

2020-2021 学年上海市宝山区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，共 24 分）

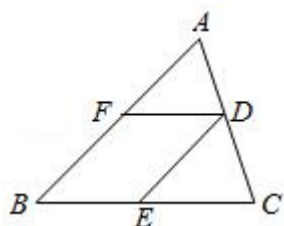
1.（4 分）如果 C 是线段 AB 延长线上一点，且 $AC:BC=3:1$ ，那么 $AB:BC$ 等于（ ）

- A. 2:1 B. 1:2 C. 4:1 D. 1:4

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，那么 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

3.（4 分）如图， $AB\parallel DE$ ， $BC\parallel DF$ ，已知 $AF:FB=m:n$ ， $BC=a$ ，那么 CE 等于（ ）



- A. $\frac{am}{n}$ B. $\frac{an}{m}$ C. $\frac{am}{m+n}$ D. $\frac{an}{m+n}$

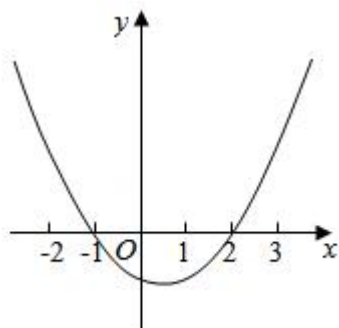
4.（4 分）已知点 M 是线段 AB 的中点，那么下列结论中，正确的是（ ）

- A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ C. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 0$

5.（4 分）将抛物线 $y=x^2$ 先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，再次平移后得到的抛物线的表达式为（ ）

- A. $y=(x-1)^2-2$ B. $y=(x+1)^2-2$
C. $y=(x-1)^2+2$ D. $y=(x+1)^2+2$

6.（4 分）如图所示是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分，那么下列说法中不正确的是（ ）



- A. $ac < 0$
B. 抛物线的对称轴为直线 $x=1$

C. $a - b + c = 0$

D. 点 $(-2, y_1)$ 和 $(2, y_2)$ 在抛物线上, 则 $y_1 > y_2$

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分)

7. (4 分) 如果 $2x = 3y$, 那么 $\frac{x+y}{y} =$ _____.

8. (4 分) 已知线段 $a = 2$ 厘米, $c = 8$ 厘米, 则线段 a 和 c 的比例中项 b 是 _____ 厘米.

9. (4 分) 如果线段 AB 的长为 2, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 那么较短的线段 AP = _____.

10. (4 分) 计算: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

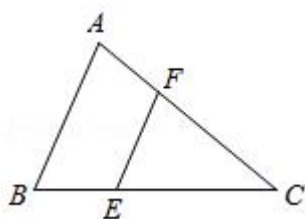
11. (4 分) 已知等腰梯形上底为 5, 高为 4, 底角的余弦值为 $\frac{3}{5}$, 那么其周长为 _____.

12. (4 分) 某厂七月份的产值是 10 万元, 设第三季度每个月产值的增长率相同, 都为 x ($x > 0$), 九月份的产值为 y 万元, 那么 y 关于 x 的函数解析式为 _____ (不求写定义域)

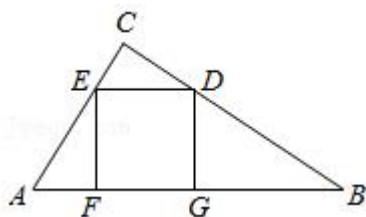
13. (4 分) 如果抛物线 $y = m(x+1)^2 + m$ (m 是常数) 的顶点坐标在第二象限, 那么它的开口方向 _____.

14. (4 分) 已知一条抛物线具有以下特征: (1) 经过原点; (2) 在 y 轴左侧的部分, 图象上升, 在 y 轴右侧的部分, 图象下降. 试写出一个符合要求的抛物线的表达式: _____.

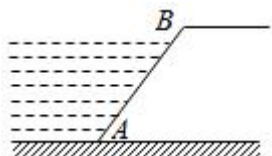
15. (4 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $EF \parallel AB$, $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$, 如果四边形 $ABEF$ 的面积为 25, 那么 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.



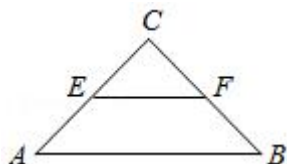
16. (4 分) 在一块直角三角形铁皮上截一块正方形铁皮, 如图, 已有的铁皮是 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, 要截得的正方形 $EFGD$ 的边 FG 在 AB 上, 顶点 E 、 D 分别在边 CA 、 CB 上, 如果 $AF = 4$, $GB = 9$, 那么正方形铁皮的边长为 _____.



17. (4分) 如图, 某堤坝的坝高为 12 米, 如果迎水坡的坡度为 1: 0.75, 那么该大坝迎水坡 AB 的长度为_____米.



18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 E 、 F 分别是边 CA 、 CB 的中点, 已知点 P 在线段 EF 上, 联结 AP , 将线段 AP 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 DP , 如果点 P 、 D 、 C 在同一直线上, 那么 $\tan \angle CAP =$ _____.



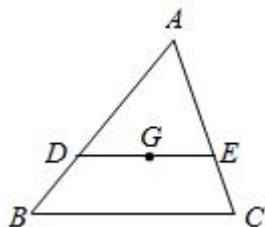
三、解答题 (本大题共 7 题, 共 10+10+10+10+12+12+14 = 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{1 - \cos^2 45^\circ}{\cot 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}$.

20. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, 且 DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心点 G , $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BE}$;

(2) 求作向量 $\frac{2}{3}(3\vec{a} - \vec{b})$ (不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量).



21. (10分) 已知二次函数 $y = ax^2 - ax$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $(-1, 2)$.

(1) 求该二次函数的解析式和顶点坐标;

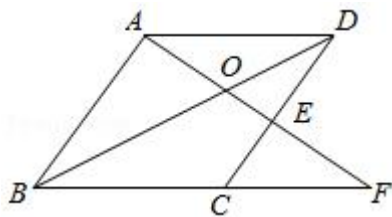
(2) 能否通过所求得的抛物线的平移得到抛物线 $y = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$? 如果能, 请说明怎样平

移，如果不能，请说明理由.

22. (10 分) 如图，点 O 是菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点，联结 AO 并延长，交 CD 于点 E ，交 BC 的延长线于点 F .

(1) 求证: $AB^2 = DE \cdot BF$;

(2) 如果 $OE = 1$, $EF = 2$, 求 $\frac{CF}{BF}$ 的值.



23. (12 分) 某校数学活动课上，开展测量学校教学大楼 (AB) 高度的实践活动，三个小组设计了不同方案，测量数据如表:

课 题	测量教学大楼 (AB) 的高度		
测 量 工 具	测量角度的仪器，皮尺等		
测 量 小 组	第一组	第二组	第三组
测 量 方 案 示 意 图			

说明	点 C 、 D 在点 B 的正东方向	GH 是教学大楼旁的居民住宅楼	EF 是教学大楼正南方向的“校训石”，借助 EF 进行测量，使 P 、 E 、 A 三点在一条直线上，点 P 、 F 在点 B 的正南方向.
测量数据	从点 C 处测得 A 点的仰角为 37° ，从点 D 处测得 A 点的仰角为 45° ， $CD = 12$ 米	从点 G 处测得 A 点的仰角为 37° ，测得 B 点的俯角为 45°	$EF = 9$ 米，从点 P 处测得 A 点的仰角为 37° ，从点 F 处测得 A 点的仰角为 45°

(1) 根据测量方案和所得数据，第_____小组的数据无法算出大楼高度？

(2) 请选择其中一个可行方案及其测量数据，求出教学大楼的高度.

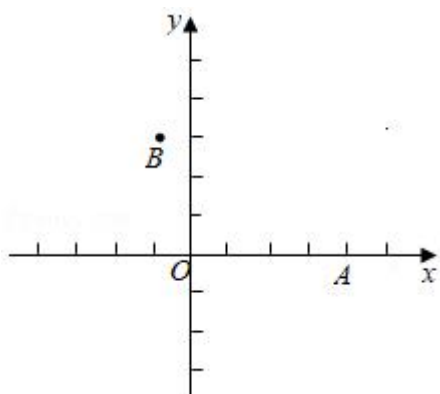
[参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$]

24. (12分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过 $A(4, 0)$ ， $B(-1, 3)$ 两点，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 C ，点 D 与点 B 关于抛物线的对称轴对称，联结 BC 、 BD .

(1) 求该抛物线的表达式以及对称轴；

(2) 点 E 在线段 BC 上，当 $\angle CED = \angle OBD$ 时，求点 E 的坐标；

(3) 点 M 在对称轴上，点 N 在抛物线上，当以点 O 、 A 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形时，求这个平行四边形的面积.

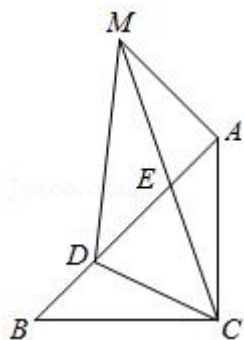


25. (14分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 D 、 E 在边 AB 上， $\angle DCE = 45^\circ$ ，过点 A 作 AB 的垂线交 CE 的延长线于点 M ，联结 MD .

(1) 求证： $CE^2 = BE \cdot DE$ ；

(2) 当 $AC = 3$ ， $AD = 2BD$ 时，求 DE 的长；

(3) 过点 M 作射线 CD 的垂线，垂足为点 F ，设 $\frac{BD}{BC} = x$ ， $\tan \angle FMD = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域。



2020-2021 学年上海市宝山区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，共 24 分）

1.（4 分）如果 C 是线段 AB 延长线上一点，且 $AC:BC=3:1$ ，那么 $AB:BC$ 等于（ ）

- A. 2:1 B. 1:2 C. 4:1 D. 1:4

【分析】设 $AC=3x$ ，则 $BC=x$ ， $AB=2x$ ，据此即可求解．

【解答】解：∵ $AC:BC=3:1$ ，

∴ 设 $AC=3x$ ，则 $BC=x$ ， $AB=2x$ ，

则 $AB:BC=2:1$ ．

故选：A．



【点评】本题考查了比例线段，正确设出线段的长度是关键．

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，那么 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

【分析】根据正弦的定义解答即可．

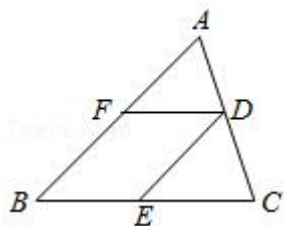
【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，

则 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ ，

故选：A．

【点评】本题考查的是锐角三角函数的定义，掌握锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦是解题的关键．

3.（4 分）如图， $AB \parallel DE$ ， $BC \parallel DF$ ，已知 $AF:FB=m:n$ ， $BC=a$ ，那么 CE 等于（ ）



- A. $\frac{am}{n}$ B. $\frac{an}{m}$ C. $\frac{am}{m+n}$ D. $\frac{an}{m+n}$

【分析】由平行线分线段成比例可求 $\frac{CD}{AC} = \frac{BF}{BF+AF} = \frac{n}{m+n}$ ，通过证明 $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ ，可

得 $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{AC}$ ，即可求解．

【解答】解： $\because DF \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{CD}{AD} = \frac{n}{m},$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{BF}{BF+AF} = \frac{n}{m+n},$$

$\because AB \parallel DE$ ，

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{BF}{BF+AF},$$

$$\therefore CE = \frac{na}{m+n},$$

故选：D．

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例，掌握相似三角形的性质是解题的关键．

4. (4分) 已知点 M 是线段 AB 的中点，那么下列结论中，正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 0$

【分析】根据点 M 是线段 AB 的中点，可以判断 $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}|$ ，但它们的方向相反，继而即可得出答案．

【解答】解：如图所示，点 M 是线段 AB 的中点，

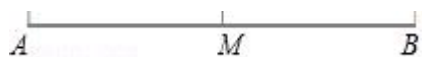
A、 $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$ ，故本选项不符合题意．

B、 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，故本选项符合题意．

C、 $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，故本选项不符合题意．

D、 $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ，故本选项不符合题意．

故选：B．



【点评】本题考查了平面向量的知识，注意向量包括长度及方向，及 0 与 $\vec{0}$ 的不同．

5. (4分) 将抛物线 $y = x^2$ 先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度, 再次平移后得到的抛物线的表达式为 ()

A. $y = (x - 1)^2 - 2$

B. $y = (x + 1)^2 - 2$

C. $y = (x - 1)^2 + 2$

D. $y = (x + 1)^2 + 2$

【分析】 先确定抛物线 $y = x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$, 再利用点平移的规律得到点 $(0, 0)$ 平移所得对应点的坐标为 $(1, 2)$, 然后根据顶点式写出新抛物线解析式.

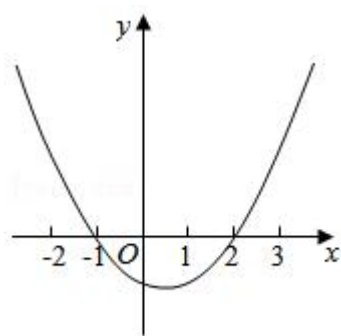
【解答】 解: 抛物线 $y = x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$, 点 $(0, 0)$ 先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度所得对应点的坐标为 $(1, 2)$,

所以新抛物线的解析式为 $y = (x - 1)^2 + 2$,

故选: C.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换: 由于抛物线平移后的形状不变, 故 a 不变, 所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法: 一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标, 利用待定系数法求出解析式; 二是只考虑平移后的顶点坐标, 即可求出解析式.

6. (4分) 如图所示是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分, 那么下列说法中不正确的是 ()



A. $ac < 0$

B. 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$

C. $a - b + c = 0$

D. 点 $(-2, y_1)$ 和 $(2, y_2)$ 在抛物线上, 则 $y_1 > y_2$

【分析】 根据抛物线的开口方向, 对称轴, 抛物线上的特殊点利用图象即可判断正误.

【解答】 解: A、 $\because$ 抛物线开口向上, 交 y 轴的负半轴,

$\therefore a > 0, c < 0,$

$\therefore ac < 0$, 故 A 正确;

B、 $\because$ 抛物线经过点 $(-1, 0)$ 和点 $(2, 0)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$, 故 B 不正确;

C、当 $x = 1$ 时, $y = a - b + c = 0$, 故 C 正确;

D、点 $(-2, y_1)$ 和 $(2, y_2)$ 在抛物线上,

$\because y_1 > 0, y_2 = 0$,

$\therefore y_1 > y_2$, 故 D 正确;

故选: B.

【点评】 此题主要考查了二次函数图象与系数的关系, 关键是熟练掌握①二次项系数 a 决定抛物线的开口方向, 当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口;

②一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置: 当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右. (简称: 左同右异)

③常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点, 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分)

7. (4 分) 如果 $2x = 3y$, 那么 $\frac{x+y}{y} = \underline{\frac{5}{2}}$.

【分析】 直接利用已知得出 $x = \frac{3}{2}y$, 进而代入得出答案.

【解答】 解: $\because 2x = 3y$,

$$\therefore x = \frac{3}{2}y,$$

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{\frac{3}{2}y+y}{y} = \frac{5}{2}.$$

故答案为: $\frac{5}{2}$.

【点评】 此题主要考查了比例的性质, 正确将已知变形是解题关键.

8. (4 分) 已知线段 $a = 2$ 厘米, $c = 8$ 厘米, 则线段 a 和 c 的比例中项 b 是 4 厘米.

【分析】 根据线段比例中项的概念, 可得 $a : b = b : c$, 可得 $b^2 = ac = 16$, 故 b 的值可求.

【解答】 解: $\because$ 线段 b 是 a 、 c 的比例中项,

$$\therefore b^2 = ac = 16,$$

解得 $b = \pm 4$,

又 $\because$ 线段是正数,

$$\therefore b = 4.$$

故答案为 4.

【点评】本题考查了比例中项的概念，注意：求两个数的比例中项的时候，应开平方. 求两条线段的比例中项的时候，负数应舍去.

9. (4 分) 如果线段 AB 的长为 2, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 那么较短的线段 $AP = \underline{3 - \sqrt{5}}$.

【分析】先由黄金分割点的定义求出 BP 的长, 即可得出 AP 的长.

【解答】解: $\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AB = 2$, $AP < BP$,

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore AP = AB - BP = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5},$$

故答案为: $3 - \sqrt{5}$.

【点评】本题考查了黄金分割: 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC ($AC > BC$), 且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项 (即 $AB:AC = AC:BC$), 叫做把线段 AB 黄金分割, 点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点.

10. (4 分) 计算: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \underline{5\vec{a} - 4\vec{b}}$.

【分析】实数的运算法则同样能应用于平面向量的计算.

【解答】解: 原式 $= 3 \times 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{a} - \vec{b} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$.

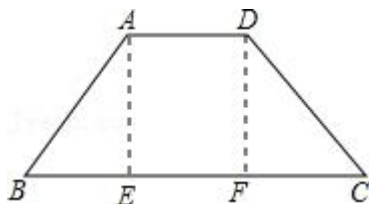
故答案是: $5\vec{a} - 4\vec{b}$.

【点评】本题主要考查了平面向量的知识, 属于基础计算题.

11. (4 分) 已知等腰梯形上底为 5, 高为 4, 底角的余弦值为 $\frac{3}{5}$, 那么其周长为 26.

【分析】根据题意作出图形, 利用三角函数的知识求出 BE 、 CF 的值, 然后根据等腰梯形的性质解答即可.

【解答】解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ,



由题意得, $AE = DF = 4$, $\cos \angle B = \frac{3}{5}$, $AD = 5$,

设 $BE = 3x$, 则可得 $AB = 5x$, $AE = 4x$,

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore BE = 3, AB = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AB = CD = 5, BC = BE + EF + FC = 3 + 3 + 5 = 11,$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的周长} = 5 + 5 + 5 + 11 = 26,$$

故答案为: 26.

【点评】 此题考查了等腰梯形的性质, 解答本题的关键是掌握等腰梯形几个性质, 这是解答此类题目的关键, 同学们一定要熟记.

12. (4 分) 某厂七月份的产值是 10 万元, 设第三季度每个月产值的增长率相同, 都为 x ($x > 0$), 九月份的产值为 y 万元, 那么 y 关于 x 的函数解析式为 $y = 10(1+x)^2$. (不求写定义域)

【分析】 利用该厂九月份的产值 = 该厂七月份的产值 $\times (1 + \text{增长率})^2$, 即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 该厂七月份的产值是 10 万元, 且第三季度每个月产值的增长率相同, 均为 x ,

$$\therefore \text{该厂九月份的产值是 } 10(1+x)^2 \text{ 万元},$$

$$\therefore y = 10(1+x)^2.$$

故答案为: $y = 10(1+x)^2$.

【点评】 本题考查了由根据实际问题列二次函数关系式, 根据各数量之间的关系, 正确列出二次函数关系式是解题的关键.

13. (4 分) 如果抛物线 $y = m(x+1)^2 + m$ (m 是常数) 的顶点坐标在第二象限, 那么它的开口方向 向上.

【分析】 根据二次函数性质, 通过顶点坐标即可求解.

【解答】 解: 由抛物线 $y = m(x+1)^2 + m$ (m 是常数) 可知顶点为 $(-1, m)$,

$\therefore$ 顶点坐标在第二象限,

$$\therefore m > 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向上,

故答案为: 向上.

【点评】 本题考查的是二次函数顶点式表达式, 是中等难度的基本题.

14. (4 分) 已知一条抛物线具有以下特征: (1) 经过原点; (2) 在 y 轴左侧的部分, 图象上升, 在 y 轴右侧的部分, 图象下降. 试写出一个符合要求的抛物线的表达式: $y = -x^2$

x^2 (答案不唯一) .

【分析】根据条件(1)知 $c=0$ ，根据特征(2)确定对称轴为 y 轴，图象开口向下，取 a 为负数， $b=0$.

【解答】解：设二次函数的解析式是 $y=ax^2+bx+c$ ，

$\because$ 经过原点，

$\therefore c=0$ ，

$\because$ 在 y 轴左侧的部分，图象上升，在 y 轴右侧的部分，图象下降，

$\therefore a < 0$ ， $-\frac{b}{2a}=0$ ，

即： $b=0$ ，

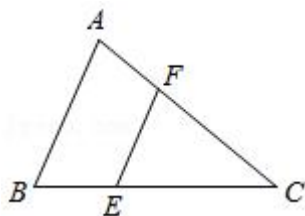
只要满足 $a < 0$ ， $b=0$ ， $c=0$ 就行，如： $a=-1$ ，

所以二次函数的解析式是 $y=-x^2$.

故答案为： $y=-x^2$.

【点评】此题是一个开放型的题目，主要考查了对二次函数的性质的理解和掌握，理解条件(1)(2)，进一步正确确定 a ， b ， c 的值是解此题的关键 .

15. (4分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $EF \parallel AB$ ， $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ ，如果四边形 $ABEF$ 的面积为 25，那么 $\triangle ABC$ 的面积为 45 .



【分析】通过证明 $\triangle EFC \sim \triangle BAC$ ，可得 $\frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BAC}} = (\frac{FC}{AC})^2 = \frac{4}{9}$ ，即可求解 .

【解答】解： $\because \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{2}{3}$ ，

$\because EF \parallel AB$ ，

$\therefore \triangle EFC \sim \triangle BAC$ ，

$\therefore \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BAC}} = (\frac{FC}{AC})^2 = \frac{4}{9}$ ，

$\therefore$ 设 $S_{\triangle EFC} = 4x$, $S_{\triangle ABC} = 9x$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 的面积 $5x = 25$,

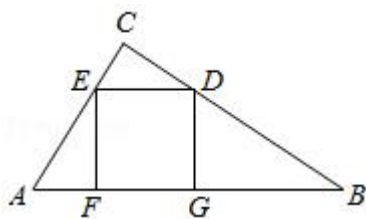
$\therefore x = 5$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $= 45$,

故答案为: 45.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 掌握相似三角形的性质是解题的关键.

16. (4分) 在一块直角三角形铁皮上截一块正方形铁皮, 如图, 已有的铁皮是 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, 要截得的正方形 $EFGD$ 的边 FG 在 AB 上, 顶点 E 、 D 分别在边 CA 、 CB 上, 如果 $AF = 4$, $GB = 9$, 那么正方形铁皮的边长为 6.



【分析】 首先根据题意判定 $\triangle AEF \sim \triangle DBG$, 然后结合相似三角形的对应边成比例求得答案.

【解答】 解: 根据题意知, $\angle AFE = \angle BDG = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle BDG$ (同角的余角相等).

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DBG$,

$$\therefore \frac{AF}{DG} = \frac{EF}{BG}.$$

又 $\because EF = DG$, $AF = 4$, $GB = 9$,

$$\therefore \frac{4}{EF} = \frac{EF}{9}.$$

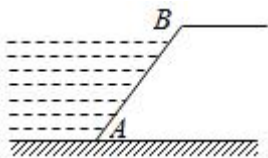
$\therefore EF = 6$.

即正方形铁皮的边长为 6.

故答案是: 6.

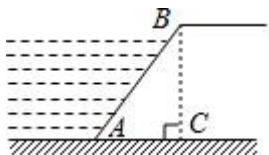
【点评】 此题主要考查了正方形的性质和相似三角形的应用, 关键是掌握相似三角形对应边成比例.

17. (4分) 如图, 某堤坝的坝高为 12 米, 如果迎水坡的坡度为 1: 0.75, 那么该大坝迎水坡 AB 的长度为 15 米.



【分析】根据坡度是坡面的铅直高度和水平宽度的比，再根据勾股定理即可求出该大坝迎水坡 AB 的长度．

【解答】解：如图，过点 B 作 BC 垂直于水平面于点 C ，



$$\because BC:AC=1:0.75,$$

$$\therefore 12:AC=1:0.75,$$

$$\therefore AC=9 \text{ (米)},$$

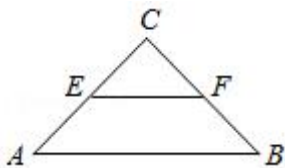
$$\therefore AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15 \text{ (米)},$$

答：该大坝迎水坡 AB 的长度为 15 米．

故答案为：15．

【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，解决本题的关键是掌握坡度坡角定义．

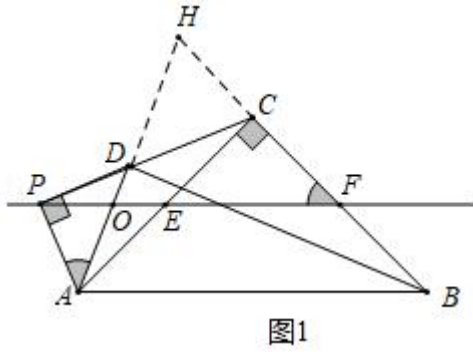
18. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ，点 E 、 F 分别是边 CA 、 CB 的中点，已知点 P 在线段 EF 上，联结 AP ，将线段 AP 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 DP ，如果点 P 、 D 、 C 在同一直线上，那么 $\tan \angle CAP = \underline{\sqrt{2}-1}$ ．



【分析】分两种情形：①当点 D 在线段 PC 上时，延长 AD 交 BC 的延长线于 H ．证明 $AD=DC$ 即可解决问题．

②当点 P 在线段 CD 上时，同法可证： $DA=DC$ 解决问题．

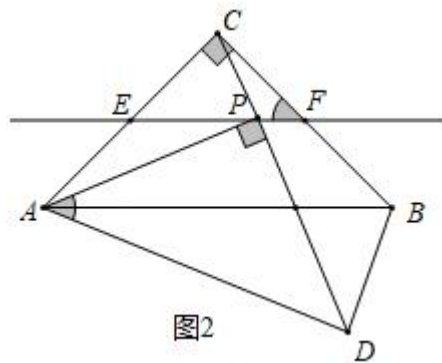
【解答】解：如图 1，当点 D 在线段 PC 上时，延长 AD 交 BC 的延长线于 H ．


$$\because CE = EA, \quad CF = FB,$$
$$\therefore EF \parallel AB,$$
$$\therefore \angle EFC = \angle ABC = 45^\circ,$$
$$\because \angle PAO = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle PAO = \angle OFH,$$
$$\therefore \angle POA = \angle FOH,$$
$$\therefore \angle H = \angle APO,$$
$$\because \angle APC = 90^\circ, \quad EA = EC,$$
$$\therefore PE = EA = EC,$$
$$\therefore \angle EPA = \angle EAP = \angle BAH,$$
$$\therefore \angle H = \angle BAH,$$
$$\therefore BH = BA,$$
$$\because \angle ADP = \angle BDC = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ \quad ,$$
$$\therefore BD \perp AH,$$
$$\therefore \angle DBA = \angle DBC = 22.5^\circ \quad ,$$
$$\because \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore A, D, C, B$ 四点共圆,

$$\angle DAC = \angle DBC = 22.5^\circ, \quad \angle DCA = \angle ABD = 22.5^\circ,$$
$$\therefore \angle DAC = \angle DCA = 22.5^\circ \quad ,$$
$$\therefore DA = DC,$$
$$\text{设 } AD = a, \text{ 则 } DC = AD = a, PD = \frac{\sqrt{2}}{2}a = AP \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a + \frac{\sqrt{2}}{2}a},}$$

如图 2 中, 当点 P 在线段 CD 上时, 同法可证: $DA = DC$, 设 $AD = a$, 则 $CD = AD = a$,
 $PD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,



$$\therefore \tan \angle CAP = \frac{CP}{AP} = \frac{a - \frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{2} - 1,$$

$\therefore$ 情形 1, 不满足条件, 情形 2 满足条件,

【点评】本题考查了旋转变换，等边三角形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

三、解答题（本大题共 7 题，共 $10+10+10+10+12+12+14=78$ 分）

【分析】把特殊角的三角函数值代入原式, 根据二次根式的混合运算法则计算即可.

【解答】 解：原式 = $\frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}$

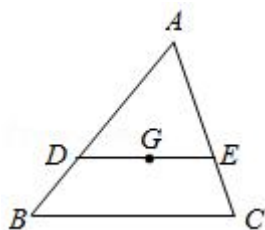
$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3} + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \times (\sqrt{3} - \frac{1}{2})}{(\sqrt{3} + \frac{1}{2})(\sqrt{3} - \frac{1}{2})} \\
&= \frac{2\sqrt{3} - 1}{11}.
\end{aligned}$$

【点评】 本题考查的是特殊角的三角函数值，熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, 且 DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心点 G , $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BE}$;

(2) 求作向量 $\frac{2}{3}(3\vec{a} - \vec{b})$ (不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量).



【分析】 (1) 利用三角形重心的性质, 求出 $\overrightarrow{DE}$, 再利用三角形法则求解即可.

(2) 证明 $\overrightarrow{EA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}(3\vec{a} - \vec{b})$, 可得结论.

【解答】 解: (1) 连接 BE .

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, $DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{2}{3},$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

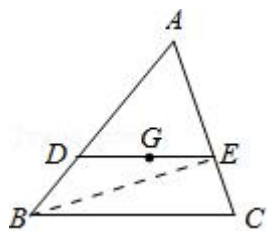
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

(2) $\because \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BA} = 3\vec{a}$,

$$\therefore \overrightarrow{CA} = 3\vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EA} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3} (3\vec{a} - \vec{b}),$$

$\therefore$ 如图 $\overrightarrow{EA}$ 即为所求作.



【点评】 本题考查三角形的重心，平面向量，作图 - 复杂作图等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

21. (10 分) 已知二次函数 $y = ax^2 - ax$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $(-1, 2)$.

(1) 求该二次函数的解析式和顶点坐标;

(2) 能否通过所求得的抛物线的平移得到抛物线 $y = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$? 如果能, 请说明怎样平移, 如果不能, 请说明理由.

【分析】 (1) 利用待定系数法确定函数解析式, 然后将解析式转化为顶点式, 直接写出顶点坐标;

(2) 根据抛物线间顶点坐标的变化规律解答.

【解答】 解: (1) 把点 $(-1, 2)$ 代入 $y = ax^2 - ax$ ($a \neq 0$), 得 $a + a = 2$.
解得 $a = 1$.

故该抛物线解析式是: $y = x^2 - x$.

由 $y = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ 知, 该抛物线的顶点坐标是 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$;

(2) 可以, 理由如下:

由 $y = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, 得 $y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{4}$.

则平移后抛物线顶点坐标是 $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$.

而抛物线 $y = x^2 - x$ 的顶点坐标是 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$,

所以将抛物线 $y = x^2 - x$ 先向左平移 2 个单位长度, 再向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度即可得到抛物线 $y = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$.

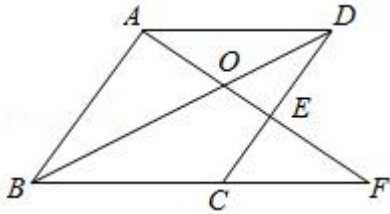
【点评】 本题考查了待定系数法确定函数解析式, 二次函数的性质以及二次函数图象与

几何变换，掌握平移的原则上“加下减左加右减”是解题的关键。

22. (10分) 如图，点 O 是菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点，联结 AO 并延长，交 CD 于点 E ，交 BC 的延长线于点 F 。

(1) 求证： $AB^2 = DE \cdot BF$ ；

(2) 如果 $OE = 1$ ， $EF = 2$ ，求 $\frac{CF}{BF}$ 的值。



【分析】 (1) 通过证明 $\triangle CEF \sim \triangle BAF$ ， $\triangle ADE \sim \triangle FCE$ ，可得 $\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{BF}$ ， $\frac{AD}{CF} = \frac{DE}{CE}$ ，可得结论；

(2) 利用相似三角形的性质可得 $\frac{2}{AO+3} = \frac{3-AO}{3}$ ，可求 $AO = \sqrt{3}$ ，即可求解。

【解答】 证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = AD = BC = CD, AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle BAF, \triangle ADE \sim \triangle FCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{CF}{BF}, \frac{AD}{CF} = \frac{DE}{CE},$$

$$\therefore \frac{CE}{CF} = \frac{AB}{BF} = \frac{DE}{AD},$$

$$\therefore AB^2 = DE \cdot BF;$$

(2) $\because \triangle CEF \sim \triangle BAF, \triangle ADE \sim \triangle FCE,$

$$\therefore \frac{FC}{BF} = \frac{EF}{AF} = \frac{2}{AO+3}, \frac{AD}{BF} = \frac{AO}{OF},$$

$$\therefore 1 - \frac{AD}{BF} = 1 - \frac{AO}{OF},$$

$$\therefore \frac{CF}{BF} = \frac{3-AO}{3},$$

$$\therefore \frac{2}{AO+3} = \frac{3-AO}{3},$$

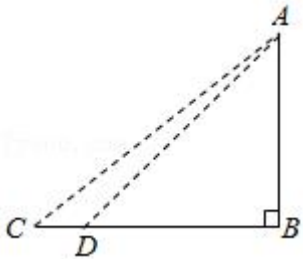
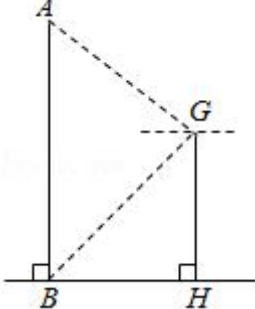
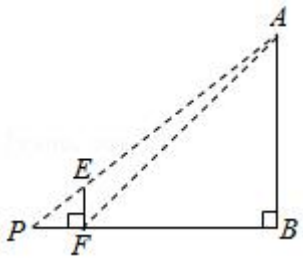
$$\therefore AO = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{FC}{BF} = \frac{2}{\sqrt{3}+3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，熟练运用相似三角形的性质是解题的关

键.

23. (12 分) 某校数学活动课上, 开展测量学校教学大楼 (AB) 高度的实践活动, 三个小组设计了不同方案, 测量数据如表:

课 题	测量教学大楼 (AB) 的高度		
测 量 工 具	测量角度的仪器, 皮尺等		
测 量 小 组	第一组	第二组	第三组
测 量 方 案 示 意 图			
说 明	点 C 、 D 在点 B 的正东方向	GH 是教学大楼旁的居民住宅楼	EF 是教学大楼正南方向的“校训石”, 借助 EF 进行测量, 使 P 、 E 、 A 三点在一条直线上, 点 P 、 F 在点 B 的正南方向.
测 量 数 据	从点 C 处测得 A 点的仰角为 37° , 从点 D 处测得 A 点的仰角为 45° , $CD = 12$ 米	从点 G 处测得 A 点的仰角为 37° , 测得 B 点的俯角为 45°	$EF = 9$ 米, 从点 P 处测得 A 点的仰角为 37° , 从点 F 处测得 A 点的仰角为 45°

据			
---	--	--	--

(1) 根据测量方案和所得数据, 第 二 小组的数据无法算出大楼高度?

(2) 请选择其中一个可行方案及其测量数据, 求出教学大楼的高度.

[参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$]

【分析】(1) 第二小组没有测量有关的线段长度;

(2) 先证 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形, 得 $AB = BD$, 设 $AB = x$ 米, 则 $AB = BD = x$ 米, $BC = (x+12)$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由锐角三角函数定义得出方程, 解方程即可.

【解答】解: (1) 第二小组的数据无法算出大楼高度, 理由如下:

第二小组只测量了有关仰角和俯角的度数, 没有测量有关的线段长度,

所以第二小组的数据无法算出大楼高度,

故答案为: 二;

(2) 选择第一小组的数据测量, 理由如下:

由题意得: $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle ACB = 37^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AB = BD$,

设 $AB = x$ 米, 则 $AB = BD = x$ 米, $BC = BD + CD = (x+12)$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \tan 37^\circ \approx 0.75$,

$$\therefore \frac{x}{x+12} \approx \frac{3}{4},$$

解得: $x \approx 36$,

即教学大楼 AB 的高度约为 36 米.

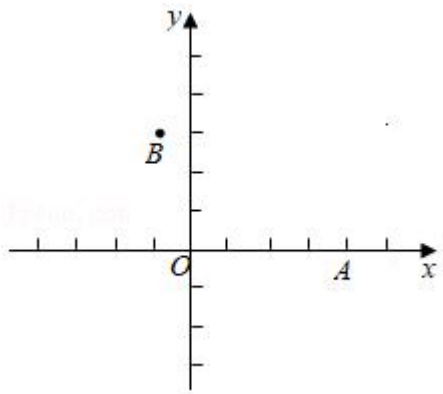
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 等腰直角三角形的判定与性质, 解决本题的关键是熟练掌握仰角俯角定义.

24. (12 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过 $A(4, 0)$, $B(-1, 3)$ 两点, 抛物线的对称轴与 x 轴交于点 C , 点 D 与点 B 关于抛物线的对称轴对称, 联结 BC 、 BD .

(1) 求该抛物线的表达式以及对称轴;

(2) 点 E 在线段 BC 上, 当 $\angle CED = \angle OBD$ 时, 求点 E 的坐标;

(3) 点 M 在对称轴上, 点 N 在抛物线上, 当以点 O 、 A 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形时, 求这个平行四边形的面积.



【分析】（1）待定系数法可求解析式；

（2）先求出 BC 的解析式，通过证明 $\triangle OBC \sim \triangle EDB$ ，可得 $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{OC}$ ，可求 BE 的长，由两点距离公式可求解；

（3）分两种情况讨论，由平行四边形的性质可求解．

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过 $A(4, 0)$, $B(-1, 3)$ 两点，

$$\therefore \begin{cases} 0 = 16a + 4b \\ 3 = a - b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = -\frac{12}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}x,$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 2$;

（2） $\because$ 点 D 与点 B 关于抛物线的对称轴对称，

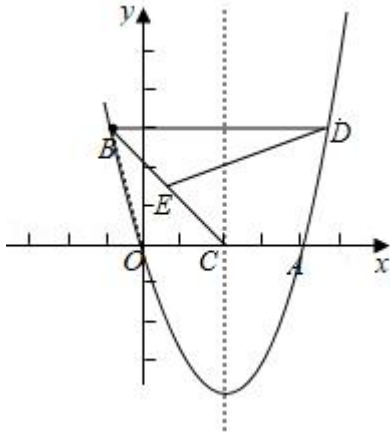
$\therefore$ 点 $D(5, 3)$,

$\therefore BD = 6$,

$\because$ 点 $C(2, 0)$, 点 $B(-1, 3)$,

$\therefore BC = 3\sqrt{2}$, 直线 BC 解析式为 $y = -x + 2$,

如图，连接 BO ,



$$\because BD \parallel OC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle BCO,$$

$$\because \angle CED = \angle OBD, \angle CED = \angle EBD + \angle BDE, \angle OBD = \angle OBC + \angle DBE,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle BDE,$$

$$\therefore \triangle OBC \sim \triangle EDB,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{OC},$$

$$\therefore \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{BE}{2},$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{2},$$

$$\text{设点 } E(x, -x+2),$$

$$\therefore 2\sqrt{2} = \sqrt{(x+1)^2 + (-x+2-3)^2},$$

$$\therefore x = 1 \text{ 或 } x = -3 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{点 } E(1, 1);$$

(3) 当 OA 为边时,

$\because$ 以点 O 、 A 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形,

$$\therefore OA = MN = 4, OA \parallel MN,$$

$\therefore$ 点 N 横坐标为 6 或 -2,

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的纵坐标为 } \frac{36}{5},$$

$$\therefore \text{平行四边形的面积} = 4 \times \frac{36}{5} = \frac{144}{5},$$

当 OA 为对角线,

$\because$ 以点 O 、 A 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形,

$\therefore MN$ 与 OA 互相平分,

$$\therefore \frac{4+0}{2} = \frac{2+N_x}{2},$$

$$\therefore N_x = 2,$$

$$\therefore \text{点 } N(2, -\frac{12}{5}),$$

$$\therefore \text{平行四边形的面积} = 4 \times \frac{12}{5} = \frac{48}{5},$$

综上所述：平行四边形的面积为 $\frac{48}{5}$ 或 $\frac{144}{5}$.

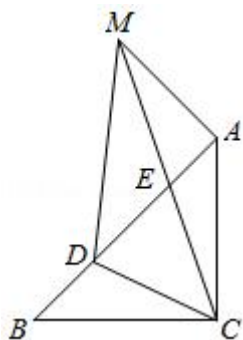
【点评】 本题是二次函数综合题，考查了待定系数法求解析式，二次函数的性质，相似三角形的判定和性质，平行四边形的性质，两点距离公式等知识，灵活运用这些知识解决问题是解题的关键.

25. (14分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 D 、 E 在边 AB 上， $\angle DCE = 45^\circ$ ，过点 A 作 AB 的垂线交 CE 的延长线于点 M ，联结 MD .

(1) 求证： $CE^2 = BE \cdot DE$;

(2) 当 $AC = 3$ ， $AD = 2BD$ 时，求 DE 的长;

(3) 过点 M 作射线 CD 的垂线，垂足为点 F ，设 $\frac{BD}{BC} = x$ ， $\tan \angle FMD = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域.



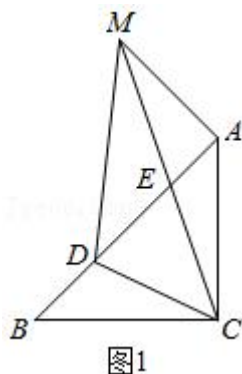
【分析】 (1) 证明两个角相等证明 $\triangle CDE \sim \triangle BCE$ ，列比例式可得结论;

(2) 如图 2，过 D 作 $DN \perp AC$ 于 N ，根据 $\triangle ADN$ 是等腰直角三角形，得 $AN = DN$ ，由平行线分线段成比例定理得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ ，计算 DN 和 CN 的长，利用勾股定理计算 CD 和 BD 的长，根据 (1) 中的相似三角形，列比例式得： $\frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BE} = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，设 $DE = \sqrt{5}x$ ， $CE = 3x$ ，代入比例式可得结论;

(3) 如图 3，作辅助线构建全等三角形，证明 $\triangle AMC \cong \triangle BPC$ (ASA)，得 $CM = CP$ ，证明 $\triangle MCD \cong \triangle PCD$ (SAS)，得 $\angle MDC = \angle PDC = \angle BDC$ ，证明 $\triangle BCD \sim \triangle CMD$ ，列比

例式得 $\frac{BD}{BC} = \frac{CD}{CM}$ ，根据三角函数的定义和等量代换可得比例式，并根据 D, E 是 AB 上一点， $\angle DCE = 45^\circ$ ，可知当点 E 与 A 重合时， BD 最大为 $\frac{1}{2}AB$ ，可得 x 的取值范围。

【解答】（1）证明：如图 1， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，



$$\therefore \angle B = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\because \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCE,$$

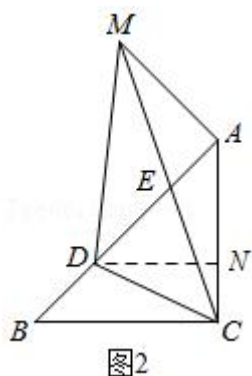
$$\because \angle CED = \angle CEB,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{DE}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = BE \cdot DE;$$

（2）解：如图 2，过 D 作 $DN \perp AC$ 于 N ，



$$\therefore \angle AND = 90^\circ,$$

$$\because \angle DAN = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ADN$ 是等腰直角三角形，

$$\because DN \parallel BC, AD = 2BD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\because AC = 3,$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{2}, AN = DN = 2, CN = 1,$$

$$\because AD = 2BD,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2},$$

$$\text{由勾股定理得: } DC = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

由(1)知: $\triangle CDE \sim \triangle BCE$,

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BE} = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{设 } DE = \sqrt{5}x, CE = 3x,$$

$$\therefore \frac{3x}{\sqrt{2} + \sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore DE = \sqrt{5}x = \frac{5\sqrt{2}}{4};$$

(3) 解: 如图3, 过点 C 作 $CP \perp CM$, 交 AB 的延长线于点 P ,

$$\because \angle DCE = 45^\circ, \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACM + \angle BCD = 45^\circ = \angle BCD + \angle BCP,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle ACM,$$

$$\because \angle CBP = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = \angle CAM, AC = BC,$$

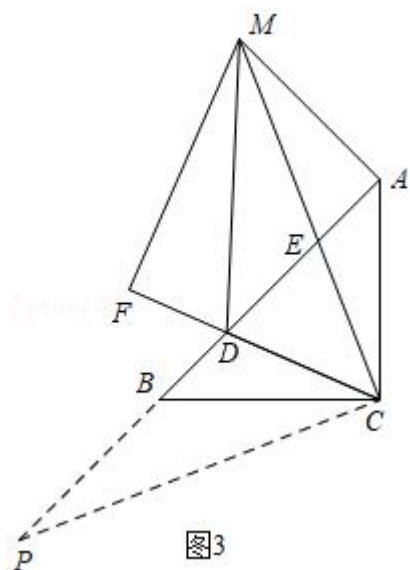


图3

$$\therefore \triangle AMC \cong \triangle BPC \text{ (ASA)},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore CM = CP, \\
&\because \angle DCM = \angle DCP = 45^\circ, \quad CD = CD, \\
&\therefore \triangle MCD \cong \triangle PCD \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle MDC = \angle PDC = \angle BDC, \\
&\because \angle ABC = 45^\circ = \angle MCD, \\
&\therefore \triangle BCD \sim \triangle CMD, \\
&\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{BC}{CM}, \text{ 即 } \frac{BD}{BC} = \frac{CD}{CM}, \\
&\because FM \perp FC, \quad \angle DCE = 45^\circ, \\
&\therefore \triangle CFM \text{ 是等腰直角三角形}, \\
&\therefore CM = \sqrt{2}FM, \\
&\therefore y = \tan \angle FMD \\
&= \frac{DF}{MF} = \frac{\sqrt{2}DF}{CM} \\
&= \frac{\sqrt{2}(CF - CD)}{CM} \\
&= \frac{\sqrt{2}CF - \sqrt{2}CD}{CM} \\
&= 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{BD}{BC} \\
&= 1 - \sqrt{2}x; \\
&\text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = BC, \\
&\therefore AB = \sqrt{2}BC, \\
&\because D, E \text{ 是 } AB \text{ 上一点, } \angle DCE = 45^\circ, \\
&\therefore \text{当点 } E \text{ 与 } A \text{ 重合时, } BD \text{ 最大为 } \frac{1}{2}AB, \\
&\therefore \frac{BD}{BC} = x, \\
&\therefore 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore y = 1 - \sqrt{2}x \quad (0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}).
\end{aligned}$$

【点评】 本题是相似形的综合题，考查了全等和相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，三角函数的定义等知识，添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键。