

2020 年上海市嘉定区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 下列选项中的两个图形一定相似的是. ()

- A. 两个等腰三角形 B. 两个矩形 C. 两个菱形 D. 两个正五边形.

【答案】 D

【解析】

【分析】

根据相似图形的概念逐一判断即可.

【详解】 A.两个等边三角形相似，但是两个等腰三角形并不一定相似，三个角度没有确定，

故 A 不正确；

B.两个矩形虽然角度相等，但是边不一定对应成比例，故不一定相似，故 B 不正确；

C.两个平行菱形对应角度及对应边都不一定成比例，所以不一定相似，故 C 不正确；

D.两个正五边形角度相等，放大缩小后可以完全重合，两图形相似，故 D 正确；

故选择 D.

【点睛】 本题主要考查相似图形的概念，掌握相似图形的判定是解题的关键.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=10$ ， $AC=8$. 下列四个选项，不正确是()

- A. $\sin A = \frac{4}{5}$ B. $\cos A = \frac{4}{5}$ C. $\tan A = \frac{3}{4}$ D. $\cot A = \frac{4}{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据锐角三角函数逐一判断即可.

【详解】A、 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$,故该选项错误;

B、 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$,故该选项正确;

C、 $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$,故该选项正确;

D、 $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}$, 故该选项正确

故选 A.

【点睛】 本题主要考查直角三角形中的锐角三角函数，掌握锐角三角函数是解题的关键.

3.如果 A(-2, n), B(2, n),C(4, n+12)这三个点都在同一个函数的图像上，那么这个函数的解析式可能是 ()

A. $y = 2x$

B. $y = -\frac{2}{x}$

C. $y = -x^2$

D. $y = x^2$

【答案】 D

【解析】

【分析】

分析给出的三个点的特点，可知 A,B 关于 y 轴对称，所以排除关于原点对称的函数 A， B 选项，然后再利用函数的增减性可得出答案.

【详解】 $\because A(-2, n), B(2, n)$

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于 y 轴对称

$\therefore y = 2x$ 、 $y = -\frac{2}{x}$ 的图像都关于原点对称

$\therefore$ 选项 A、B 错误

$\therefore$ 由 B(2, n)、C(4, n+12)得，在对称轴右侧 y 随 x 增大而增大

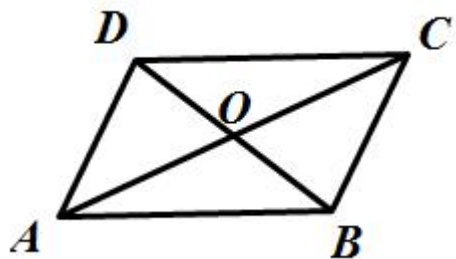
$\therefore a > 0$

$\therefore$ 选择 D: $y = x^2$

故选 D

【点睛】 本题主要考查函数的增减性和对称性，掌握函数的图像和性质是解题的关键.

4.如图,在平行四边形 ABCD 中, 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, 那么向量 $\vec{OC}$ 可以表示为.()



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ C. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】 A

【解析】

【分析】

利用平行四边形的性质以及平面向量的加法与减法运算法则解题即可.

【详解】 由题意可得

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

【点睛】 本题主要考察平面向量的加法与减法运算，掌握平行四边形法则是解题的关键.

5.三角形的重心是 ()

- A. 三角形三边的高所在直线的交点; B. 三角形的三条中线的交点;
C. 三角形的三条内角平分线的交点; D. 三角形三边的垂直平分线的交点.

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据三角形重心的概念即可得出答案.

【详解】 A 三角形三边的高所在直线的交点是垂心;

B 三角形的三条中线的交点是重心；

C 三角形的三条内角平分线的交点是内心；

D 三角形三边的垂直平分线的交点是外心.

故选 B

【点睛】 本题主要考查三角形的重心，掌握三角形重心的概念是解题的关键.

6.下列四个选项中的表述，一定正确的是（ ）

A. 经过半径上一点且垂直于这条半径的直线是圆的切线；

B. 经过半径的端点且垂直于这条半径的直线是圆的切线；

C. 经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线；

D. 经过一条弦的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

【答案】 C

【解析】

【分析】

逐一对选项进行分析即可.

【详解】 A 选项中圆的切线不是经过半径上任一点，而是经过半径的非圆心一端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.故该选项错误；

B 选项中，必须经过半径的非圆心的一端并且垂直于这条半径的直线，就是这个圆的一条切线.故该选项错误；

C 选项中经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线， 故该选项正确；

D 选项中，不是经过任一条弦的外端且垂直于这条半径的直线就是圆的切线.故该选项错误.

故选 C

【点睛】 本题主要考查切线的意义和性质，掌握切线的性质是解题的关键.

二、填空题

7.若 $2a=3b$ ，则 $a:b=$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

分析：根据比例的基本性质：两内项之积等于两外项之积．把 $2a$ 当做比例的外项， $3b$ 当做比例的内项写出比例即可．

详解：

根据比例的基本性质， $2a=3b$ 可以写出比例为：

$a:b=3:2$.

故答案为 $3, 2$.

点睛：考查用比例的基本性质写比例，解题关键是根据比例的基本性质(两内项之积等于两外项之积),把 $2a$ 当做比例的外项， $3b$ 当做比例的内项，再写出比例.

8.如果将一个三角形保持形状不变但周长扩大为原三角形周长的 9 倍，那么扩大后的三角形面积为原三角形面积的_____倍.

【答案】 81

【解析】

【分析】

利用相似三角形的性质可得出相似比等于周长比，面积比等于相似比的平方则可得出答案.

【详解】 相似三角形面积比等于相似比的平方 $\frac{S_1}{S_2} = (\frac{C_1}{C_2})^2 = 81$.

所以周长扩大 9 倍，面积扩大 81 倍

故答案为 81

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的性质是解题的关键.

9.在某一时刻测得一根高为 1.8m 的竹竿的影长为 0.9m，如果同时同地测得一栋的影长为 27m，那么这栋楼的高度为_____m

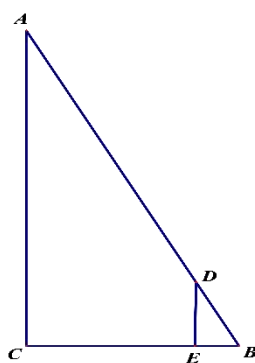
【答案】 54

【解析】

【分析】

根据题意画出图形，利用相似三角形的性质解题即可.

【详解】 解：如图



$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

$$BE=0.9, DE=1.8, BC=27$$

$$\therefore \frac{0.9}{27} = \frac{1.8}{AC}$$

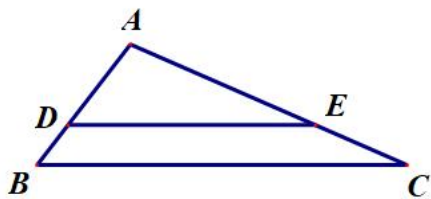
$$\therefore AC=54$$

故答案为

【点睛】 本题主要考查相似三角形的应用，掌握相似三角形的性质是解题的关键.

10.在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，如果 $AD=2$ ， $DB=1$ ， $AE=4$ ， $EC=2$ ，那

么 $\frac{DE}{BC}$ 的值为_____



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】

先利用 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 2$, 得出 $DE \parallel BC$, 从而得出 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ 即可.

【详解】 $\because \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 2$,

$\therefore DE \parallel BC$,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$

故答案为 $\frac{2}{3}$

【点睛】 本题主要考查平行线分线段成比例, 掌握平行线分线段成比例是解题的关键.

11. 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 的顶点坐标为_____

【答案】 $(-1, 0)$

【解析】

【分析】

直接根据抛物线的解析式写出顶点坐标即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1, 0)$

故答案为 $(-1, 0)$

【点睛】 本题主要考查抛物线的顶点坐标, 掌握抛物线顶点坐标的形式是解题的关键.

12. 如果抛物线 $y = -x^2 + bx$ 的对称轴为 y 轴, 那么实数 b 的值等于_____

【答案】 0

【解析】

【分析】

根据抛物线对称轴是 y 轴，可知对称轴为 $x = 0$ ，利用对称轴可求 b 的值.

【详解】由题意可知，抛物线 $y = -x^2 + bx$ 的对称轴为 y 轴，即直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times (-1)} = 0$ ，

$b=0$.

故答案为 0

【点睛】 本题主要考查二次函数的对称轴，掌握二次函数的对称轴的求法是解题的关键.

13.将抛物线 $y = x^2 + 4x + 5$ 向右平移两个单位后，所得抛物线的表达式为

【答案】 $y = x^2 + 1$

【解析】

【分析】

利用二次函数图像的平移规律平移即可.

【详解】由题意可知，将抛物线向右平移两个单位后得： $y = (x-2)^2 + 4(x-2) + 5 = x^2 + 1$

故答案为 $y = x^2 + 1$

【点睛】 本题主要考查二次函数图像的平移，掌握函数的平移规律是解题的关键.

14.已知抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 和 $B(1, y_2)$ ，那么

y_1 _____ y_2 (从“>”或“<”或“=”选择)

【答案】 >

【解析】

【分析】

根据二次函数的增减性判定即可.

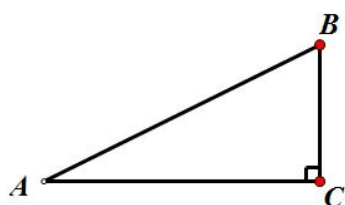
【详解】由题意可知, 抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 的开口向上 ($a > 0$), 对称轴为直线

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1, \text{ 所以当 } x \leq 1 \text{ 时, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小, 即 } y_1 > y_2$$

故答案为>

【点睛】本题主要考查二次函数的增减性, 掌握二次函数的图像和性质是解题的关键.

15.如图, 有一个斜坡 AB, 坡顶 B 离地面的高度 BC 为 30m, 斜坡的坡度 $i = 1:2.5$, 那么该斜坡的水平距离 AC 的长____m



【答案】75

【解析】

【分析】

根据坡度的定义解题即可.

【详解】坡度 $\tan A = i = \frac{BC}{AC} = \frac{30}{AC} = 1:2.5$, 解得 $AC = 75$

故答案为 75

【点睛】本题主要考查坡度的概念, 掌握坡度的概念是解题的关键.

16.如果正多边形的边数是 n ($n \geq 3$), 它的中心角是 α° , 那么 α 关于 n 的函数解析式是_____

【答案】 $\alpha = \frac{360}{n}$

【解析】

【分析】

利用利用正多边形边数与中心角的关系即可得出答案.

【详解】因为正多边形边数为 n ，则有 $n \cdot \alpha = 360^\circ$

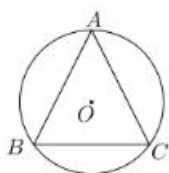
$$\text{则中心角 } \alpha = \frac{360}{n}$$

$$\text{故答案为 } \alpha = \frac{360}{n}$$

【点睛】本题主要考查正多边形边数与中心角的关系，掌握正多边形边数与中心角的关系是解题的关键.

17.如图， $\odot O$ 的半径长为 5cm， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，如果

$AB = AC$ ， $BC = 8$ cm，那么 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ cm^2



【答案】 32

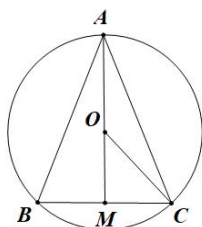
【解析】

【分析】

过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，连接 OC ，根据等腰三角形的性质及垂径定理即可求出 OM 的值，从而可知 AM 的值，进而面积可求.

【详解】如图，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，连接 OC ，

$\because AB=AC$ 且 $BC=8$,



$$\therefore BM=CM=\frac{1}{2}BC=4$$

$\therefore$ 圆的半径等于 5

$$\therefore OA = OC = 5$$

$$\therefore OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 3$$

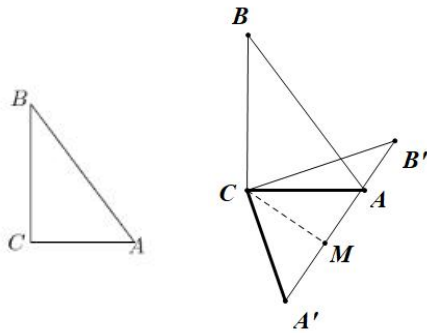
$$\therefore AM = 8$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AM \times BC = 32$$

故答案为 32

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的性质及垂径定理，掌握垂径定理是解题的关键.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $\cos A = \frac{3}{5}$, 把 $\triangle ABC$ 绕着点 C 按照顺时针的方向旋转, 将 A 、 B 的对应点分别记为点 A' 、 B' , 如果 $A'B'$ 恰好经过点 A , 那么点 A 与点 A' 的距离为_____



【答案】 $\frac{36}{5}$

【解析】

【分析】

根据 $AB = 10$, $\cos A = \frac{3}{5}$ 和勾股定理分别求出 AC, BC 的长度, 利用旋转的性质和 $\cos A' = \cos A = \frac{3}{5}$ 求出 $A'M$, 进而求出 AA' 的值

【详解】 解析: 如图 $\triangle ABC$ 旋转得 $\triangle A'B'C'$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AB = 10, \cos A = \frac{3}{5}$$

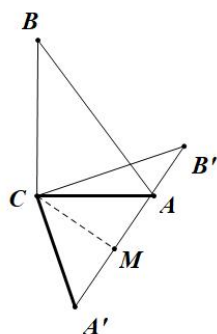
$$\therefore AC = 6$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$$

由旋转可得 $\angle A' = \angle A$, $A'C = AC = 6$

$$\therefore \cos A' = \cos A = \frac{3}{5}$$

过点 C 作 $CM \perp AA'$ 于点 M



$$\therefore A'M = \frac{18}{5}$$

$$\therefore AA' = 2A'M = \frac{36}{5}$$

【点睛】本题主要考查图形的旋转及解直角三角形, 掌握解直角三角形的方法是解题的关键.

三、解答题

19. 计算: $2\cos 30^\circ + \tan 45^\circ - 2\sin 30^\circ - \cot 30^\circ$

【答案】 0

【解析】

【分析】

将特殊角的三角函数值代入即可

【详解】 $2\cos 30^\circ + \tan 45^\circ - 2\sin 30^\circ - \cot 30^\circ$

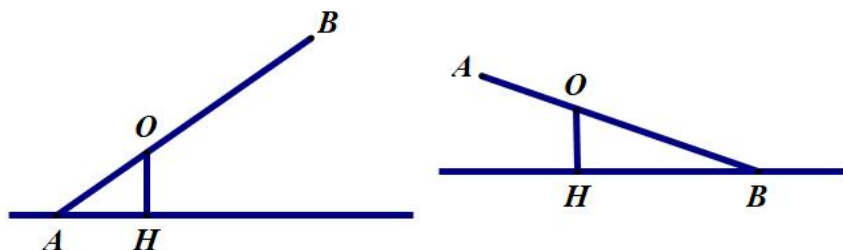
$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + 1 - 1 - \sqrt{3}$$

$$= 0$$

【点睛】 本题主要考查特殊角的三角函数值, 掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

20.已知不等臂跷跷板 AB 长为 3 米,跷跷板 AB 的支撑点 O 到地面上的点 H 的距离 OH=0.6 米。当跷跷板 AB 的一个端点 A 碰到地面时,AB 与地面上的直线 AH 的夹角 $\angle OAH$ 的度数为 30° 。



(1) 当 AB 的另一个端点 B 碰到地面时(如右图),跷跷板 AB 与直线 BH 的夹角 $\angle ABH$ 的正弦值是多少?

(2) 当 AB 的另一个端点 B 碰到地面时(如右图),点 A 到直线 BH 的距离是多少米?

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$; (2) 1

【解析】

【分析】

(1) 先根据作图中求出 OB 的长度, 再利用 $\sin \angle ABH = \frac{OH}{OB}$ 即可

(2) 过 A 作 $AC \perp BH$, 垂足为点 C.AC 长即为所求.利用 AB 和 $\sin \angle ABH$ 即可求

【详解】 解: (1) $\because \sin \angle OAH = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, OH=0.6

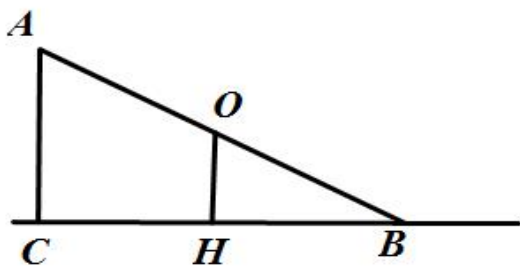
$$\therefore OA=1.2$$

$$\because AB=3\text{m}, AO=1.2\text{m}$$

$$\therefore OB=3-1.2=1.8\text{m}$$

$$\text{在 } Rt\triangle BOH \text{ 中, } \sin \angle ABH = \frac{OH}{OB} = \frac{0.6}{1.8} = \frac{1}{3}$$

(2)过 A 作 $AC \perp BH$, 垂足为点 C.AC 长即为所求.

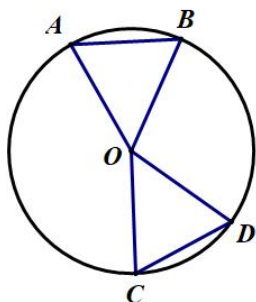


$$\therefore AC = AB \sin \angle ABH = 3 \times \frac{1}{3} = 1\text{m}.$$

【点睛】 本题主要考查解直角三角形，掌握解直角三角形的方法是解题的关键.

21.如图,在 $\odot O$ 中,AB、CD 是两条弦, $\odot O$ 的半径长为 $r\text{cm}$,弧 AB 的长度为 $l_1\text{ cm}$,弧 CD 的长度为 $l_2\text{ cm}$ (温馨提醒:弧的度数相等,弧的长度相等,弧相等,有联系也有区别) 当 $l_1 = l_2$ 时,求

证: $AB = CD$



【答案】 见解析

【解析】

【分析】

利用弧长公式得出圆心角相等，再利用圆心角，弧，弦之间的关系即可证明.

【详解】 解： 令 $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle COD = \beta$.

$$\because l_1 = l_2$$

$$\therefore \frac{\alpha \pi r_1}{180} = \frac{\beta \pi r_2}{180}$$

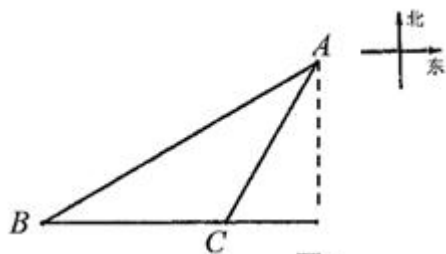
$$\because AB \text{ 和 } CD \text{ 在同圆中, } r_1 = r_2$$

$$\therefore \alpha = \beta$$

$$\therefore AB=CD$$

【点睛】 本题主要考查弧长公式及圆心角，弧，弦之间的关系，掌握圆心角，弧，弦之间的关系是解题的关键.

22.如图，海中有一个小岛 A,该岛的四周 10 海里的范围内有暗礁，有一货轮在海面上由西向东航行，到达 B 处时，该货轮位于小岛南偏西 60° 的方向上，再往东行驶 20 海里后到达小岛的南偏西 30° 的方向上的 C 处，如果货轮继续向东航行，是否有触礁危险？请通过计算说明：



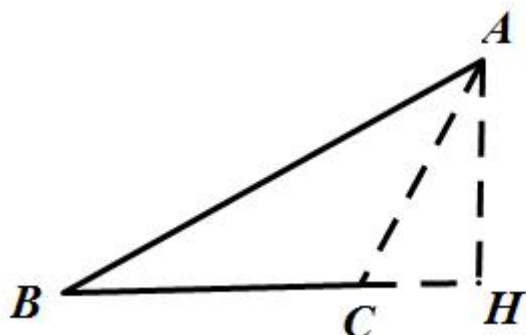
【答案】 不会，见解析

【解析】

【分析】

先过 A 作 AH 垂直于 BC 交 BC 的延长线于点 H，解直角三角形求出 AH 的长度，然后与 10 进行比较即可，若 $AH > 10$ ，则不会有危险，反之则有危险.

【详解】 过 A 作 AH 垂直于 BC 交 BC 的延长线于点 H；



由题意可得 $\angle BAH = 60^\circ$ ， $\angle CAH = 30^\circ$ ；

$$\therefore \angle ABH = 30^\circ, \angle ACH = 60^\circ$$

$$\text{设 } CH = x, \text{ 在 } RT \triangle ACH \text{ 中, } \tan 60^\circ = \frac{AH}{CH} = \sqrt{3}$$

$$AH = \sqrt{3}CH = \sqrt{3}x$$

$$\text{在 } RT \triangle ABH \text{ 中, } \tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$BH = 3x$$

$$\because BC = 20$$

$$\therefore BH = BC + CH = 20 + x$$

$$\therefore 20 + x = 3x, \quad x = 10$$

$$AH = \sqrt{3}x = 10\sqrt{3} \text{ 海里} > 10 \text{ 海里}$$

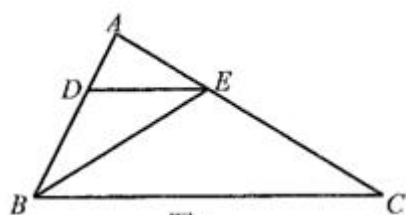
所以，不会有触礁危险.

【点睛】 本题主要考查解直角三角形，掌握解直角三角形的方法是解题的关键.

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上， $DE \parallel BC$ ， $\angle ABE = \angle C$ ，

(1) 求证： $BE^2 = DE \cdot BC$

(2) 当 BE 平分 $\angle ABC$ 时，求证： $\frac{BD}{BE} = \frac{AE}{AB}$



【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用平行线的性质可知 $\angle DEB = \angle EBC$ ，则有 $\triangle BED \sim \triangle CEB$ ，利用相似三角形的性质即可得出结论；

(2) 利用平行线的性质及角平分线的性质可知 $\triangle DAE \sim \triangle EAB$ ，利用相似三角形的性质即可得出结论.

【详解】解：(1) $\because DE \parallel BC$

$$\therefore \angle DEB = \angle EBC$$

$$\because \angle ABE = \angle C$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle CEB$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{BE}$$

$$\therefore BE^2 = DE \cdot BC$$

(2) $\because BE$ 平分 $\angle ABC$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC$$

$$\because DE \parallel BC$$

$$\therefore \angle DEB = \angle EBC, \angle C = \angle AED = \angle ABE$$

$$\because \angle ABE = \angle DEB$$

$$\therefore BD = DE$$

$$\because \angle A = \angle A, \angle AED = \angle ABE$$

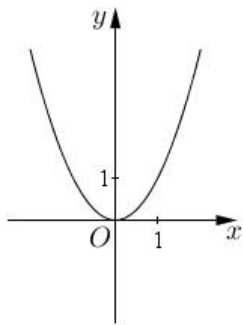
$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle EAB$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AE}{AB}$$

【点睛】本题主要考查平行线的性质，角平分线定义，相似三角形的判定及性质，掌握三角形相似的判定方法是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，将点 $P_1(a, b-a)$ 定义为点 $P(a, b)$ 的“关联点”. 已知点 $A(x, y)$

在函数 $y = x^2$ 的图像上，将点 A 的“关联点”记为点 A_1 .



- (1) 请在如图基础上画出函数 $y = x^2 - 2$ 的图像，简要说明画图方法；
- (2) 如果点 A_1 在函数 $y = x^2 - 2$ 的图像上，求点 A_1 的坐标；
- (3) 将点 $P_2(a, b - na)$ 称为点 $P(a, b)$ 的“待定关联点”（其中 $n \neq 0$ ），如果点 $A(x, y)$ 的“待定关联点” A_2 在函数 $y = x^2 - n$ 的图像上，试用含 n 的代数式表示点 A_2 的坐标.

【答案】 (1) 见解析，将图中的抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位长，可得抛物线 $y = x^2 - 2$ ；

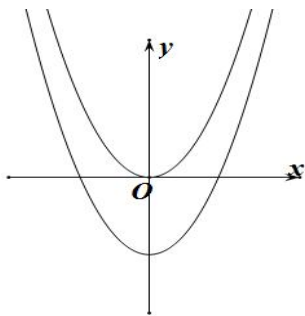
(2) (2,2)； (3) (1,1-n)

【解析】

【分析】

- (1) 利用图像的平移规律，将 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位长度即可得到 $y = x^2 - 2$
- (2) 先根据题意求出 $A_1(x, y - x)$ ，再代入到 $y = x^2 - 2$ 中，联合 A 代入到 $y = x^2$ 即可求出答案.
- (3) 将 A_2 代入 $y = x^2 - n$ 中解出 x 的值，可点 A_2 的坐标即可用含 n 的代数式表示.

【详解】 如图



将图 9 中的抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位长，可得抛物线 $y = x^2 - 2$

画法：①列表；②描点（五点画图法）；③用光滑的曲线连接这五个点.

(2) 由题意，得点 $A(x, y)$ 的“关联点”为 $A_1(x, y - x)$

由点 $A(x, y)$ 在抛物线 $y = x^2$ 上，可得 $A(x, x^2)$ ， $A_1(x, x^2 - x)$

又 $\because A_1(x, y - x)$ 在抛物线 $y = x^2 - 2$ 上， $\therefore x^2 - x = x^2 - 2$

解得 $x = 2$. 将 $x = 2$ 代入 $A_1(x, x^2 - x)$ ，得 $A_1(2, 2)$

(3) 点 $A(x, y)$ 的“待定关联点”为 $A_2(x, x^2 - nx)$ ，

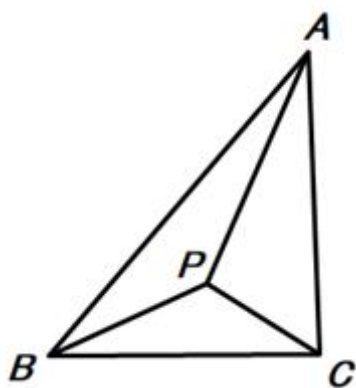
$\because A_2(x, x^2 - nx)$ 在抛物线 $y = x^2 - n$ 的图像上， $\therefore x^2 - nx = x^2 - n$.

$\therefore n - nx = 0$, $n(1 - x) = 0$. 又 $\because n \neq 0$ ， $\therefore x = 1$.

当 $x = 1$ 时， $x^2 - nx = 1 - n$ ，故可得 $A_2(1, 1 - n)$.

【点睛】 本题主要考查二次函数，读懂题意，理解关联点的意义是解题的关键.

25. 已知：点 P 在 $\triangle ABC$ 内，且满足 $\angle APB = \angle APC$ (如下图)， $\angle APB + \angle BAC = 180^\circ$,



(1) 求证： $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ ：

(2) 如下图, 如果 $\angle APB=120^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$ 求 $\frac{PC}{PB}$ 的值;

(3) 如图, 当 $\angle BAC=45^\circ$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形时, 求 $\tan \angle PBC$ 的值.

【答案】 (1) 见解析; (2) 4; (3) 2 或 $\frac{1}{2}$ 或 1

【解析】

【分析】

(1) 由已知和等量代换得 $\angle PBA=\angle PAC$, 再根据 $\angle APB=\angle APC$ 可证明 $\triangle PAB \sim \triangle PCA$

(2) 由 $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ 可得 $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} = \frac{AB}{AC}$, 通过变形得到 $\frac{PC}{PB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$, 再利用 $\angle APB=120^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$ 求出 $\frac{AC}{AB}$, 则可得出 $\frac{PC}{PB}$ 的值.

(3) 当 $\angle BAC=45^\circ$ 时, 可以推出 $\tan \angle BPC = \frac{PC}{PB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 分 $BA=BC$, $CA=CB$, $AB=AC$ 三种情况, 分情况讨论即可.

【详解】 (1) $\because \angle APB + \angle PBA + \angle PAB = 180^\circ$, $\angle APB + \angle BAC = 180^\circ$

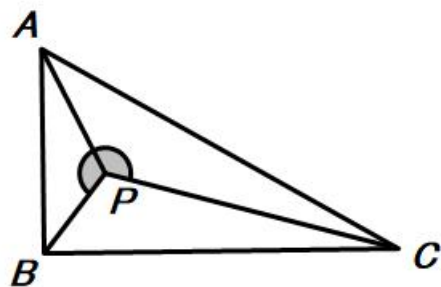
$$\therefore \angle BAC = \angle PAB + \angle PBA$$

$$\therefore \angle PBA = \angle PAC$$

$$\because \angle APB = \angle APC$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCA$$

(2)



$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCA$$

$$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \frac{PC}{PB} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PA}{PB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \angle APB = 120^\circ$$

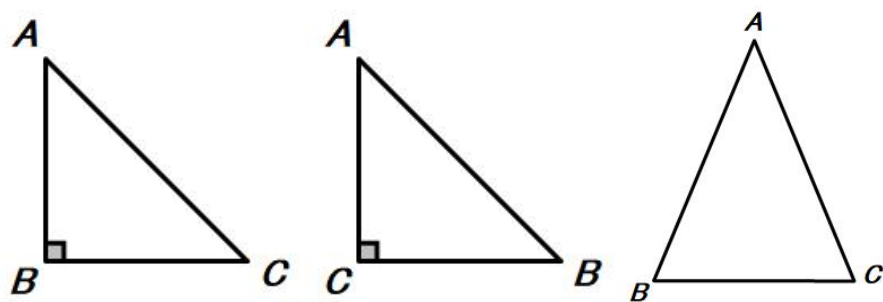
$$\therefore \angle BAC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = 2$$

$$\therefore \frac{PC}{PB} = 4$$

(3)



$$\therefore \angle BAC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle APB = 135^\circ = \angle APC$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ$$

$$\tan \angle BPC = \frac{PC}{PB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$, $\triangle ABC$ 是等腰三角形

当 $BA = BC$ 时, 由勾股定理可得 $AC = \sqrt{2}AB$, $\tan \angle BPC = (\sqrt{2})^2 = 2$

当 $CA = CB$ 时, 由勾股定理可得 $AB = \sqrt{2}BC$, $\tan \angle BPC = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

当 $AB = AC$ 时, $\tan \angle BPC = 1$

综上所述, $\tan \angle BPC = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 1

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定及性质, 等腰三角形分情况讨论等, 能够找到三角形相似的条件和分情况讨论是解题的关键.

