{\sqrt{2}DF}{CM}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(CF - CD)}{CM}$$

$$= \frac{\sqrt{2}CF - \sqrt{2}CD}{CM}$$

$$= 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{BD}{BC}$$

$$= 1 - \sqrt{2}x;$$

$Rt\triangle ABC$ 中, $AC=BC$,

$$\therefore AB = \sqrt{2} BC,$$

∵ D, E 是 AB 上一点, $\angle DCE=45^\circ$,

∴ 当点 E 与 A 重合时, BD 最大为 $\frac{1}{2}AB$,

$$\therefore \frac{BD}{BC} = x,$$

$$\therefore 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore y = 1 - \sqrt{2}x \quad (0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

【点睛】 本题是相似形的综合题, 考查了全等和相似三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的性质, 三角函数的定义等知识, 添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键

