

2020 年上海市奉贤区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 已知线段 a, b, c ，如果 $a:b:c=1:2:3$ ，那么 $\frac{a+b}{c+b}$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】

由 $a:b:c=1:2:3$ ，可设 $a=k$ ， $b=2k$ ， $c=3k$ ，($k \neq 0$)，即可得到答案.

【详解】 $\because a:b:c=1:2:3$ ，

$\therefore$ 设 $a=k$ ， $b=2k$ ， $c=3k$ ，($k \neq 0$)，

$$\therefore \frac{a+b}{c+b} = \frac{k+2k}{3k+2k} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5},$$

故选 C.

【点睛】 本题主要考查分式求值，根据比值，设 k 值，是解题的关键.

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，如果 $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{1}{4}$ ，那么下列各式正确的是 ()

- A. $AB=4BC$ B. $AB=4AC$ C. $AC=4BC$ D. $BC=4AC$

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据锐角的正弦三角函数的定义，即可得到答案.

【详解】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{1}{4}$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore AB = 4BC,$$

故选 A.

【点睛】 本题主要考查三角函数的定义，掌握锐角的正弦三角函数的定义，是解题的关键.

3. 已知点 C 在线段 AB 上， $AC = 3BC$ ， 如果 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， 那么 $\overrightarrow{BA}$ 用 $\vec{a}$ 表示正确的是 ()

- A. $\frac{3}{4}\vec{a}$ B. $-\frac{3}{4}\vec{a}$ C. $\frac{4}{3}\vec{a}$ D. $-\frac{4}{3}\vec{a}$

【答案】 D

【解析】

【分析】

根据平面向量的线性运算法则， 即可得到答案.

【详解】 $\because$ 点 C 在线段 AB 上， $AC = 3BC$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ，

$$\therefore BA = \frac{4}{3}AC,$$

$\because \overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向相反，

$$\therefore \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a},$$

故选 D.

【点睛】 本题主要考查平面向量的运算，掌握平面向量的运算法则，是解题的关键.

4. 下列命题中， 真命题是 ()

- A. 邻边之比相等的两个平行四边形一定相似
B. 邻边之比相等的两个矩形一定相似
C. 对角线之比相等的两个平行四边形一定相似
D. 对角线之比相等的两个矩形一定相似

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据相似多边形的判定定理，逐一判断选项，即可.

【详解】 $\because$ 邻边之比相等的两个平行四边形，对应角不一定相等，

$\therefore$ 邻边之比相等的两个平行四边形不一定相似，

故 A 错误；

$\because$ 邻边之比相等的两个矩形一定相似，

故 B 正确；

$\because$ 对角线之比相等的两个平行四边形对应角不一定相等，

$\therefore$ 对角线之比相等的两个平行四边形不一定相似，

故 C 错误；

$\because$ 对角线之比相等的两个矩形，对应边之比不一定相等，

$\therefore$ 对角线之比相等的两个矩形不一定相似，

故 D 错误.

故选 B.

【点睛】本题主要考查相似多边形的判定定理，掌握对应边成比例，对应角相等，是解题的关键.

5.已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表：

x	...	0	1	3	4	5	...
y	...	-5	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	-5	$-\frac{15}{2}$	...

根据上表，下列判断正确的是（ ）

A. 该抛物线开口向上

B. 该抛物线的对称轴是直线 $x = 1$

C. 该抛物线一定经过点 $(-1, -\frac{15}{2})$

D. 该抛物线在对称轴左侧部分是下降的

【答案】C

【解析】

【分析】

根据表格，可知：该抛物线的对称轴是：直线 $x = 2$ ，当 $x \leq 2$ 时， y 随 x 的增大而增大，从而可得到答案.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(1, \frac{7}{2})$, $(3, \frac{7}{2})$,

$\therefore$ 该抛物线的对称轴是：直线 $x = 2$,

故 B 错误;

$\because$ 由表格可知：当 $x \leq 2$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 该抛物线开口向下，该抛物线在对称轴左侧部分是上升的，

故 A, D 错误;

$\because$ 该抛物线的对称轴是：直线 $x = 2$ ，点 $(5, -\frac{15}{2})$ 在抛物线上，

$\therefore$ 该抛物线一定经过点 $(-1, -\frac{15}{2})$,

故 C 正确.

故选 C.

【点睛】本题主要考查二次函数的图象和性质，掌握二次函数图象的轴对称性，是解题的关键.

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 9$ ， $BC = 2AC = 12$ ，点 D, E 分别在边 AB, AC 上，且 $DE \parallel BC$ ，

$AD = 2BD$ ，以 AD 为半径的 $\odot D$ 和以 CE 为半径的 $\odot E$ 的位置关系是 ()

A. 外离

B. 外切

C. 相交

D. 内含

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据题意画出图形，易证 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，得： $DE=8$ ，结合两个圆的半径，即可得到答案.

【详解】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=9$ ， $BC=2AC=12$ ， $DE \parallel BC$ ， $AD=2BD$ ，如图：

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

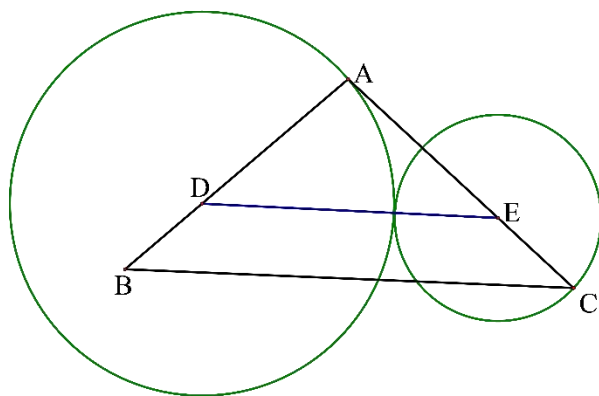
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}, \text{ 即: } DE = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times 12 = 8,$$

$\therefore$ 以 AD 为半径的 $\odot D$ 和以 CE 为半径的 $\odot E$ 的半径分别为 6, 2,

即: $6+2=8$,

$\therefore$ 以 AD 为半径的 $\odot D$ 和以 CE 为半径的 $\odot E$ 的位置关系是：外切，

故选 B.



【点睛】 本题主要考查两个圆的位置关系，求出两个圆的圆心的距离，是解题的关键.

二、填空题

7. 如果 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，那么锐角 α 的度数是_____.

【答案】 60°

【解析】

【分析】

根据特殊角的三角函数值，即可求解.

【详解】 $\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 锐角 α 的度数是: 60° .

故答案是: 60°

【点睛】 本题主要考查特殊角的三角函数值，掌握特殊角三角函数值，是解题的关键.

8. 若 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且长度为 3，则 $\vec{a} =$ _____ (用单位向量 $\vec{e}$ 表示向量 $\vec{a}$)

【答案】 $-3\vec{e}$

【解析】

【分析】

根据 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的关系，即可求解.

【详解】 $\because \vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且长度为 3，

$\therefore \vec{a} = -3\vec{e}$.

故答案是: $-3\vec{e}$.

【点睛】 本题主要考查用单位向量表示其他向量，掌握平面向量的运算法则，是解题的关键.

9. 若一条抛物线的顶点在 y 轴上，则这条抛物线的表达式可以是 _____ (只需写一个)

【答案】 $y = 2x^2$

【解析】

【分析】

根据抛物线的顶点在 y 轴上，可知: $b=0$ ，即可求解.

【详解】 $\because$ 一条抛物线的顶点在 y 轴上，

$\therefore -\frac{b}{2a} = 0$ ，即: $b=0$ ，

$\therefore$ 这条抛物线的表达式可以是: $y = 2x^2$.

故答案是： $y = 2x^2$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的解析式，掌握二次函数图象的顶点坐标公式，是解题的关键.

10.如果二次函数 $y = a(x-1)^2 (a \neq 0)$ 的图像在它的对称轴右侧部分是上升的，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 0$

【解析】

【分析】

由题意得：二次函数 $y = a(x-1)^2 (a \neq 0)$ 的图像开口向上，进而，可得到答案.

【详解】 $\because$ 二次函数 $y = a(x-1)^2 (a \neq 0)$ 的图像在它的对称轴右侧部分是上升的，

$\therefore$ 二次函数 $y = a(x-1)^2 (a \neq 0)$ 的图像开口向上，

$\therefore a > 0$.

故答案是： $a > 0$

【点睛】 本题主要考查二次函数图象和二次函数的系数之间的关系，掌握二次函数的系数的几何意义，是解题的关键.

11.抛物线 $y = x^2 + bx + 2$ 与 y 轴交于点 A , 如果点 $B(2,2)$ 和点 A 关于该抛物线的对称轴对称，那么 b 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】

由点 $B(2,2)$ 和点 A 关于该抛物线的对称轴对称，可知：抛物线的对称轴是：直线 $x=1$ ，进而可得 b 的值.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + 2$ 与 y 轴交于点 A ,

$\therefore$ 点 A 的坐标是: $(0, 2)$,

$\therefore$ 点 $B(2, 2)$ 和点 A 关于该抛物线的对称轴对称,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是: 直线 $x=1$, 即: $-\frac{b}{2a} = 1$,

$\therefore -\frac{b}{2 \times 1} = 1$, 解得: $b = -2$.

故答案是: -2 .

【点睛】 本题主要考查二次函数的对称轴公式, 理解二次函数图象的轴对称性, 是解题的关键.

12. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{3}{4}$, $AC = 6$, 那么 AB 的长是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】

根据锐角三角函数的定义, 即可求解.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{3}{4}$, $AC = 6$,

$\therefore AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8$,

故答案是: 8.

【点睛】 本题主要考查三角函数的定义, 牢记余弦三角函数的定义, 是解题的关键.

13. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB 和 AC 的反向延长线上, 若 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, 则当 $\frac{AE}{EC}$ 的值是_____时, $DE \parallel BC$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】

易得： $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，从而得到： $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ ，即可得到答案.

【详解】 $\because$ 点 D, E 分别在边 AB 和 AC 的反向延长线上，

若 $DE \parallel BC$ ，则 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{1}{4}.$$

故答案是： $\frac{1}{4}$

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的对应边成比例，是解题的关键.

14. 小明从山脚 A 出发，沿坡度为 $1:2.4$ 的斜坡前进了 130 米到达 B 点，那么他所在的位置比原来的位置升高了_____米.

【答案】50

【解析】

【分析】

设他所在的位置比原来的位置升高了 x 米，根据坡度为 $1:2.4$ 和勾股定理，列出方程，即可求解.

【详解】设他所在的位置比原来的位置升高了 x 米，

$\because$ 坡度为 $1:2.4$ ，

$\therefore$ 他所在的位置比原来的位置水平移动了 $2.4x$ 米，

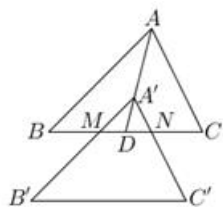
$$\therefore (2.4x)^2 + x^2 = 130^2, \text{ 解得: } x=50,$$

故答案是：50.

【点睛】本题主要考查坡度的定义和应用，根据题意，列出方程，是解题的关键.

15. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置，如果点 A' 恰好是

$\triangle ABC$ 的重心, $A'B'$ 、 $A'C'$ 分别于 BC 交于点 M, N , 那么 $\triangle A'MN$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比是_____.



【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】

易证 $\triangle A'MN \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 即可求解.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置,

$\therefore A'M \parallel AB, A'N \parallel AC,$

$\therefore \angle A'MN = \angle B, \angle A'NM = \angle C,$

$\therefore \triangle A'MN \sim \triangle ABC,$

$\because AD$ 和 $A'D$ 分别是 $\triangle A'MN$ 和 $\triangle ABC$ 对应边上的中线, 点 A' 恰好是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{A'D}{AD} = \frac{A'M}{AB} = \frac{1}{3},$$

$\therefore \triangle A'MN$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比是: $\frac{1}{9}$,

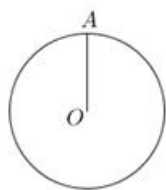
故答案是: $\frac{1}{9}$.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质, 掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方, 是解题的关键.

16. 公元 263 年左右, 我国数学家刘徽发现当正多边形的边数无限增加时, 这个正多边形面积可无限接近它的外接圆的面积, 因此可以用正多边形的面积来近似估计圆的面积, 如图,

$\odot O$ 是正十二边形的外接圆, 设正十二边形的半径 OA 的长为 1, 如果用它的面积来近似估

计 $\odot O$ 的面积，那么 $\odot O$ 的面积约是_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】

根据题意，求出圆的内接正十二边形中的一个三角形的面积，再乘以 12，即可得到答案.

【详解】 由题意得： $\angle O = 30^\circ$ ， $AO = BO = 1$ ，如图，

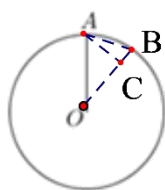
作 $AC \perp OB$ ，则 $AC = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 的面积是： $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 圆的内接正十二边形的面积是： $\frac{1}{4} \times 12 = 3$ ，

即： $\odot O$ 的面积约是 3.

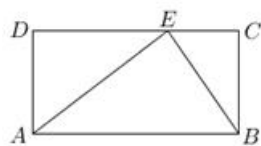
故答案是： 3.



【点睛】 本题主要考查圆的内接正多边形的面积，根据题意，画出图形，先求出三角形的面积，是解题的关键.

17. 如果矩形一边的两个端点与它对边上的一点所构成的角是直角，那么我们就把这个点叫做矩形的“直角点”，如图，如果 E 是矩形 $ABCD$ 的一个“直角点”，且 $CD = 3EC$ ，那么

$AD:AB$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】

先证明 $\triangle BEC \sim \triangle EAD$ ，可得： $\frac{BC}{ED} = \frac{CE}{DA}$ ，设 $EC=x$ ，则 $AB=CD=3x$ ， $ED=2x$ ，结合 $AD=BC$ ，

可得： $AD = \sqrt{2}x$ ，进而可得到答案.

【详解】 $\because E$ 是矩形 $ABCD$ 的一个“直角点”，

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle EAD + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle EAD,$$

$$\because \angle D = \angle C,$$

$$\therefore \triangle BEC \sim \triangle EAD,$$

$$\therefore \frac{BC}{ED} = \frac{CE}{DA},$$

$$\because CD = 3EC,$$

设 $EC=x$ ，则 $AB=CD=3x$ ， $ED=2x$ ，

$$\therefore \frac{BC}{2x} = \frac{x}{DA},$$

$$\because AD=BC,$$

$$\therefore AD^2 = 2x \cdot x = 2x^2, \text{ 即: } AD = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore AD:AB=\sqrt{2}x:3x=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

故答案是： $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定和性质定理，设 $EC=x$ ，用代数式表示线段长，是解题的关键.

18.如图，已知矩形 $ABCD$ ($AB > BC$)，将矩形 $ABCD$ 绕点 B 顺时针旋转 90° ，点 A, D 分别落在点 E, F 处，连接 DF ，如果点 G 是 DF 的中点，那么 $\angle BEG$ 的正切值是_____.



【答案】 1

【解析】

【分析】

画出图形，延长 EG 交 DC 于点 M ，先证明 $\triangle GMD \cong \triangle GEF$ ，由等量代换，可得： $CM=CE$ ，进而可求出 $\angle BEG$ 的正切值.

【详解】 延长 EG 交 DC 于点 M ，

$\because$ 点 G 是 DF 的中点，

$\therefore DG=FG$ ，

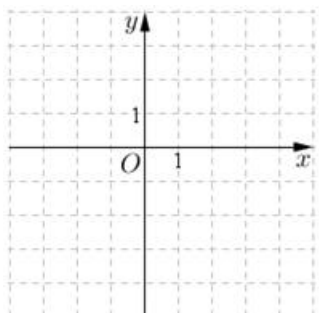
$\because EF \parallel DC$ ，

$\therefore \angle GDM = \angle GFE$ ， $\angle GMD = \angle GEF$ ，

在 $\triangle GMD$ 和 $\triangle GEF$ ，

$$\therefore \begin{cases} \angle GDM = \angle GFE \\ \angle GMD = \angle GEF \\ DG = FG \end{cases},$$

y	...						...
-----	-----	--	--	--	--	--	-----



【答案】 (1) 开口向下，顶点(2,1)，当 $x \leq 2$ ， y 随 x 的增大而增大，当 $x \geq 2$ ， y 随 x 的增大而减小；(2) 见解析

【解析】

【分析】

(1)根据二次函数的系数的意义和二次函数的性质，即可得到答案；

(2)根据描点法，画出图象，即可.

【详解】 (1) $\because a=-1<0$,

$\therefore$ 函数图像的开口向下,

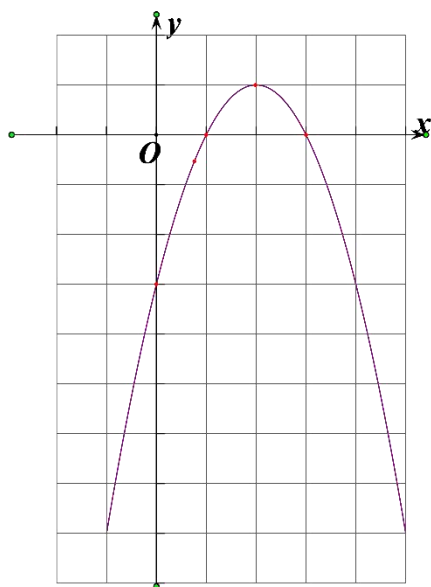
$$\because y = -(x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1,$$

$\therefore$ 顶点坐标是：(2,1),

$\therefore$ 抛物线的对称轴是：直线 $x=2$,

$\therefore$ 当 $x \leq 2$ ， y 随 x 的增大而增大，当 $x \geq 2$ ， y 随 x 的增大而减小；

(2) 当 $x=-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 时, $y=-8, -3, 0, 1, 0, -3$ ；如图所示：

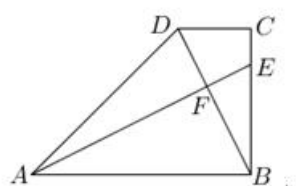


【点睛】本题主要考查二次函数的图象和性质，掌握二次函数的性质和描点法画图象，是解题的关键.

20.如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAD = 45^\circ$, $DC = 2$, $AB = 6$, $AE \perp BD$, 垂足为点 F .

(1) 求 $\angle DAE$ 的余弦值;

(2) 设 $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$.



【答案】 (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; (2) $\overrightarrow{AE} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】

(1)作 $DM \perp AB$, 垂足为 M , 易得: $DM = AM = 4$, $AD = 4\sqrt{2}$, $BC = DM = 4$, 从而得 $\tan \angle BAE = \frac{1}{2}$,

设 $BF = x$, 则 $AF = 2x$, 根据勾股定理, 即可求解;

(2)易得: $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC} = 3\vec{a}$, 根据 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$, 即可求解.

【详解】(1) 作 $DM \perp AB$, 垂足为 M,

$\therefore$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 是矩形,

$\therefore BM = CD = 2$, $AM = AB - BM = 6 - 2 = 4$,

$\therefore \angle BAD = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AMD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore DM = AM = 4$, $AD = 4\sqrt{2}$, $BC = DM = 4$,

$\therefore \tan \angle CBD = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$\therefore AE \perp BD$,

$\therefore \angle BEF + \angle EBF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEF + \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle EBF = \angle BAE$,

$\therefore \tan \angle BAE = \frac{1}{2}$,

设 $BF = x$, 则 $AF = 2x$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABF$ 中, $BF^2 + AF^2 = AB^2$,

$\therefore x^2 + (2x)^2 = 6^2$, 解得: $x = \frac{6}{5}\sqrt{5}$,

$\therefore AF = 2x = \frac{12}{5}\sqrt{5}$,

$\therefore \angle DAE$ 的余弦值 $= \frac{AF}{AD} = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$;

(2) $\therefore AB = 6$, $\tan \angle BAE = \frac{1}{2}$,

$\therefore BE = 3$,

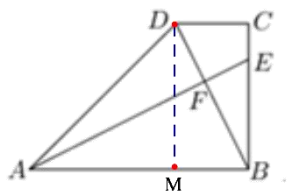
$$\because BC=4,$$

$$\therefore BE=\frac{3}{4}BC, \text{ 即: } \overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\vec{b},$$

$$\because CD=2, AB=6, AB\parallel CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}=3\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=3\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}.$$

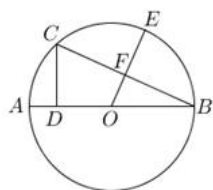


【点睛】本题主要考查三角函数得应用和平面向量加法的三角形法则，掌握平面向量加法的三角形法则，是解题的关键.

21.如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ， E 是弧 BC 的中点， OE 与弦 BC 交于点 F .

(1) 如果 C 是弧 AE 的中点，求 $AD:DB$ 的值；

(2) 如果 $\odot O$ 的直径 $AB=6$ ， $FO:EF=1:2$ ，求 CD 的长.



【答案】 (1) 1:3； (2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】

(1)连接 AC ，由 E 是弧 BC 的中点， C 是弧 AE 的中点， AB 是 $\odot O$ 的直径，得： $\angle B=30^\circ$ ，

$\angle ACB=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, 从而得到: $AD:AC:AB=1:2:4$, 进而即可求解;

(2)由 $\odot O$ 的直径 $AB=6$, $FO:EF=1:2$, 得: $FO=1$, 进而求得: $AC=2$, $BC=4\sqrt{2}$, 通过面积法, 即可求解.

【详解】连接 AC ,

$\because E$ 是弧 BC 的中点, C 是弧 AE 的中点,

$\therefore$ 弧 AC =弧 CE =弧 BE ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle B=30^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$,

$\because CD \perp AB$,

$\therefore \angle ACD=30^\circ$,

$\therefore AD:AC:AB=1:2:4$,

$\therefore AD:DB=1:3$;

(2) $\because \odot O$ 的直径 $AB=6$,

$\therefore OE=3$,

$\because FO:EF=1:2$,

$\therefore FO=1$,

$\because E$ 是弧 BC 的中点,

$\therefore OE \perp BC$,

$\because AC \perp BC$,

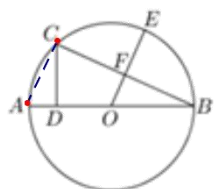
$\therefore AC \parallel OE$,

$\therefore AC=2OF=2$,

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$,

$$\therefore CD \perp AB,$$

$$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{2 \times 4\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$



【点睛】本题主要考查圆的性质和直角三角形的性质的综合，添加辅助线，构造直角三角形，是解题的关键.

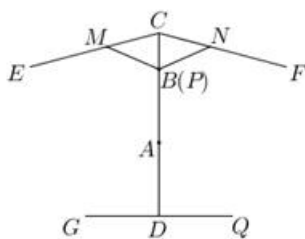
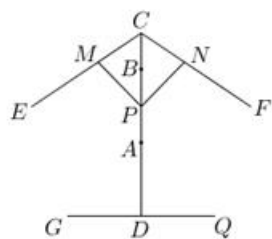
22.如图是一把落地的遮阳伞的侧面示意图,伞柄 CD 垂直于水平地面 GQ ,当点 P 与点 A 重合时,伞收紧;当点 P 由点 A 向点 B 移动时,伞慢慢撑开;当点 P 与点 B 重合时,伞完全张开.已知遮阳伞的高度 CD 是 220 厘米,在它撑开的过程中,总有

$PM = PN = CM = CN = 50$ 厘米, $CE = CF = 120$ 厘米, $BC = 20$ 厘米. (参考数据:

$\sin 53^\circ \approx 0.8$, $\cos 53^\circ \approx 0.6$, $\tan 53^\circ \approx 1.3$)

(1) 当 $\angle CPN = 53^\circ$, 求 BP 的长?

(2) 如图,当伞完全张开时,求点 E 到地面 GQ 的距离.



【答案】(1) 40 厘米; (2) 196 厘米

【解析】

【分析】

(1) 连接 MN, 交 PC 于点 O, 易证: 四边形 MPNC 是菱形, 由 $\angle CPN = 53^\circ$, 可求 PO 的长, 进而求出 PC 的长, 即可求解;

(2) 连接 MN, 交 PC 于点 O, 作 $EH \perp CD$, 垂足是 H, 易证: $MO \parallel EH$, 得到: $\frac{CM}{CE} = \frac{CO}{CH}$, 求出 $CH=24$, 进而即可求解.

【详解】(1) 连接 MN, 交 PC 于点 O, 如图 1,

$$\because PM = PN = CM = CN = 50,$$

$\therefore$ 四边形 MPNC 是菱形,

$$\therefore MN \perp CP, CO=PO,$$

$$\because \angle CPN = 53^\circ,$$

$$\therefore PO = PN \cdot \cos 53^\circ = 50 \times 0.6 = 30,$$

$$\therefore PC = 2PO = 2 \times 30 = 60,$$

$$\because BC = 20,$$

$$\therefore BP = PC - BC = 60 - 20 = 40 \text{ (厘米)};$$

(2) 连接 MN, 交 PC 于点 O, 作 $EH \perp CD$, 垂足是 H, 如图 2,

$\because$ 四边形 MPNC 是菱形,

$$\therefore CO = BO = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 20 = 10, MO \perp BC,$$

$$\because EH \perp CD,$$

$$\therefore MO \parallel EH,$$

$$\therefore \frac{CM}{CE} = \frac{CO}{CH}, \text{ 即: } \frac{50}{120} = \frac{10}{CH},$$

$$\therefore CH = 24,$$

$$\therefore DH = CD - CH = 220 - 24 = 196 \text{ (厘米)},$$

即: 点 E 到地面 GQ 的距离是 196 厘米.

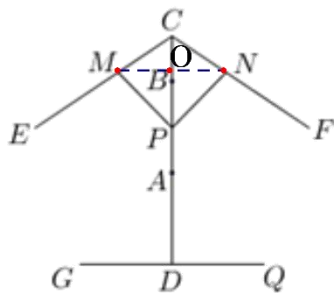


图 1

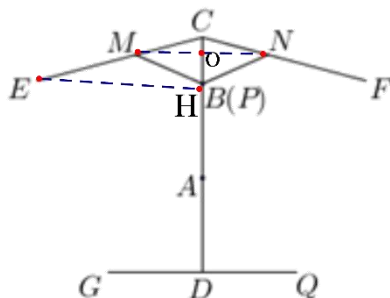


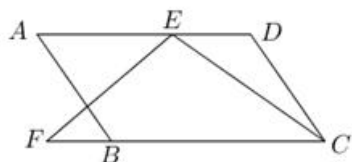
图 2

【点睛】本题主要考查菱形的判定和性质定理以及三角函数的定义，添加合适的辅助线，是解题的关键.

23.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上，点 F 在边 CB 的延长线上，联结 CE, EF ， $CE^2 = DE \cdot CF$.

(1) 求证： $\angle D = \angle CEF$ ；

(2) 联结 AC ，交 EF 于点 G ，如果 AC 平分 $\angle ECF$ ，求证： $AC \cdot AE = CB \cdot CG$.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】

(1)由 $\angle FCE = \angle CED$ ， $CE^2 = DE \cdot CF$ ，可得： $\triangle FCE \sim \triangle CED$ ，即可得到结论；

(2)先证 $\triangle ECG \sim \triangle DAC$ ，可得： $\frac{EC}{DA} = \frac{CG}{AC}$ ，结合 $AE = CE$ ， $DA = CB$ ，即可得到结论.

【详解】(1) $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle CED,$$

$$\therefore CE^2 = DE \cdot CF,$$

$$\therefore \frac{CF}{EC} = \frac{EC}{DE},$$

$$\therefore \triangle FCE \sim \triangle CED,$$

$$\therefore \angle D = \angle CEF;$$

$$(2) \because AC \text{ 平分 } \angle ECF,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACB,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle CAE,$$

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore \angle D = \angle CEF,$$

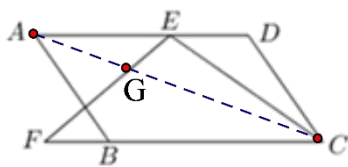
$$\therefore \triangle ECG \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{EC}{DA} = \frac{CG}{AC},$$

$$\therefore AC \cdot EC = DA \cdot CG,$$

$$\therefore DA = CB,$$

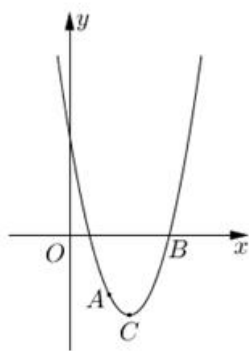
$$\therefore AC \cdot AE = CB \cdot CG$$



【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定和性质定理，根据题意，找到对应角相等，对应边成比例，以及进行适当的等量代换，是解题的关键.

24.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(2, -3)$ 和点 $B(5, 0)$ ，顶点为 C .

- (1) 求这条抛物线的表达式和顶点 C 的坐标；
- (2) 点 A 关于抛物线对称轴的对应点为点 D ，联结 OD, BD ，求 $\angle ODB$ 的正切值；
- (3) 将抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 向上平移 $t(t > 0)$ 个单位，使顶点 C 落在点 E 处，点 B 落在点 F 处，如果 $BE = BF$ ，求 t 的值.



【答案】 (1) $y = x^2 - 6x + 5$ ， $C(3, -4)$ ； (2) 3； (3) $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

(1) 根据待定系数法，即可求解；

(2) 根据题意，画出图形，由 $OD = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ ， $OB = 5$ ，可得： $\angle OBD = \angle ODB$ ，即可求解；

(3)根据题意：可得： $BE=\sqrt{4+(-4+t)^2}$ ， $BF=t$ ，列出关于 t 的方程，即可求解。

【详解】(1) $\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(2,-3)$ 和点 $B(5,0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -3=4+2b+c \\ 0=25+5b+c \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=-6 \\ c=5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式是： $y=x^2-6x+5$ ，

即： $y=(x-3)^2-4$ ，

$\therefore C(3,-4)$ ；

(2) $\because$ 抛物线的对称轴是：直线 $x=3$ ，点 A 关于抛物线对称轴的对应点为点 D ，

$\therefore$ 点 D 的坐标 $(4, -3)$ ，

$$\therefore OD=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,$$

$\because OB=5$ ，

$\therefore OB=OD$ ，

$\therefore \angle OBD=\angle ODB$ ，

过点 D 作 $DE \perp x$ 轴，则 $DE=3$ ， $BE=5-4=1$ ，

$$\therefore \tan \angle ODB = \tan \angle OBD = \frac{DE}{BE} = 3;$$

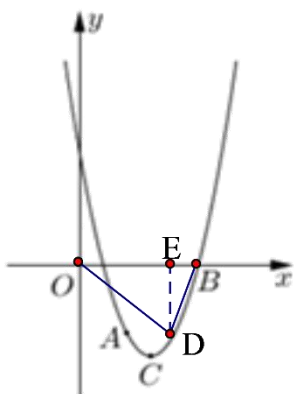
(3) $\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 向上平移 $t(t>0)$ 个单位，使顶点 C 落在点 E 处，点 B 落在点 F 处，

$\therefore E(3, -4+t)$ ， $F(5, t)$ ，

$$\therefore BE=\sqrt{(5-3)^2+(-4+t-0)^2}=\sqrt{4+(-4+t)^2}, \quad BF=t,$$

$\because BE=BF$ ，

$$\therefore \sqrt{4+(-4+t)^2}=t, \text{解得: } t=\frac{5}{2}.$$



【点睛】本题主要考察二次函数的图象和平面几何图形的综合，根据题意画出图形，列出方程，是解题的关键.

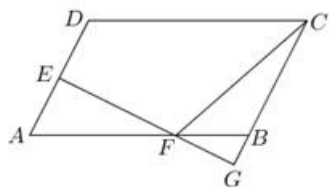
25.如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = \sqrt{5}$ ， $AB = 5$ ， $\tan A = 2$ ，点 E 在射线 AD 上，过点 E 作 $EF \perp AD$ ，垂足为点 E ，交射线 AB 于点 F ，交射线 CB 于点 G ，联结 CE, CF ，设 $AE = m$ 。

(1) 当点 E 在边 AD 上时，

①求 $\triangle CEF$ 的面积；(用含 m 的代数式表示)

②当 $S_{\triangle DCE} = 4S_{\triangle BFG}$ 时，求 $AE : ED$ 的值；

(2) 当点 E 在边 AD 的延长线上时，如果 $\triangle AEF$ 与 $\triangle CFG$ 相似，求 m 的值。



【答案】(1) ① $S_{\triangle CEF} = -m^2 + 2\sqrt{5}m$ ，② 3: 1；(2) $m = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ 。

【解析】

【分析】

(1)①作 $EM \perp AB$ ， $DN \perp AB$ ，由 $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle DCE}$ ，即可求解；

②易证： $\triangle AEF \sim \triangle BGF$ ，得： $\frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle AEF}} = \left(\frac{BF}{AF}\right)^2 = \frac{(5-\sqrt{5}m)^2}{(\sqrt{5}m)^2}$ ，即： $S_{\triangle BGF} = m^2 - 2\sqrt{5}m + 5$ ，

结合 $S_{\triangle DCE} = 5 - \sqrt{5}m$ ， $S_{\triangle DCE} = 4S_{\triangle BFG}$ ，即可得到答案；

(2)由 $\angle AEF = \angle FGC = 90^\circ$ ， $\triangle AEF$ 与 $\triangle CFG$ 相似，分两种情况讨论：①当 $\triangle AEF \sim \triangle FGC$ 时，

②当 $\triangle AEF \sim \triangle CGF$ 时，分别求出答案，即可。

【详解】(1) ①作 $EM \perp AB$ ， $DN \perp AB$ ，如图 1，

$$\because \tan A = 2,$$

$$\therefore EM : AM : AE = 2 : 1 : \sqrt{5}, \quad DN : AN : AD = 2 : 1 : \sqrt{5},$$

$$\because AE = m,$$

$$\therefore EM = \frac{m}{\sqrt{5}} \times 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}m, \quad DN = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times 2 = 2,$$

$$\because EF \perp AD,$$

$$\therefore \tan A = \frac{EF}{AE} = 2, \quad \text{即：} EF = 2m, \quad AF = \sqrt{5}m,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{AFCD} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}m + 5) \times 2 - \frac{1}{2} \times m \times 2m - \frac{1}{2} \times 5 \times \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}m\right),$$

$$\text{即：} S_{\triangle CEF} = -m^2 + 2\sqrt{5}m$$

② $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle AEF}} = \left(\frac{BF}{AF}\right)^2 = \frac{(5-\sqrt{5}m)^2}{(\sqrt{5}m)^2},$$

$$\therefore S_{\triangle BGF} = \frac{(5-\sqrt{5}m)^2}{(\sqrt{5}m)^2} \cdot m^2 = \frac{5m^2 - 10\sqrt{5}m + 25}{5} = m^2 - 2\sqrt{5}m + 5,$$

$$\therefore S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \times 5 \times \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}m\right) = 5 - \sqrt{5}m,$$

∴ 当 $S_{\triangle DCE} = 4S_{\triangle BFG}$ 时, $5 - \sqrt{5}m = 4 \times (m^2 - 2\sqrt{5}m + 5)$, 解得: $m_1 = \frac{3}{4}\sqrt{5}$, $m_2 = \sqrt{5}$ (舍)

$$\therefore AE = \frac{3}{4}\sqrt{5}, \quad DE = \sqrt{5} - \frac{3}{4}\sqrt{5} = \frac{1}{4}\sqrt{5},$$

$$\therefore AE : ED = 3 : 1;$$

$$(2) \because \angle AEF = \angle FGC = 90^\circ,$$

∴ $\triangle AEF$ 与 $\triangle CFG$ 相似, 分两种情况讨论:

① 当 $\triangle AEF \sim \triangle FGC$ 时, 如图 1,

$$\therefore \angle AFE = \angle FCG,$$

$$\because \angle AFE + \angle GBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCG + \angle GBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\therefore BF : CF : BC = 1 : 2 : \sqrt{5},$$

$$\because BC = AD = \sqrt{5},$$

$$\therefore BF = 1,$$

$$\therefore AF = AB + BF = 5 + 1 = 6,$$

$$\because AE : EF : AF = 1 : 2 : \sqrt{5},$$

$$\therefore AE = 6 \div \sqrt{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}, \text{ 即: } m = \frac{6}{5}\sqrt{5};$$

② 当 $\triangle AEF \sim \triangle CGF$ 时, 如图 3,

$$\therefore \angle AFE = \angle CFG,$$

在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle CFG$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle AFE = \angle CFG \\ GF = GF \\ \angle BGF = \angle CGF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFG \cong \triangle CFG (\text{ASA}),$$

