

嘉定区 2020 学年第一学期九年级期末质量调研

数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

同学们注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 没有特殊说明, 几何题均视为在同一个平面内研究问题.
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 如果实数 a, b, c, d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 下列四个选项中, 正确的是 ()

A. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ B. $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ C. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ D. $\frac{a^2}{b} = \frac{c^2}{d}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据比例的性质选出正确选项.

【详解】A 选项正确, $\because \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1, \therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

B 选项, 当 $a+b=0$ 或 $c+d=0$ 时, 不成立;

C 选项, 当 $b+d=0$ 时, 不成立;

D 选项不成立, 例如: 当 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 时, $\frac{1^2}{2} \neq \frac{2^2}{4}$;

故选: A.

【点睛】本题考查比例的性质, 解题的关键是掌握比例的性质.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(1, 3)$, 点 P 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为

$\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, 那么 $\tan \alpha$ 的值是 ()

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】如图，过 P 作 $PA \perp x$ 轴于 A，根据 $P(1,3)$ ，得到 $OA=1$ ， $PA=3$ ，由 $\angle POA=\alpha$ ，利用角的正切值等于对边比邻边求出答案.

【详解】如图，过 P 作 $PA \perp x$ 轴于 A，

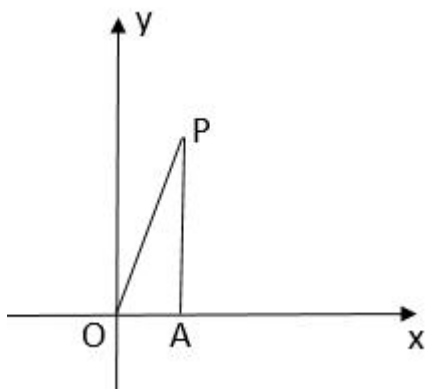
$$\therefore P(1,3),$$

$$\therefore OA=1, PA=3,$$

在 $Rt\triangle OPA$ 中， $\angle POA=\alpha$ ，

$$\therefore \tan \alpha = \tan \angle POA = \frac{PA}{OA} = 3,$$

故选：D.



【点睛】此题考查直角坐标系中点到坐标轴的距离，锐角三角函数值的计算，正确掌握正切值计算公式是解题的关键.

3. 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 的顶点坐标是 ()

A. $(2,-3)$

B. $(2,3)$

C. $(0,-3)$

D. $(0,3)$

【答案】C

【解析】

【分析】直接由抛物线解析式即可求得答案.

【详解】解： $\because$ 抛物线为 $y = 2x^2 - 3$ ，

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(0, -3)$ ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，即在 $y = a(x-h)^2 + k$ 中，顶点坐标为 (h, k) ，对称轴为 $x=h$.

4. 已知 $\vec{e}$ 是一个单位向量, $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 那么下列等式正确的是 ()

- A. $|\vec{a}|\vec{e} = \vec{a}$ B. $|\vec{e}|\vec{b} = \vec{b}$ C. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \vec{e}$ D. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】长度不为 0 的向量叫做非零向量, 向量包括长度及方向, 而长度等于 1 个单位长度的向量叫做单位向量, 注意单位向量只规定大小没规定方向, 则可分析求解.

【详解】A. 由于单位向量只限制长度, 不确定方向, 故错误;

B. 符合向量的长度及方向, 正确;

C. 得出的是 $\vec{a}$ 的方向不是单位向量, 故错误;

D. 左边得出的是 $\vec{a}$ 的方向, 右边得出的是 $\vec{b}$ 的方向, 两者方向不一定相同, 故错误.

故答案选 B.

【点睛】本题考查的知识点是平面向量, 解题的关键是熟练掌握平面向量.

5. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D. 下列四个选项中, 不正确的是 ()

- A. $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{BD}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ 推出 $AB = 2BC$, 根据 $CD \perp AB$ 推出 $\angle BCD = \angle A = 30^\circ$, 得到 $BC = 2BD$, 设 $BD = x$, 则 $BC = 2x$, $AB = 4x$, 利用勾股定理求出 AC 、 CD , 再列式计算进行判断.

【详解】 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2BC$,

$\because CD \perp AB$,

$\therefore \angle BCD + \angle B = 90^\circ$,

$\because \angle A + \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle A = 30^\circ$,

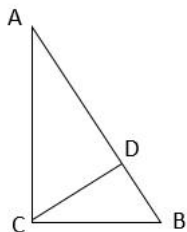
$\therefore BC = 2BD$,

设 $BD = x$, 则 $BC = 2x$, $AB = 4x$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}x$, $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3}x$

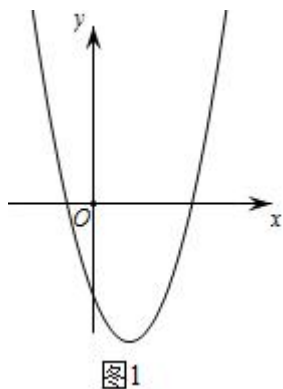
$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故选：B.



【点睛】此题考查直角三角形 30 度角所对的直角边等于斜边的一半，解直角三角形，解题中设 $BD=x$ ，则 $BC=2x$ ， $AB=4x$ ，用含 x 的式子表示各线段使计算简便，更易得出答案.

6. 二次函数 $y = a(x+m)^2 + k$ 的图像如图所示，下列四个选项中，正确的是 ()



- A. $m < 0, k < 0$ B. $m < 0, k > 0$ C. $m > 0, k < 0$ D. $m > 0, k > 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数图象的位置及顶点坐标所在的象限确定答案.

【详解】由函数图象知：二次函数的图象顶点在第四象限，

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-m, k)$,

$\therefore -m > 0, k < 0$,

$\therefore m < 0$,

故选：A.

【点睛】此题考查二次函数图象，根据函数图象与各项系数之间的关系.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 正方形的边长与其对角线长的比为_____.

【答案】 $1:\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 设正方形的边长为 1，则由勾股定理易求得正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$ ，计算即得结果.

【详解】 解：设正方形的边长为 1，则该正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$ ，所以正方形的边长与其对角线长的比为 $1:\sqrt{2}$.

【点睛】 此题主要考查对正方形的性质和线段比的定义的理解及运用. 难度不大，属于基础题型.

8. 已知点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AP > BP$ ，那么 AP: AB 的比值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

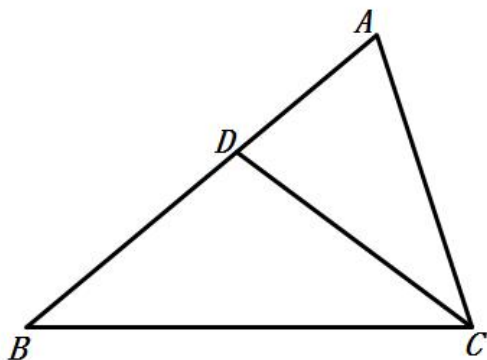
【分析】 根据黄金分割的定义列即可得答案.

【详解】 $\because$ 点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AP > BP$,

$$\therefore AP: AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【点睛】 题考查了黄金分割点的应用，把一条线段分割为两部分，使较大部分与全长的比值等于较小部分与较大的比值，则这个比值即为黄金分割；其比值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ；理解黄金分割点的定义是解题的关键.

9. 如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 的 AB 边上，当 $\frac{AD}{AC} = \underline{\hspace{1cm}}$ 时， $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 相似.



【答案】 $\frac{AC}{AB}$

【解析】

【分析】 要使 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，由 $\angle BAC = \angle CAD$ 共用，只要满足 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ 即可.

【详解】由 $\angle BAC = \angle CAD$ 共用,

当 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ 时,

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC.$$

故答案为: $\frac{AC}{AB}$.

【点睛】本题考查相似三角形判定问题, 关键是掌握相似三角形的判定定理.

10. 已知向量关系式 $2\vec{a} + 6(\vec{b} - \vec{x}) = \vec{0}$, 那么向量 $\vec{x} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 表示)

【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】利用类似一元一次方程的求解方法, 去括号、移项、系数化 1, 即可求得答案.

【详解】解: $\because 2\vec{a} + 6(\vec{b} - \vec{x}) = \vec{0}$

$$\therefore 2\vec{a} + 6\vec{b} - 6\vec{x} = \vec{0}$$

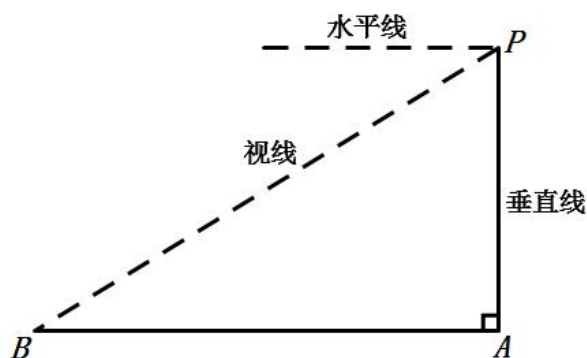
$$6\vec{x} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$

【点睛】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 此向量方程的解法与一元一次方程的解法类似.

11. 如图, 飞机 P 在目标 A 的正上方, 飞行员测得目标 B 的俯角为 30° , 那么 $\angle APB$ 的度数为 _____.[°].

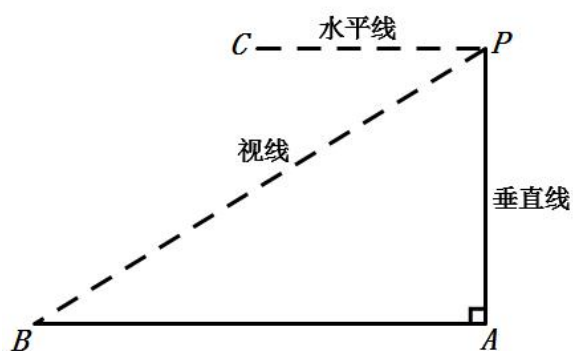


【答案】 60

【解析】

【分析】先由题意得到 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 根据直角三角形两锐角互余求得结果.

【详解】 $\because$ 飞机 P 在目标 A 的正上方, 飞行员测得目标 B 的俯角为 30° ,



$$\therefore \angle A = 90^\circ, \angle CPB = 30^\circ,$$

$$\therefore CP \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle CPB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ - \angle B = 60^\circ,$$

故答案为：60.

【点睛】此题考查直角三角形两锐角互余的性质，理解飞行员测得目标 B 的俯角为 30° 得到 $\angle B = 30^\circ$ 是解题的关键.

12. 已知一个斜坡的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$ ，那么该斜坡的坡角的度数是_____.

【答案】 30°

【解析】

【分析】坡度=坡角的正切值，据此直接解答.

$$\text{【详解】解：} \because \tan \alpha = 1 : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{坡角} = 30^\circ.$$

【点睛】此题主要考查学生对坡度及坡角的理解及掌握.

13. 如果抛物线 $y = (2a - 1)x^2$ 的开口向下，那么实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据二次函数的性质：当二次项的系数小于 0 时，抛物线开口向下解答.

$$\text{【详解】} \because \text{抛物线 } y = (2a - 1)x^2 \text{ 的开口向下,}$$

$$\therefore 2a - 1 < 0,$$

解得 $a < \frac{1}{2}$.

【点睛】此题考查二次函数的性质：当二次项的系数小于 0 时，抛物线开口向下；当二次项的系数大于 0 时，抛物线开口向上.

14. 二次函数 $y = (x+1)^2 - 3$ 的图像与 y 轴的交点坐标为_____.

【答案】 $(0, -2)$

【解析】

【分析】求出自变量 x 为 0 时的函数值即可得到二次函数的图象与 y 轴的交点坐标.

【详解】把 $x = 0$ 代入 $y = (x+1)^2 - 3$ 得： $y = 1 - 3 = -2$,

$\therefore$ 该二次函数的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, -2)$,

故答案为： $(0, -2)$.

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，在 y 轴上的点的横坐标为 0.

15. 如果抛物线 $y = (x+m)^2 + k - 2$ 的顶点在 x 轴上，那么常数 k 为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】抛物线的顶点在 x 轴上，所以 $k-2=0$ ，解出 k 即可.

【详解】根据题意结合抛物线的顶点式可知 $k-2=0$ ，所以 $k=2$.

故答案为： 2.

【点睛】本题考查抛物线的顶点式的特点. 正确理解题意正确解答本题的关键.

16. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$ ，那么 $2a + b$ _____ 0. (从 $<$ ， $=$ ， $>$ 中选择)

【答案】 $=$

【解析】

【分析】根据对称轴公式得 $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ，即可求出结果.

【详解】解： $\because$ 抛物线对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

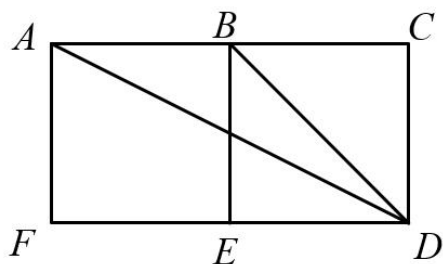
$\therefore b = -2a$ ，即 $2a + b = 0$.

故答案是： $=$.

【点睛】本题考查二次函数图象的对称轴，解题的关键是掌握抛物线的对称轴公式.

17. 如图，正方形 $ABEF$ 和正方形 $BCDE$ 的边长相等，点 A、B、C 在同一条直线上. 连接 AD 、 BD ，那

么 $\cot \angle ADB$ 的值为_____.

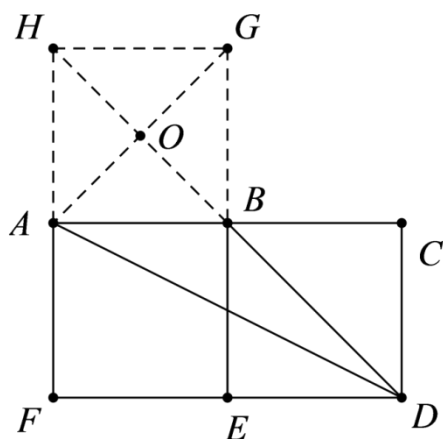


【答案】3

【解析】

【分析】先构造以 $\angle ADB$ 为内角的直角三角形，根据余切的定义求解即可.

【详解】解：如图，作正方形 ABEF 关于直线 AB 对称的正方形 ABGH，连接 AG，BH，相交于点 O；



$\therefore$ 正方形 ABGH,

$\therefore \angle AOD = 90^\circ$, $OA = OB = \frac{1}{2} AG$,

$\therefore$ 正方形 ABEF 和正方形 BCDE 的边长相等,

$\therefore$ 正方形 ABGH 和正方形 BCDE 的边长相等,

$\therefore AG = BD = 2OA$,

$\therefore OD = OB + BD = 3OA$,

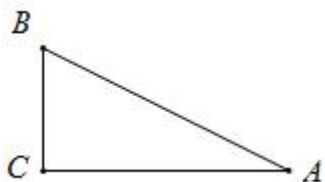
$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOD$ 中,

$$\cot \angle ADB = \frac{OD}{OA} = \frac{3OA}{OA} = 3.$$

故答案为 3.

【点睛】本题考查了求角的余切值，掌握相关知识是解题的关键.

18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (如图), 把 $\triangle ABC$ 绕着点C按顺时针方向旋转 $\alpha^\circ (0 < \alpha < 360)$. 将点A、B的对应点分别记为点 A' 、 B' , 如果 $\triangle AA'C$ 为直角三角形, 那么点A与点 B' 的距离为_____.



【答案】 $2\sqrt{5}$ 或 $6\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 先解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 求出 BC 和 AC, 利用旋转的性质求出 $B'C = BC = 2\sqrt{5}$. 当 $\angle ACA' = 90^\circ$ 时, 再分 B' 在 AC 上和 B' 在 AC 的延长线上两种情况作出图形, 即可求解.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由题意得,

$$BC = AB \cdot \sin A = 10 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 20} = 4\sqrt{5},$$

又因为旋转, 则 $B'C = BC = 2\sqrt{5}$,

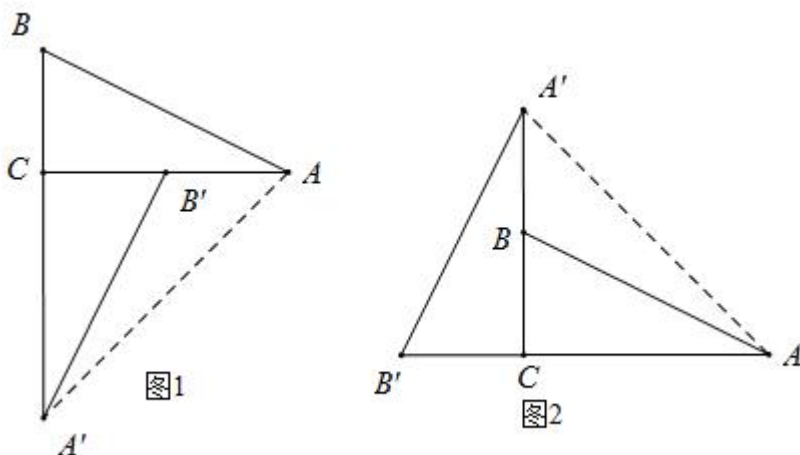
当 $\angle ACA' = 90^\circ$ 时, 有两种情况,

(1) 如图 1, B' 在线段 AC 上时,

$$AB' = AC - B'C = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5};$$

(2) 如图 2, B' 在线段 AC 的延长线上时,

$$AB' = AC + B'C = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$



故答案为: $2\sqrt{5}$ 或 $6\sqrt{5}$

【点睛】 本题考查了锐角三角函数和旋转的性质，掌握利用正弦求边长，并且要有一定的空间想像能力是解题关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $2\sin 45^\circ + 2\sin 60^\circ - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ$

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 把相应的特殊角的三角函数值代入即可.

【详解】 原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times 1$

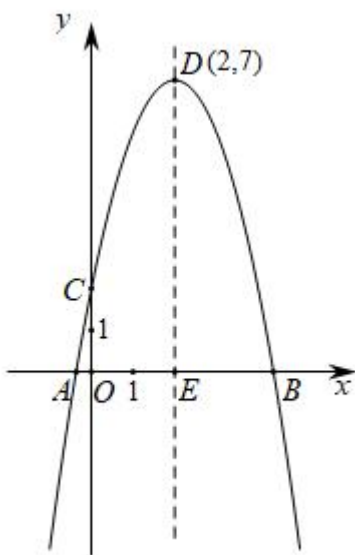
$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{2}$$

【点睛】 本题主要考查了不同特殊角的三角函数值的混合运算，熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 我们已经知道二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像是一条抛物线. 研究二次函数的图像与性质, 我们主要关注抛物线的对称轴、抛物线的开口方向、抛物线的最高点 (或最低点) 的坐标、抛物线与坐标轴的交点坐标、抛物线的上升或下降情况 (沿 x 轴的正方向看).

已知一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图像如图所示.



(1) 你可以获得该二次函数的哪些信息？（写出四条信息即可）

(2) 依据目前的信息，你可以求出这个二次函数的解析式吗？如果可以，请求出这个二次函数的解析式；如果不可以，请补充一个条件，并求出这个二次函数的解析式。

【答案】 (1) 对称轴为直线 $x=2$ ；顶点坐标为 $(2,7)$ ；开口向下；当 $x<2$ 时， y 随 x 增大而增大；(2) 不可以；补充条件 $C(0,2)$ ， $y = -\frac{5}{4}(x-2)^2 + 7$

【解析】

【分析】 (1) 观察函数图像顶点，对称轴，由对称轴分开增减区间；

(2) 只有顶点，条件不足，不能求出解析式，可以给出除顶点外的一点坐标即可如添加“ $C(0,2)$ ”设出顶点式，然后把 C 点坐标代入即可。

【详解】 (1) 对称轴：直线 $x=2$ ，最高点/顶点 $(2,7)$ ，

开口方向：向下，

当 $x<2$ 时， y 随 x 增大而增大，

当 $x>2$ 时， y 随 x 增大而减小；

(2) 不可以，加上“ $C(0,2)$ ”，

设 $y = a(x-2)^2 + 7 (a \neq 0)$ ，

代入 $C(0,2)$ 得 $a = -\frac{5}{4}$ ，

$\therefore y = -\frac{5}{4}(x-2)^2 + 7$ 。

【点睛】本题考查数形结合的问题，仔细观察图像，找出发现的信息，掌握求抛物线解析式需三个独立的条件是解题关键.

21. 如图，已知 AD 与 BC 相交于点 O ，连接 AB .

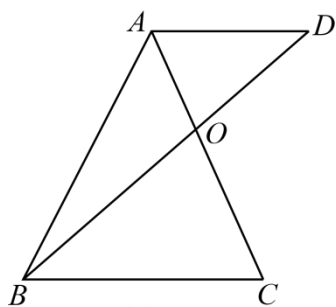


图7

(1) 如果 $AD \parallel BC$ ， $S_{\triangle AOD} = 4$ ， $S_{\triangle BOC} = 9$ ，求： $S_{\triangle ABO}$.

(2) 分别将 $\triangle AOD$ 、 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 记为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，如果 S_2 是 S_1 与 S_3 的比例中项，求证： $AD \parallel BC$.

【答案】(1) 6；(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 由 $AD \parallel BC$ ，易证 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，由性质得 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \frac{AO^2}{CO^2}$ ，从而推出 $\frac{AO}{CO} = \frac{2}{3}$ ，过 B 作

$BE \perp AC$ 于 E ，利用同高两三角形面积比等于底的比 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle COB} = OA : OC$ 即可；

(2) $\triangle AOD$ 、 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 记为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，由 S_2 是 S_1 与 S_3 的比例中项，得 $S_2^2 = S_1 \cdot S_3$ 把等积变比

例 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3}$ ，利用面积比等于同高的底的比 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{OD}{OB}$ ， $\frac{S_2}{S_3} = \frac{AO}{CO}$ ，则 $\frac{DO}{BO} = \frac{AO}{CO}$ ，由夹角是对顶角，证出

$\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，利用对应角相等推出 $AD \parallel BC$ 即可.

【详解】(1) $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DAO = \angle C$ ， $\angle D = \angle OBC$ ，

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \frac{AO^2}{CO^2}，$$

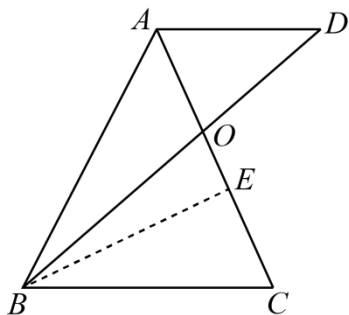
$$\therefore \frac{AO}{CO} = \sqrt{\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}}} = \frac{2}{3}，$$

过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E ，

$\therefore BE$ 是 $\triangle BOC$ 的高，也是 $\triangle BOA$ 的高，

$$\therefore S_{\triangle AOB} : S_{\triangle COB} = OA : OC,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{AO}{CO} \cdot S_{\triangle COB} = 6;$$



(2) 分别将 $\triangle AOD$ 、 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 记为 S_1 、 S_2 、 S_3 ,

$\therefore S_2$ 是 S_1 与 S_3 的比例中项,

$$\therefore S_2^2 = S_1 \cdot S_3,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3},$$

过 A 作 $AF \perp BD$ 于 F,

$\therefore AF$ 是 $\triangle AOD$ 的高, 也是 $\triangle BOA$ 的高,

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{OD}{OB},$$

由 (1) 知 $\frac{S_2}{S_3} = \frac{AO}{CO},$

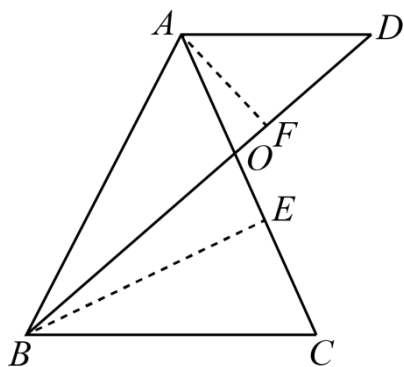
$$\therefore \frac{DO}{BO} = \frac{AO}{CO},$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COB,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

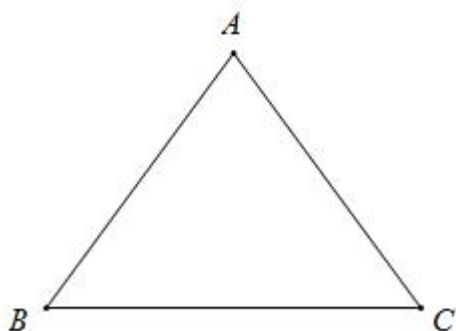
$$\therefore \angle ADO = \angle CBO,$$

$$\therefore AD \parallel BC.$$



【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质综合运用问题，掌握相似三角形的证明方法，相似三角形的性质，会利用平行证相似，利用性质推面积比，进而求面积，还会由面积比证相似再证平行正反思思维训练.

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10$ ， $\sin B = \frac{4}{5}$.



(1) 求边 BC 的长度;

(2) 求 $\cos A$ 的值.

【答案】 (1) 12; (2) $\frac{7}{25}$

【解析】

【分析】 (1) 作 $AE \perp BC$ ，根据 $\sin B = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{5}$ 求出 AE ，再根据勾股定理求出 BE ，利用等腰三角形的三线合一的性质得到 BC ;

(2) 作 $BF \perp AC$ ，由 $AB=AC$ ，证得 $\angle B = \angle C$ ，得到 $\cos C = \cos B$ ， $\frac{CF}{BC} = \frac{BE}{AB}$ ，求出 CF ， AF ，即可得到答案.

【详解】 (1) 作 $AE \perp BC$ ，垂足为点 E .

$$\because \sin B = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{5}, \quad AB=10,$$

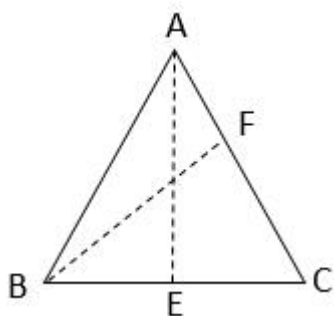
$$\therefore AE = 8,$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 6,$$

$$\therefore BC = 2BE = 12;$$

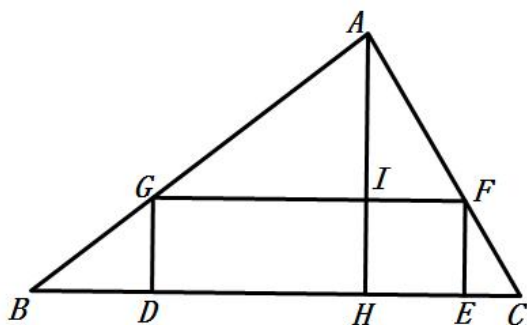
(2) 作 $BF \perp AC$,

$$\begin{aligned}
&\because AB=AC, \\
&\therefore \angle B=\angle C, \\
&\therefore \cos C=\cos B, \\
&\therefore \frac{CF}{BC}=\frac{BE}{AB}, \\
&\therefore CF=BC \cdot \frac{3}{5}=\frac{36}{5}, \\
&\therefore AF=AC-CF=\frac{14}{5}, \\
&\therefore \cos A=\frac{AF}{AB}=\frac{7}{25}.
\end{aligned}$$



【点睛】此题考查等腰三角形的三线合一的性质，解直角三角形的应用，勾股定理，同角的三角函数值相等，引出辅助线构造直角三角形是解题的关键。

23. 如图，已知矩形 $DEFG$ 的边 DE 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 G, F 分别在边 AB, AC 上. $\triangle ABC$ 的高 AH 交 GF 于点 I .



- (1) 求证: $BD \cdot EH = DH \cdot CE$;
- (2) 设 $DE = n \cdot EF$ (n 为正实数), 求证: $\frac{n}{BC} + \frac{1}{AH} = \frac{1}{EF}$.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle BDG \sim \triangle BHA, \triangle CEF \sim \triangle CHA$, 根据相似三角形的性质列出比例关系, 整理即可证得结论;

(2) 要证明 $\frac{n}{BC} + \frac{1}{AH} = \frac{1}{EF}$ 只需证明 $\frac{nEF}{BC} + \frac{EF}{AH} = 1$ 即 $\frac{DE}{BC} + \frac{EF}{AH} = 1$, 证明 $\triangle AGF \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的性质以及比例的性质即可证明.

【详解】解: (1) 证明: $\because$ 四边形 DEFG 为矩形, $\triangle ABC$ 的高 AH 交 GF 于点 I,

$$\therefore GD=EF, \angle GDH = \angle GDB = \angle FEC = \angle FEB = \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ,$$

又 $\because \angle B = \angle B, \angle C = \angle C$,

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BHA, \triangle CEF \sim \triangle CHA,$$

$$\therefore \frac{GD}{AH} = \frac{BD}{BH} = \frac{BD}{BD+DH}, \frac{EF}{AH} = \frac{CE}{CH} = \frac{CE}{CE+EH},$$

$$\therefore \frac{BD}{BD+DH} = \frac{CE}{CE+EH},$$

$$\therefore BD \cdot EH = DH \cdot CE;$$

(2) 证明: $\because$ 四边形 DEFG 为矩形,

$$\therefore GF = DE, GF \parallel BC, \angle FEB = \angle EFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle B, \angle AFG = \angle C,$$

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle ABC,$$

$\because$ AH 为 $\triangle ABC$ 的高,

$$\therefore \angle AIF = \angle AHC = 90^\circ, \frac{GF}{BC} = \frac{AI}{AH}, \text{即} \frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AH},$$

$$\therefore \angle FEB = \angle EFG = \angle AHC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 IHEF 为矩形,

$$\therefore EF = IH,$$

$$\therefore DE = n \cdot EF,$$

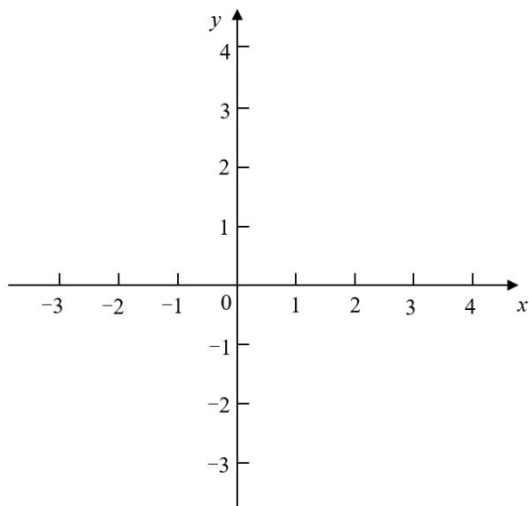
$$\therefore \frac{nEF}{BC} + \frac{EF}{AH} = \frac{DE}{BC} + \frac{IH}{AH} = \frac{AI}{AH} + \frac{IH}{AH} = \frac{AI+IH}{AH} = \frac{AH}{AH} = 1,$$

$$\therefore \frac{n}{BC} + \frac{1}{AH} = \frac{1}{EF}.$$

【点睛】本题考查相似三角形的性质与判定, 矩形的性质和判断. 本题中相似三角形有很多, 能结合结论判断是需要证明哪组三角形相似是解题关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图). 已知点 $A(-1, 2)$, 点 $B(1, 6)$, 点 $C(1, 4)$. 如果抛物线

$y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 恰好经过这三个点之中的两个点.



- (1) 试推断抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 A、B、C 之中的哪两个点？简述理由；
- (2) 求常数 a 与 b 的值；
- (3) 将抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 先沿与 y 轴平行的方向向下平移 2 个单位长度，再与沿 x 轴平行的方向向右平移 $t (t > 0)$ 个单位长度，如果所得到的新抛物线经过点 $C(1, 4)$ 。设这个新抛物线的顶点是 D。试探究 $\triangle ABD$ 的形状。

【答案】 (1) 点 A、B 在抛物线上，理由见解析； (2) $a = 1$ ， $b = 2$ ； (3) 等腰直角三角形

【解析】

【分析】 (1) $BC \parallel y$ 轴，故 B、C 中只有一个点在抛物线上，算出 AC 的解析式，交 y 轴于点 $(0, 3)$ ，抛物线与 y 轴也交于点 $(0, 3)$ ，故 C 不符合要求，由此解答即可；

(2) 把 A、B 点的坐标代入解析式，由此解答即可；

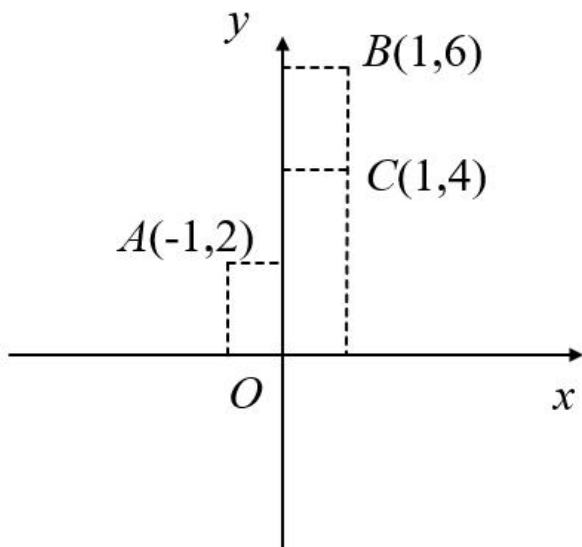
(3) 由平移可得新的解析式，代入 $(1, 4)$ 得出 D 点的坐标，再判断三角形的形状。

【详解】 (1) $\because BC \parallel y$ 轴，故 B、C 中只有一个点在抛物线上，

$\therefore AC: y = x + 3$ ，交 y 轴于点 $(0, 3)$ 。

且抛物线与 y 轴也交于点 $(0, 3)$ ，故 C 不符合要求。

$\therefore$ 点 A、B 在抛物线上



(2) 代入 A、B 到 $y = ax^2 + bx + 3$.

$$a = 1, \quad b = 2$$

$$\therefore y = x^2 + 2x + 3$$

$$(3) \quad y = (x+1)^2 + 2$$

$$y = (x+1-t)^2 \quad (t > 0)$$

$$\therefore D(t-1, 0)$$

代入 $(1, 4)$ 到 $y = (x+1-t)^2$, $t_1 = 0$ (舍), $t_2 = 4$,

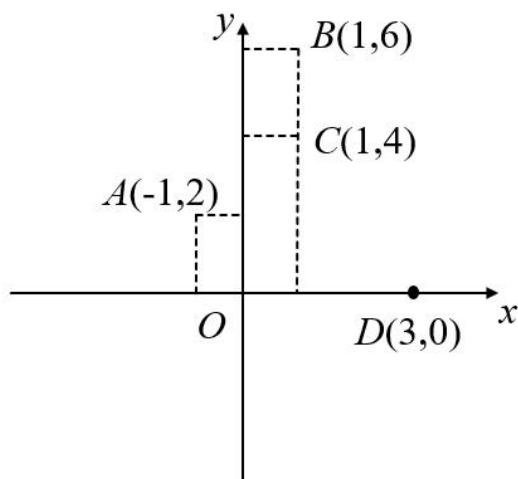
$$\therefore D(3, 0)$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{5}, \quad BD = 2\sqrt{10}, \quad AB = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore AD = AB, \quad AD^2 + AB^2 = BD^2,$$

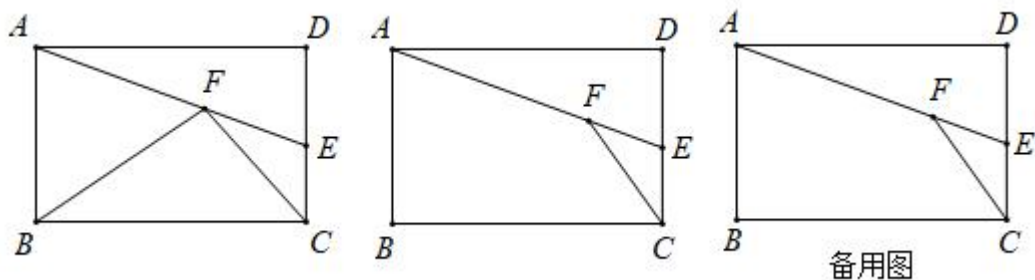
$$\therefore \angle BAD = 90^\circ.$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形



【点睛】 本题考查了与待定系数法求二次函数解析式及判断点是否在图像上， 平移变换勾股定理等知识，求解析式是解题的关键.

25. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $AD=8$ ，点 E 在 CD 边上， $\tan \angle EAD = \frac{1}{2}$. 点 F 是线段 AE 上一点，连接 BF ， CF .



(1) 如果 $\tan \angle CBF = \frac{3}{4}$ ，求线段 AF 的长；

(2) 如果 $CF = \frac{1}{2}BC$.

①求证： $\angle CFE = \angle DAE$ ；

②求线段 EF 的长.

【答案】 (1) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ； (2) ①证明见解析； ② $\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】 (1) 如图：作 $FG \perp AB$ ，设 $AG = k$ 、 $FG=2k$,然后用 k 表示出 BG ，在根据 $AG+BG=AB$ 求出 K 即可完成解答；

(2) ①作 $CG \perp EF$ ，先用矩形的性质和解三角形的相关知识求得 EG 、 CG 、 FG ，最后说明

$$\tan \angle CFE = \frac{1}{2} = \tan \angle DAE \text{ 即可证明;}$$

②直接运用线段的和差计算即可.

【详解】解: (1) 如图: 作 $FG \perp AB$, 设 $AG = k$,

$$\therefore \tan \angle EAD = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \angle GFA = \frac{AG}{FG} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } FG = 2AG = 2k,$$

$$\therefore \tan \angle CBF = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan \angle ABF = \frac{4}{3},$$

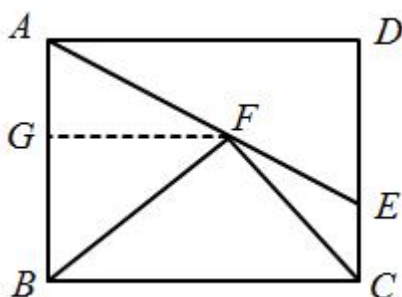
$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{4}{3}, \text{ 即 } BG = \frac{3}{4}FG = \frac{3}{2}k$$

$$\therefore AG + BG = AB$$

$$\therefore k + \frac{3}{2}k = 6.$$

$$\therefore k = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AF = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{k^2 + (2k)^2} = \sqrt{5}k = \frac{12\sqrt{5}}{5};$$



(2) 作 $CG \perp EF$,

① $\because$ 矩形 ABCD

$$\therefore BC = AD = 8, CD = AB = 6$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = 4$$

$$\therefore \tan \angle EAD = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{DE}{8} = \frac{1}{2} \text{ 即 } DE = 4, \tan \angle FED = 2$$

$$\therefore CE = CD - DE = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle DEA$$

$$\therefore \tan \angle CEG = \tan \angle DEA = 2$$

$$\therefore \tan \angle CEG = 2 = \frac{CG}{EG}$$

设 $EG = m$, 则 $CG = 2m$

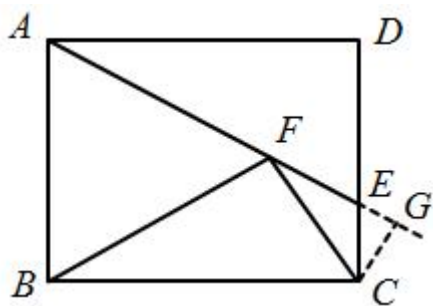
$$\therefore \sqrt{EG^2 + CG^2} = CE, \text{ 即 } \sqrt{m^2 + (2m)^2} = 2, \text{ 解得 } m = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\therefore EG = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \quad CG = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2} = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$$

$$\therefore \tan \angle CFE = \frac{1}{2} = \tan \angle DAE$$

$$\therefore \angle CFE = \angle DAE;$$



$$\textcircled{2} EF = FG - EG = \frac{8}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

【点睛】 本题属于三角函数的综合题，主要考查了解三角形、正切以及勾股定理等内容，灵活运用三角函数解直角三角形成为解答本题的关键.

