

2020 学年奉贤区质量调研九年级数学 (202101)

一、选择题

1. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移1个单位后得到的抛物线表达式是 ()

A. $y = 2x^2 - 1$

B. $y = 2x^2 + 1$

C. $y = 2(x+1)^2$

D. $y = 2(x-1)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据抛物线平移的规律“上加下减，左加右减”即可选择.

【详解】原抛物线向左平移1个单位后得:

$$y = 2(x+1)^2.$$

故选 C.

【点睛】本题考查抛物线平移与抛物线解析式的变化规律. 掌握其规律“上加下减，左加右减”是解答本题的关键.

2. 下列两个图形一定相似的是 ()

A. 两个菱形

B. 两个正方形

C. 两个矩形

D. 两个梯形

【答案】B

【解析】

【分析】

对应边成比例，对应角相等的两个四边形相似，根据定义逐一判断各选项即可得到答案.

【详解】解：两个菱形满足对应边成比例，但是对应角不一定相等，所以两个菱形不一定相似，故 A 不符合题意；

两个正方形满足对应边成比例，对应角相等，所以两个正方形一定相似，故 B 符合题意；

两个矩形满足对应角相等，但是对应边不一定成比例，故 C 不符合题意；

两个梯形的对应边不一定成比例，对应角也不一定相等，故 D 不符题意；

故选：B.

【点睛】本题考查的是四边形相似的判定，掌握多边形相似的判定是解题的关键.

3. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 都是非零向量，下列结论中不能确定 $\vec{a} // \vec{b}$ 的是 ()

- A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ B. $2\vec{a} = 3\vec{b}$ C. $\vec{a} // \vec{c}, \vec{c} // \vec{b}$ D. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{b} = 3\vec{c}$

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据方向相同或相反的非零向量叫做平行向量，对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】

解： A、该等式只能表示 $\vec{a}, \vec{b}$ 的模相等，但不一定平行，故本选项符合题意；

B、由 $2\vec{a} = 3\vec{b}$ ，可以判定 $\vec{a} // \vec{b}$ ，故本选项不符合要求；

C、由 $\vec{a} // \vec{c}, \vec{b} // \vec{c}$ 可以判定 $\vec{a} // \vec{b}$ ，故本选项不符合题意；

D、由 $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{b} = 3\vec{c}$ ，可知 $\vec{b} = 6\vec{a}$ ，可以判定 $\vec{a} // \vec{b}$ ，故本选项不符合题意；

故选： A.

【点睛】 本题主要考查了平行向量，掌握平行向量是解题的关键.

4. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， 如果 $AC = 3, \cos A = \frac{3}{4}$ ， 那么 AB 的长为 ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. 4 C. 5 D. $\frac{25}{4}$

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ ， 即可得出 AB 的值

【详解】 解： 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ，

$$\text{又} \because \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AB = 4$$

故选： B.

【点睛】 本题考查锐角三角函数的定义，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

5. 如果 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内含， 圆心距 $O_1O_2 = 4$ ， $\odot O_1$ 的半径长是 6， 那么 $\odot O_2$ 的半径 r 的取值范围是 ().

- A. $0 < r < 2$ B. $2 < r < 4$ C. $r > 10$ D. $0 < r < 2$ 或 $r > 10$

【答案】 D

【解析】

【分析】

根据题意得 $0 \leq O_1O_2 < |6-r|$ ，结合 $O_1O_2 = 4$ ，通过求解不等式，即可得到答案.

【详解】根据题意得： $0 \leq O_1O_2 < |6-r|$ ， $r > 0$

$$\therefore O_1O_2 = 4$$

$$\therefore 4 < |6-r|$$

$$\therefore 6-r > 4 \text{ 或 } 6-r < -4$$

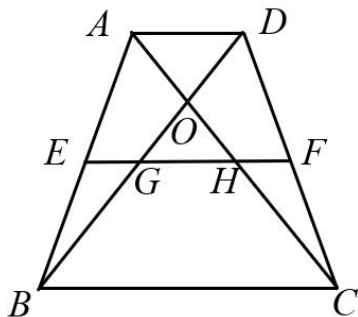
$$\therefore 0 < r < 2 \text{ 或 } r > 10$$

$$\therefore \odot O_2 \text{ 的半径 } r \text{ 的取值范围是： } 0 < r < 2 \text{ 或 } r > 10$$

故选：D.

【点睛】本题考查圆与圆内含、绝对值、一元一次不等式的知识；解题的关键是熟练掌握圆与圆内含、绝对值、一元一次不等式的性质，从而完成求解.

6. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$, $BC = 3AD$ ， 对角线 AC 、 BD 交于点 O , EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线， EF 与 BD 、 AC 分别交于点 G 、 H ， 如果 $\triangle OGH$ 的面积为1， 那么梯形 $ABCD$ 的面积为（ ）



A. 12

B. 14

C. 16

D. 18

【答案】C

【解析】

【分析】

设 $AD=2x$, $BC=6x$, 根据 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线, 求得 $EG=FH=\frac{1}{2}AD=x$, $GF=\frac{1}{2}BC=3x$, 证得 $GH=AD$,

由此得到 $S_{\triangle OGH} = S_{\triangle AOD} = 1$, $S_{\triangle BOC} = 3S_{\triangle OGH} = 9$, $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC} = 3S_{\triangle AOD} = 3$, 即可求出答案.

【详解】设 $AD=2x$, $BC=6x$,

∵ EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

∴ 点 E、F、G、H 分别为 AB、CD、BD、AC 的中点, $EF \parallel AD \parallel BC$,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4x,$$

$$\therefore EG = FH = \frac{1}{2}AD = x, \quad GF = \frac{1}{2}BC = 3x,$$

$$\therefore GH = 2x,$$

$$\therefore GH = AD,$$

$$\therefore GH \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle OAD \sim \triangle OHG,$$

$$\therefore \frac{OD}{OG} = \frac{AD}{GH} = 1,$$

$$\therefore OG = OD, \quad S_{\triangle OGH} = S_{\triangle AOD} = 1,$$

$$\therefore GH \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle OGH \sim \triangle OBC,$$

$$\therefore \frac{GH}{BC} = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

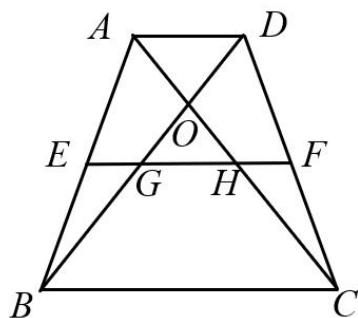
$$\therefore S_{\triangle BOC} = 9S_{\triangle OGH} = 9,$$

$$\therefore O \text{ 是 } DG \text{ 的中点, } G \text{ 是 } BD \text{ 的中点,}$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC} = 3S_{\triangle AOD} = 3,$$

$$\therefore S_{ABCD} = 1 + 3 + 3 + 9 = 16,$$

故选: C.



【点睛】此题考查梯形中位线的性质定理, 三角形中位线的性质定理, 同底或同高三角形面积的关系, 相似三角形的性质, 这是一道与中位线相关的综合题.

二、填空题

7. 如果 $2a = 5b$ ($b \neq 0$), 那么 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

利用比例的基本性质可得答案.

【详解】解: $\because 2a = 5b$ ($b \neq 0$),

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{2}.$$

故答案为: $\frac{5}{2}$

【点睛】 本题考查的是比例的基本性质, 掌握基本性质是解题的关键.

8. 如果 4 是 a 与 8 的比例中项, 那么 a 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】

根据比例中项的概念: 如果 a 、 b 、 c 三个量成连比例, 即 $a:b = b:c$, b 叫作 a 和 c 的比例中项, 即可求解.

【详解】 $\because$ 4 是 a 与 8 的比例中项,

$$\therefore a:4 = 4:8,$$

$$\text{即 } 4^2 = 8a,$$

$$\therefore a = 2.$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查了比例中项的概念, 熟练掌握比例中项的概念是解题的关键.

9. 如果二次函数 $y = mx^2 + 2x + m - 1$ 的图像经过点 $P(1, 2)$, 那么 m 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

把 $P(1, 2)$ 代入函数解析式, 得出关于 m 方程, 解方程即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 二次函数 $y = mx^2 + 2x + m - 1$ 的图象经过点 $P(1, 2)$,

$$\therefore m+2+m-1=2,$$

$$\text{解得: } m = \frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数图象的性质，理解图象上点坐标的意义是解答此题的关键.

10. 如果二次函数 $y = (x-1)^2$ 的图像上有两点 $(2, y_1)$ 和 $(4, y_2)$ ，那么 y_1 _____ y_2 (填“>”、“=”或“<”)

【答案】 <

【解析】

【分析】

分别计算出自变量为 2 和 4 时所对应的函数值，然后比较函数值对的大小即可.

【详解】 解: $\because$ 点 $(2, y_1)$ 、 $(4, y_2)$ 是二次函数 $y = (x-1)^2$ 图象上的两点,

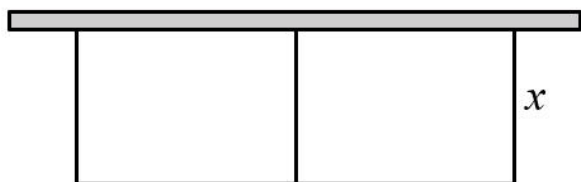
$$\therefore y_1 = (2-1)^2 = 1; \quad y_2 = (4-1)^2 = 3^2 = 9,$$

$$\therefore y_1 < y_2,$$

故答案为 $y_1 < y_2$.

【点睛】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

11. 如图，用一段篱笆靠墙围成一个大长方形花圃(靠墙处不用篱笆)，中间用篱笆隔开分成两个小长方形区域，分别种植两种花草，篱笆总长为 17 米(恰好用完)，围成的大长方形花圃的面积为 24 平方米，设垂直于墙的一段篱笆长为 x 米，可列出方程为_____.



$$\text{【答案】 } x(17-3x) = 24$$

【解析】

【分析】

垂直于墙的一段篱笆长为 x 米，共有三段垂直于墙的篱笆，所以垂直于墙的篱笆总长度为 $3x$ ，又因为篱笆总长为 17 米(恰好用完)，所以大长方形花圃的长为 $(17-3x)$ 米，最后根据长方形的面积公式即可求解.

$$\text{【详解】 解: 由题意可得: } x(17-3x) = 24.$$

故答案为: $x(17-3x)=24$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用, 解题的关键是注意大长方形花圃的宽有三段都是篱笆.

12. 如果两个相似三角形的周长之比为 $1:4$, 那么这两个三角形对应边上的高之比为

_____.

【答案】 $1:4$

【解析】

【分析】

根据相似三角形的性质求出相似比, 得到对应边上的高之比.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的周长比为 $1:4$,

$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 $1:4$,

$\therefore$ 这两个三角形对应边上的高之比为 $1:4$,

故答案为: $1:4$.

【点睛】 本题考查的是相似三角形的性质, 熟知相似三角形对应高的比等于相似比是解答此题的关键.

13. 已知点 P 是线段 AB 上一点, 且 $BP^2 = AP \cdot AB$, 如果 $AP = 2$ 厘米, 那么 $BP =$ _____ (厘米).

【答案】 $1+\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

设 $BP = x$ 厘米, 得 $AB = 2 + x$ 厘米, 根据题意得 $x^2 = 2 \times (2 + x)$, 通过求解方程, 即可得到答案.

【详解】 设 $BP = x$ 厘米,

根据题意得: $AB = AP + BP = 2 + x$ 厘米

$\because BP^2 = AP \cdot AB$

$\therefore x^2 = 2 \times (2 + x)$

$\therefore x = 1 \pm \sqrt{5}$

$1 - \sqrt{5} < 0$, 故舍去;

$\therefore x = 1 + \sqrt{5}$, 即 $BP = 1 + \sqrt{5}$ 厘米

故答案为: $1 + \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程、二次根式、线段的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

14. 已知某斜坡的坡度1:3,当铅垂高度为3米时, 水平宽度为_____米

【答案】 9

【解析】

【分析】

根据斜坡是铅垂高度与水平距离的比值, 而这个斜坡的坡度为 1:3, 铅垂高度为 3 米, 从而求出斜坡的水平宽度.

【详解】 解: $\because$ 斜坡的坡度为 1:3, 其铅垂高度为 3 米,

$\therefore$ 这个斜坡的水平宽度为: $3 \times 3 = 9$ 米,

故答案为: 9.

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用中的坡度坡角问题, 解题的关键是明确坡度是指斜坡的铅直高度与水平距离的比值.

15. 如果点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $AG = 6$, 那么 BC 边上的中线长为_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】

根据三角形的重心到一顶点的距离等于到对边中点距离的 2 倍求得 $DG=3$, 继而求得 BC 边上的中线长为 9.

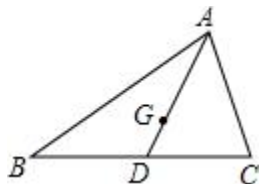
【详解】 $\because$ 三角形的重心到顶点的距离是其到对边中点的距离的 2 倍,

$$\therefore DG = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore AD = AG + GD = 6 + 3 = 9.$$

即 BC 边上的中线长为 9.

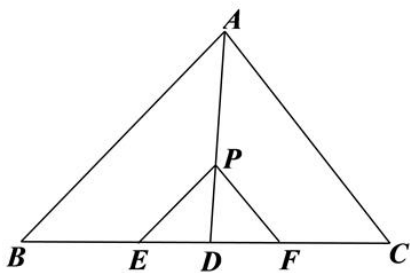
故答案为: 9.



【点睛】 本题考查的是三角形重心的性质, 熟知三角形的重心到顶点的距离是其到对边中点的距离的 2 倍是解决问题的关键.

16. 如图, 已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 联结 AD , P 为 AD 上一点, 过点 P 分别作 AB 、 AC 的平行线交

BC 于点 E, F , 如果 $BC = 3EF$, 那么 $\frac{AP}{PD} =$ _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】

根据平行线分线段成比例性质可得 $\frac{PD}{AD} = \frac{DE}{BD} = \frac{DF}{CD}$, 再由等比性质可得 $\frac{PD}{AD} = \frac{1}{3}$, 即可得出 $\frac{AP}{PD} = 2$.

【详解】 解: $\because PE \parallel AB, PF \parallel AC$,

$$\therefore \frac{PD}{AD} = \frac{DE}{BD}, \quad \frac{PD}{AD} = \frac{DF}{CD}.$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{DF}{CD}.$$

$$\because BC = 3EF,$$

$$\therefore \frac{DE + DF}{BD + CD} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{PD}{AD} = \frac{PD}{AP + PD} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{AP}{PD} = 2.$$

答案: 2.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例性质, 掌握平行线分线段成比例性质定理及等比性质是解答此题的关键.

17. 当两条曲线关于某直线 l 对称时, 我们把这两条曲线叫做关于直线 l 的对称曲线, 如果抛物线

$C_1: y = x^2 - 2x$ 与抛物线 C_2 关于直线 $x = -1$ 的对称曲线, 那么抛物线 C_2 的表达式为

_____.

【答案】 $y = (x + 3)^2 - 1$

【解析】

【分析】

先把抛物线 C_1 的解析式写成顶点式得到顶点坐标, 根据对称的关系得到 C_2 的顶点坐标, 从而得到 C_2 的解

析式.

【详解】解: $C_1: y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$,

$\therefore$ 顶点坐标是 $P(1, -1)$,

点 $P(1, -1)$ 关于直线 $x = -1$ 对称的点是 $P'(-3, -1)$,

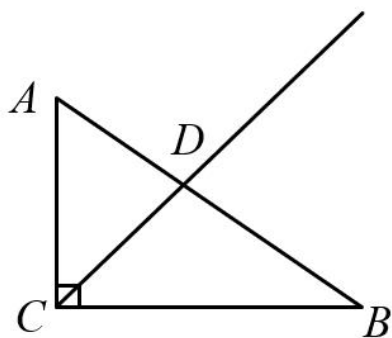
$\therefore C_2: y = (x+3)^2 - 1$.

故答案为: $y = (x+3)^2 - 1$.

【点睛】本题考查二次函数图象的性质, 解题的关键是掌握二次函数图象的性质.

18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 将 $Rt\triangle ABC$ 绕点 A 旋转, 如果点 C 落在射线 CD 上, 点 B 落在点 E 处, 连接 ED , 那么 $\angle AED$ 的正切值为

_____.



【答案】 $\frac{3}{7}$

【解析】

【分析】

如图, 过点 D 作 $DG \perp AC$ 于 G , 可得 $DG \parallel BC$, 即可证明 $\triangle AGD \sim \triangle ACB$, 可得 $\frac{AG}{DG} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$, 由 CD 是角平分线可得 $\angle ACD = 45^\circ$, 可得 $CG = DG$, 进而可求出 AG 的长, 根据勾股定理即可求出 AD 的长, 根据旋转的性质可得 $AC' = AC$, $AE = AB$, 根据等腰三角形的性质可得 $\angle CC'A = 45^\circ$, 可得 $\angle CAC' = 90^\circ$, 可得旋转角为 90° , 可得 $\angle DAE = 90^\circ$, 利用勾股定理可求出 AB 的长, 根据正切的定义即可得答案.

【详解】如图, 过点 D 作 $DG \perp AC$ 于 G ,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore DG \parallel BC$,

$\therefore \triangle AGD \sim \triangle ACB$, 可得 $\frac{AG}{DG} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$,

∵ CD 是角平分线,

$$\therefore \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore CG = DG,$$

$$\therefore AC = 3, \quad AC = AG + CG,$$

$$\therefore \frac{3}{4}DG + CG = 3, \text{ 即 } \frac{7}{4}DG = 3,$$

$$\text{解得: } DG = \frac{12}{7},$$

$$\therefore AG = \frac{9}{7},$$

$$\therefore AD = \sqrt{DG^2 + AG^2} = \frac{15}{7},$$

∵ 将 $Rt\triangle ABC$ 绕点 A 旋转, 如果点 C 落在射线 CD 上,

$$\therefore AC' = AC, \quad AE = AB,$$

$$\therefore \angle CC'A = \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAC' = 90^\circ,$$

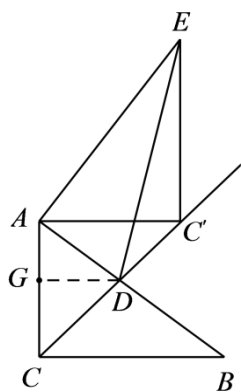
$$\therefore \text{旋转角为 } 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = 3, \quad BC = 4,$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\tan \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}.$$



$$\text{故答案为: } \frac{3}{7}$$

【点睛】 本题考查旋转的性质、相似三角形的判定与性质及三角函数的定义, 正确得出旋转角为 90° 并熟练掌握相关性质及定义是解题关键.

三、解答题

19. 已知 $a:b=2:3$, $b:c=3:4$, 且 $2a+b-c=6$, 求 a, b, c 的值

【答案】 $a=4$, $b=6$, $c=8$.

【解析】

【分析】

根据比的性质, 可得 a, b, c 用 k 表示, 根据解方程, 可得 k 的值, 即可得答案.

【详解】 $\because a:b=2:3$, $b:c=3:4$,

$\therefore$ 设 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$,

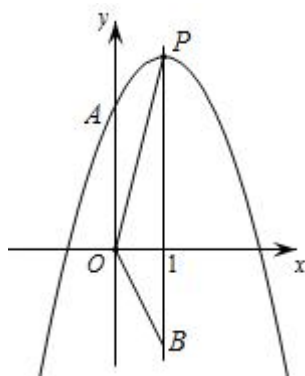
$\therefore 2 \cdot (2k) + 3k - 4k = 6$, 整理得: $3k = 6$,

解得: $k = 2$,

$\therefore a = 2k = 4$, $b = 3k = 6$, $c = 4k = 8$.

【点睛】 本题考查了比例的性质, 利用比例的性质得出 $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$ 是解题关键.

20. 如图, 已知抛物线 $y = -x^2 + ax + 3$ 与 y 轴于点 A , 且对称轴是直线 $x = 1$.



(1) 求 a 的值与该抛物线顶点 P 的坐标;

(2) 已知点 B 的坐标为 $(1, -2)$, 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OB}$.

【答案】 (1) $a=2$, 顶点 $P(1, 4)$; (2) $-2\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】

(1) 根据对称轴方程可求出 a 值, 即可得出抛物线的解析式, 化成二次函数的顶点式即可得顶点坐标;

(2) 根据二次函数解析式可得出 A 点坐标, 根据 B, P 两点坐标可得 $PB \parallel OA$, $PB = 2OA$, 可用 a 表示出 PB , 进而根据 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB}$ 可表示出 $\overrightarrow{OB}$.

【详解】 (1) $\because$ 对称轴是直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{a}{2 \times (-1)} = 1,$$

解得: $a=2$,

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 顶点 P 坐标为 (1, 4).

$$(2) \because y = -x^2 + 2x + 3,$$

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, $y=3$,

$\therefore A(0, 3)$,

$\therefore OA=3$,

$\therefore P(1, 4), B(1, -2)$,

$\therefore PB \parallel OA, PB=6$,

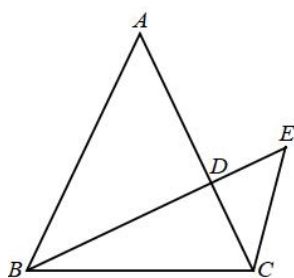
$\therefore PB=2OA$,

$$\therefore \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{AO} = -2\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = -2\vec{a} + \vec{b}.$$

【点睛】 本题考查二次函数的性质及平行向量的计算, 熟练掌握二次函数的性质及向量的运算法则是解题关键.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = \sqrt{5}, BC = 2$, 过点 B 作 $BD \perp AC$, 垂足为点 D



(1) 求 $\cot \angle ACB$ 的值;

(2) 点 E 是 BD 延长线上一点, 联结 CE, 当 $\angle E = \angle A$ 时, 求线段 CE 的长.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

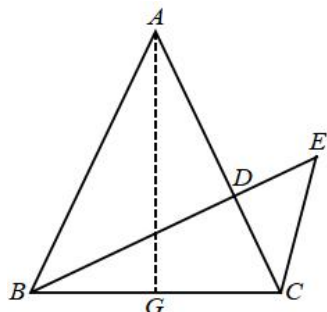
【分析】

(1) 作 $AG \perp BC$ 于点 G, 根据等腰三角形三线合一性质得到 $\triangle AGC$ 为直角三角形, 然后根据勾股定理计

算 AG 的长，然后计算 $\cot \angle ACB$ 的值；

(2) 先利用等面积法计算 BD 的长度，然后利用 $\cot \angle ACB$ 的值计算出 CD 的长的，然后证明 $\triangle ADB \sim \triangle EDC$ ，利用比例关系计算 CE 即可.

【详解】解析：(1) 如图，作 $AG \perp BC$ 于点 G



$$\because AB=AC,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}BC = 1, \quad AG \perp BC,$$

在 $\text{Rt}\triangle AGC$ 中由勾股定理可得 $AG = \sqrt{AC^2 - CG^2} = \sqrt{5-1} = 2$,

$$\therefore \cot \angle ACB = \frac{CG}{AG} = \frac{1}{2},$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AG \cdot BC = \frac{1}{2}BD \cdot AC,$$

$$\therefore BD = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\because \cot \angle ACB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CD = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\because \angle BAC = \angle E,$$

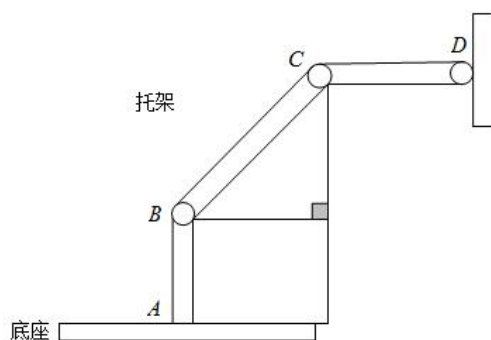
$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{EC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2},$$

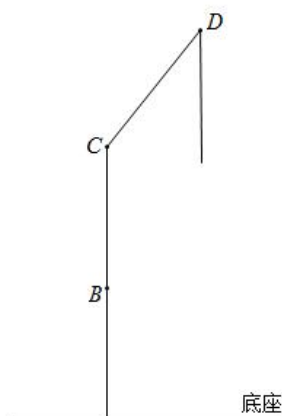
$$\therefore EC = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查余切的计算以及利用相似计算线段长度，构造辅助线，转化角是解题的关键.

22. 如图，是一个手机的支架，由底座、连杆 AB 、 BC 、 CD 和托架组成（连杆 AB 、 BC 、 CD 始终在同一平面内），连杆 AB 垂直于底座且长度为 8.8 厘米，连杆 BC 的长度为 10 厘米，连杆 CD 的长度可以进行伸缩调整。

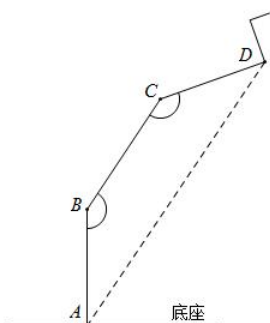


(1) 如图，当连杆 AB 、 BC 在一条直线上，且连杆 CD 的长度为 9.2 厘米， $\angle BCD = 143^\circ$ 时，求点 D 到底座的高度（计算结果保留一位小数）



(2) 如图，如果 $\angle BCD = 143^\circ$ 保持不变，转动连杆 BC ，使得 $\angle ABC = 150^\circ$ ，假如 $AD \parallel BC$ 时为最佳视线状态，求最佳视线状态时连杆 CD 的长度（计算结果保留一位小数）（参考数据：

$\sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60, \cot 53^\circ \approx 0.75$ ）



【答案】(1) 26.2cm ；(2) 7.3cm

【解析】

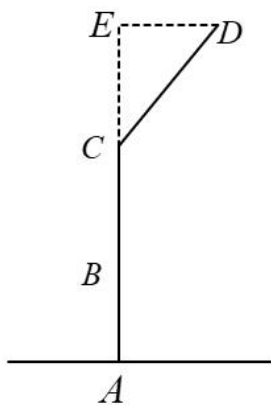
【分析】

(1) 过点 D 作 $DE \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 E ，先求解 $\angle D = 53^\circ$ ，再利用 $\sin D = \frac{CE}{CD}$ ，求解 CE ，从而可得答案；

(2) 作 $BE \perp AD, CF \perp CD$ ，垂足分别为 E, F ，证明：四边形 $BEFC$ 为矩形，求解：

$\angle BAE = 30^\circ, BE = \frac{1}{2}AB = 4.4$ ，从而可得 CF 的长度，再利用 $\angle DCF = 53^\circ$ ，利用锐角三角函数可得答案.

【详解】解：(1) 过点 D 作 $DE \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 E



$$\because \angle BCD = 143^\circ$$

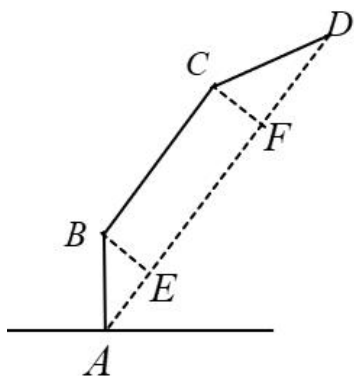
$$\therefore \angle ECD = 37^\circ, \angle EDC = 53^\circ$$

$$\therefore EC = CD \cdot \sin \angle D = 9.2 \times 0.8 = 7.36$$

$$AE = AB + BC + CE = 10 + 8.8 + 7.36 = 26.16 \approx 26.2\text{cm}$$

$\therefore D$ 到底面高度为 26.2cm ；

(2) 作 $BE \perp AD, CF \perp CD$ ，垂足分别为 E, F



$\because BC \parallel AD$,

$\therefore$ 四边形 $BEFC$ 为矩形,

$\therefore BE = CF$,

$\because \angle ABC = 150^\circ, BC \parallel AD$,

$\therefore \angle BAE = 30^\circ, BE = \frac{1}{2} AB = 4.4$

$\therefore CF = BE = 4.4$,

$\because \angle BCD = 143^\circ, \angle BCF = 90^\circ$,

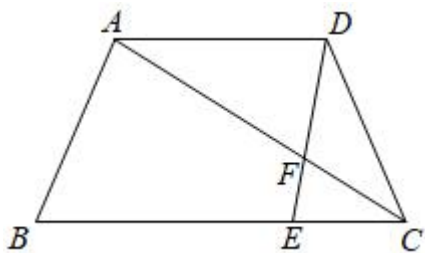
$\therefore \angle DCF = 143^\circ - 90^\circ = 53^\circ$,

$\therefore CD = \frac{CF}{\cos \angle DCF} = 4.4 \div 0.6 \approx 7.3 \text{ cm}$,

$\therefore CD$ 的长度为 7.3 cm .

【点睛】 本题考查的是解直角三角形，矩形的判定与性质，掌握以上知识是解题的关键.

23. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle DCB$, 联结 AC . 点 E 在边 BC 上, 且 $\angle CDE = \angle CAD$, DE 与 AC 交于点 F , $CE \cdot CB = AB \cdot CD$.



(1) 求证: $AD \parallel BC$;

(2) 当 $AD = DE$ 时, 求证: $AF^2 = CF \cdot CA$.

【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 证明 $\triangle ACB \sim \triangle EDC$ 可得 $\angle ACB = \angle EDC = \angle CAD$, 从而可得结论;

(2) 根据 ASA 证明 $\triangle ADF \cong \triangle DEC$, 得到 $AF = DC$, 再证明 $\triangle FCD \sim \triangle DCA$, 得到 $FC \cdot CA = CD^2$, 即可得到结论.

【详解】解: (1) $\because \angle B = \angle DCB$, 且 $CE \cdot CB = AB \cdot CD$, 即 $\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{CB}$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle EDC$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CDE$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CAD$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CAD$$

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$(2) \because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CED$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle DEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAD = \angle EDC \\ AD = CE \\ \angle ADF = \angle DEC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DEC$$

$$\therefore AF = DC$$

又 $\because \angle CDF = \angle CAD$, $\angle FCD = \angle ACD$

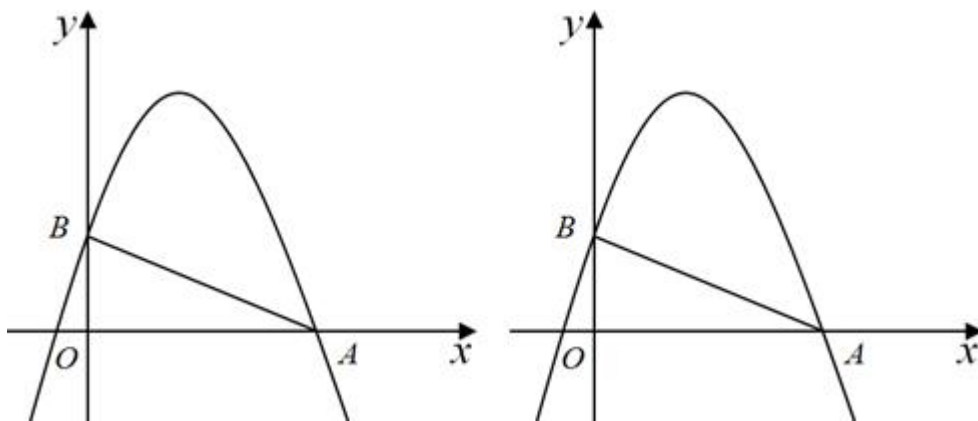
$$\therefore \triangle FCD \sim \triangle DCA$$

$$\therefore \frac{FC}{CD} = \frac{CD}{CA}, \text{ 即 } FC \cdot CA = CD^2$$

$$\therefore AF^2 = CF \cdot CA$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质, 解题的关键是利用相似三角形的性质找出比例式.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴正半轴交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴交于点 $B(0, 2)$, 点 C 在该抛物线上且在第一象限.



- (1) 求该抛物线的表达式；
- (2) 将该抛物线向下平移 m 个单位，使得点 C 落在线段 AB 上的点 D 处，当 $AD = \frac{1}{3}BD$ 时，求 m 的值；
- (3) 联结 BC ，当 $\angle CBA = 2\angle BAO$ 时，求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$; (2) $m = \frac{3}{2}$; (3) $C(2, 3)$

【解析】

【分析】

- (1) 把 A 、 B 两点坐标代入解析式，解二元一次方程求出 a 、 b 即可；
- (2) 根据 $AD = 3BD$ ，求出点 D 的坐标，把横坐标代入解析式，求出 C 点纵坐标，求差即可；
- (3) 延长 CB 交 x 轴于点 F 因为 $\angle CBA = 2\angle BAO$ ，所以， $BA = BF$ 可求 F 坐标 $(-4, 0)$ ，求出 BC 析式，再求它与抛物线交点即可.

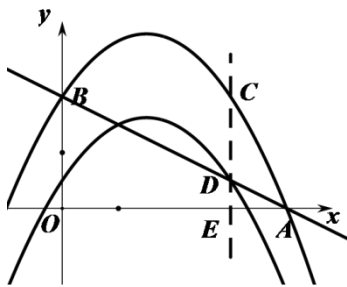
【详解】 解：(1) 把 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} -8 + 4b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$;

- (2) 抛物线向下平移时， C 点所在直线交 x 轴于点 E ,



$$\frac{DE}{BO} = \frac{AE}{AO} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{4}BO = \frac{1}{2}, AE = \frac{1}{4}OA = 1,$$

$$\therefore D\left(3, \frac{1}{2}\right),$$

把 $x=3$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 得

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{3}{2} \cdot 3 + 2 = 2,$$

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore m = \frac{3}{2};$$

(3) $\because$ 点 C 在第一象限, 连接 CB 并延长, 交 x 轴于点 F ,

$$\therefore \angle CBA = 2\angle BAO, \quad \angle CBA = \angle BAO + \angle BFO,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle BFO,$$

$$\therefore BA = BF,$$

$\therefore F$ 点与 A 点关于 y 轴对称,

$\therefore F$ 点的坐标为 $F(-4, 0)$,

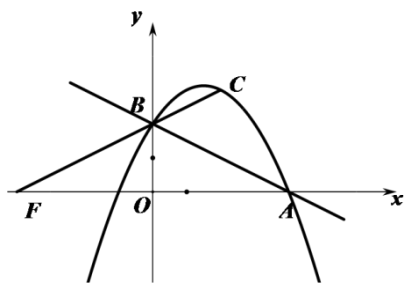
由 $B(0, 2)$ 易求 BC 解析式为: $y = \frac{1}{2}x + 2$,

与抛物线解析式联立方程组,

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases},$$

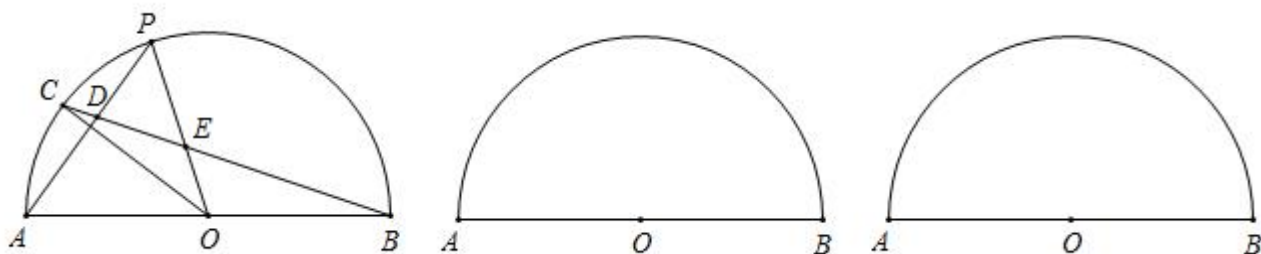
$$\therefore C(2, 3).$$



【点睛】 本题考查了用待定系数法求抛物线解析式、抛物线的平移、比例线段、等腰三角形的性质，注意知识之间的联系，综合运用知识的能力是解题关键.

25. 已知圆 O 的直径 $AB = 4$ ，点 P 为弧 AB 上一点，联结 PA 、 PO ，点 C 为劣弧 AP 上一点(点 C 不与点 A 、 P 重合)，联结 BC 交 PA 、 PO 于点 D 、 E

(1) 如图，当 $\cos \angle CBO = \frac{7}{8}$ 时，求 BC 的长；



(2) 当点 C 为劣弧 AP 的中点，且 $\triangle EDP$ 与 $\triangle AOP$ 相似时，求 $\angle ABC$ 的度数；

(3) 当 $AD = 2DP$ ，且 $\triangle BEO$ 为直角三角形时，求四边形 $AOED$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{7}{2}$ ； (2) 18° ； (3) $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{5}{6}\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】

(1) 方法一：作 $OG \perp BC$ ，利用垂径定理和余弦即可求得；方法二：连接 AC ，根据直径所对的圆周角等于 90° 可得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，利用余弦解直角三角形即可；

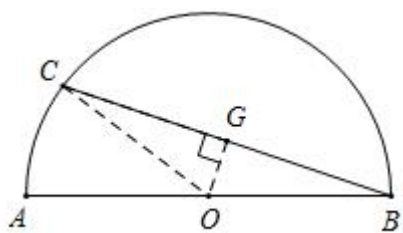
(2) 先根据已知条件确定两个相似三角形的对应角，得出 $\angle P = \angle PED = \angle PAO = \angle OEB$ ，设 $\angle ABC = \alpha$ ，利用等腰三角形等边对等角和弧与圆心角的关系，圆周角定理分别表示 $\angle AOP$ 和 $\angle OEB$ ，利用三角形外角的性质即可求得 α 即 $\angle ABC$ ；

(3) 分当 $\angle EOB = 90^\circ$ 和当 $\angle OEB = 90^\circ$ 时两种情况讨论，画出对应图形，利用相似三角形和解直角三角形的知识求解即可.

【详解】解析：方法一：

作 $OG \perp BC$,

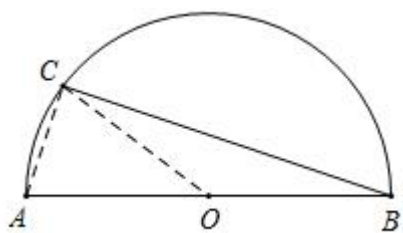
$$\therefore BC=2BG, BG = BO \cdot \cos \angle CBO = \frac{7}{4},$$



$$\therefore BC = 2BG = \frac{7}{2};$$

方法二：

连接 AC,



$\because AB$ 为直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore BC = AB \cdot \cos \angle CBO = \frac{7}{2};$$

$$(2) \because AO=OP,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle P,$$

$\because \angle P = \angle P$, $\triangle EDP$ 与 $\triangle AOP$ 相似,

$$\therefore \triangle DPE \sim \triangle OPA,$$

$$\therefore \angle P = \angle PED = \angle PAO = \angle OEB,$$

$\because C$ 是 $\widehat{AP}$ 中点,

$\therefore CO$ 平分 $\angle AOP$,

$\because CO = BO$,

设 $\angle ABC = a$,

$$\therefore \angle AOC = 2a, \angle AOP = 4a,$$

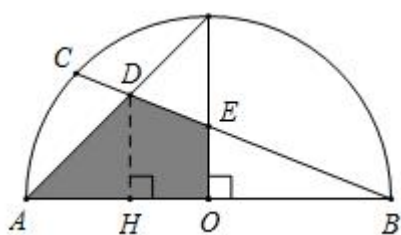
$$\therefore \angle PAO = \frac{180^\circ - 4a}{2} = 90^\circ - 2a = \angle OEB,$$

$$\therefore \angle AOP = \angle OEB + \angle ABC,$$

$$\text{即 } 4a = 90^\circ - 2a + a,$$

$$\therefore a = \angle ABC = 18^\circ;$$

(3) I. 当 $\angle EOB = 90^\circ$ 时, 作 $DH \perp AB$



$$\therefore DH \parallel OP,$$

$$\therefore \triangle ADH \sim \triangle APO,$$

$$\therefore \frac{AH}{AO} = \frac{DH}{OP} = \frac{AD}{AP} = \frac{AD}{AD + DP} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AH = \frac{2}{3} AO,$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore OA = OB = 2,$$

$$\therefore AH = \frac{4}{3}, HO = \frac{2}{3}, BH = \frac{8}{3},$$

$$\therefore AO = OP = 2,$$

$$\therefore AH = DH = \frac{4}{3},$$

$$\therefore DH \parallel OP,$$

$$\therefore \triangle BOE \sim \triangle BHD,$$

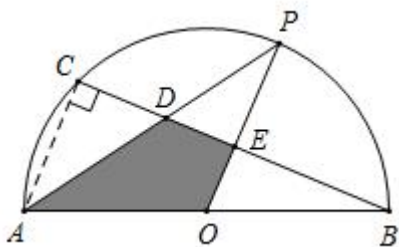
$$\therefore \frac{EO}{DH} = \frac{OB}{HB} = \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{EO}{\frac{4}{3}},$$

$$\therefore EO = 1,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore S_{\text{四边形}AOED} &= S_{\triangle AHD} + S_{\text{梯形}HOED} \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} + 1\right) \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3};
 \end{aligned}$$

II. 当 $\angle OEB = 90^\circ$ 时

连接 AC ,



由(1)得 $AC \parallel DP$,

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle PED, \quad \triangle ACB \sim \triangle OEB,$$

$$\because AD = 2DP,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{PE} = \frac{AD}{DP} = 2,$$

$$\therefore AC = 2EP,$$

$$\text{又} \because AO = BO,$$

$$\therefore \frac{CB}{BE} = \frac{AC}{OE} = \frac{AB}{BO} = 2,$$

$$\therefore AC = 2EO,$$

$$\therefore AC = OP = 2, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EOB = \angle CAO = 60^\circ,$$

$$\because AO = OP,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle APO, \quad \angle PAO + \angle APO = \angle EOB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle APO = \angle PAO = 30^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AOED} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle OEB} - S_{\triangle ACD}$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BC - \frac{1}{2} OE \cdot BE - \frac{1}{2} CD \cdot AC$$

$$\because AB = 4,$$

$$\therefore AC = 2, BC = 2\sqrt{3}, BE = \sqrt{3}, OE = 1, CD = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AOED} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{3} \times 2 = \frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

综上所述，四边形 AOED 的面积为 $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{5}{6}\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查圆周角定理、垂径定理、相似三角形的性质和判定，解直角三角形，等腰三角形的性质等. (1) 中能借助定理构造直角三角形是解题关键；(2) 能借助相似三角形以及圆周角定理表示相关角是解题关键；(3) 中注意分类讨论和正确构造图形.

