

2019 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）下列自然数中，素数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 9

2.（4 分）下列运算正确的是（ ）

- A. $(a^2)^3 = a^5$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ C. $(2a)^2 = 4a$ D. $a^6 \div a^3 = a^2$

3.（4 分）反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二、四象限内，则点 $(m, -1)$ 在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4.（4 分）为了了解某校九年级 400 名学生的体重情况，从中抽取 50 名学生的体重进行统计分析，在这个问题中，样本是指（ ）

- A. 400
B. 被抽取的 50 名学生
C. 400 名学生
D. 被抽取的 50 名学生的体重

5.（4 分）下列等式成立的是（ ）

- A. $-(-\vec{a}) = \vec{a}$ B. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ C. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$ D. $\vec{0} - \vec{a} = \vec{a}$

6.（4 分）半径分别为 1 和 5 的两个圆相交，它们的圆心距可以是（ ）

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分） $\sqrt{4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8.（4 分）因式分解： $a^2 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

9.（4 分）方程 $\sqrt{x+1} = 3$ 的根是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

10.（4 分）直线 $y = 2x - 3$ 的截距是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11.（4 分）不等式组 $\begin{cases} 2x > 5, \\ x - 3 < 0 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

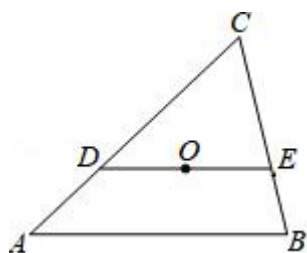
12.（4 分）若关于 x 的方程 $x^2 - (2m - 1)x + m^2 = 0$ 没有实数根，则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13.（4 分）掷一枚质地均匀的正方体骰子，骰子的六个面分别标有 1 到 6 的点数，向上的一面出现的点数是 2 的倍数的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

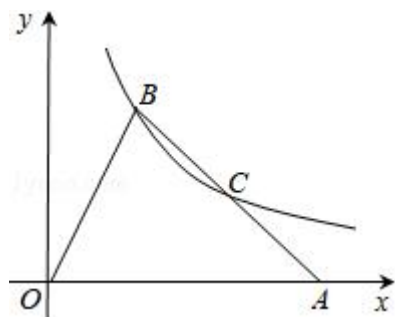
14. (4分) 秋季新学期开学时, 某中学对六年级新生掌握“中学生日常行为规范”的情况进行了知识测试, 测试成绩全部合格, 现学校随机选取了部分学生的成绩, 整理并制作成了不完整的图表(如表所示), 图表中 $c =$ _____.

分 数 段	频数	频率
$60 \leq x < 70$	6	a
$70 \leq x < 80$	20	0.4
$80 \leq x < 90$	15	b
$90 \leq x \leq 100$	c	0.18

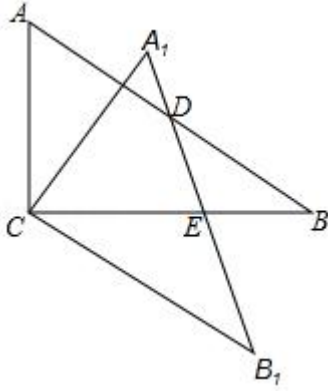
15. (4分) 正九边形的中心角等于_____度.
16. (4分) 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 O 作 $DE \parallel AB$, 分别交 AC 、 BC 于点 D 、 E , 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 那么 $\overrightarrow{DO} =$ _____ (结果用 $\vec{a}$ 表示).



17. (4分) 如图, 函数 $y = \frac{12}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过 $\triangle OAB$ 的顶点 B 和边 AB 的中点 C , 如果点 B 的横坐标为 3, 则点 C 的坐标为_____.



18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 顺时针旋转, 得到 $\triangle A_1B_1C$, 点 A 、 B 分别与点 A_1 、 B_1 对应, 边 A_1B_1 分别交边 AB 、 BC 于点 D 、 E , 如果点 E 是边 A_1B_1 的中点, 那么 $\frac{BD}{B_1C} =$ _____.

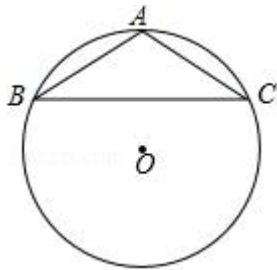


三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ - \cos 30^\circ} - (27)^{\frac{1}{3} + |1 - \sqrt{3}|} - (\sqrt{2019})^0$.

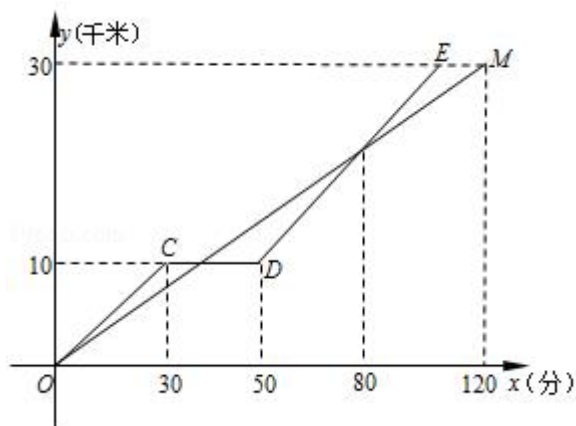
20.（10 分）解分式方程： $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

21.（10 分）如图，已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的外部， $AB = AC = 4$ ， $BC = 4\sqrt{3}$ ，求 $\odot O$ 的半径.



22.（10 分） A 、 B 两地相距 30 千米，已知甲、乙两人分别骑自行车和摩托车从 A 地出发前往 B 地，途中乙因修车耽误了些时间，然后又继续赶路. 图中的线段 OM 和折线 $OCDE$ 分别反映了甲、乙两人所行的路程 y （千米）与时间 x （分）的函数关系，根据图象提供的信息回答下列问题：

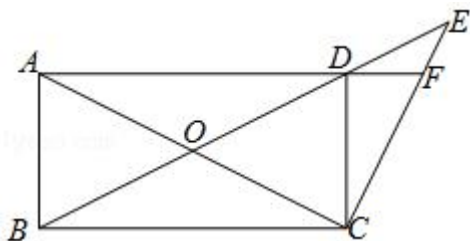
- （1）甲骑自行车的速度是_____千米/分钟；
- （2）两人第二次相遇时距离 A 地_____千米；
- （3）线段 DE 反映了乙修好车后所行的路程 y （千米）与时间 x （分）的函数关系. 请求出线段 DE 的表达式及其定义域.



23. (12分) 如图, 已知四边形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , $DO = BO$, 过点 C 作 $CE \perp AC$, 交 BD 的延长线于点 E , 交 AD 的延长线于点 F , 且满足 $\angle DCE = \angle ACB$.

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形;

(2) 求证: $\frac{DE}{EF} = \frac{AD}{CD}$.



24. (12分) 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过原点 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$, 直线 $y = 2x$ 经过抛物线的顶点 B , 点 C 是抛物线上一点, 且位于对称轴的右侧, 联结 BC 、 OC 、 AB , 过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴, 分别交线段 OB 、 AB 于点 E 、 F .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 当 $BC = CE$ 时, 求证: $\triangle BCE \sim \triangle ABO$;

(3) 当 $\angle CBA = \angle BOC$ 时, 求点 C 的坐标.

2019 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）下列自然数中，素数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 9

【分析】根据素数的概念判断即可.

【解答】解：素数是 2，

故选：B.

【点评】此题考查有理数，关键是根据素数的概念解答.

2.（4 分）下列运算正确的是（ ）

- A. $(a^2)^3 = a^5$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ C. $(2a)^2 = 4a$ D. $a^6 \div a^3 = a^2$

【分析】分别根据同底数幂相乘，底数不变指数相加；幂的乘方，底数不变指数相乘；同底数幂相除，底数不变指数相减，对各选项计算后利用排除法求解.

【解答】解：A、 $(a^2)^3 = a^6$ ，错误；

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，正确；

C、 $(2a)^2 = 4a^2$ ，错误；

D、 $a^6 \div a^3 = a^3$ ，错误；

故选：B.

【点评】本题考查了同底数幂的乘法，幂的乘方，同底数幂的除法，熟练掌握运算性质是解题的关键.

3.（4 分）反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二、四象限内，则点 $(m, -1)$ 在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据反比例函数的性质，结合反比例函数图象所在象限，求出 m 的取值范围，再由点的坐标特点，确定点所在象限.

【解答】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二、四象限内，

$\therefore m < 0$,

$\therefore$ 点 $(m, -1)$ 的横纵坐标都为负，

∴点 M 在第三象限，

故选：C.

【点评】 本题主要考查了反比例函数的性质，象限内点的坐标特征，关键是根据反比例函数图象的位置确定 m 的取值范围.

4. (4分) 为了了解某校九年级 400 名学生的体重情况，从中抽取 50 名学生的体重进行统计分析，在这个问题中，样本是指 ()

A. 400

B. 被抽取的 50 名学生

C. 400 名学生

D. 被抽取的 50 名学生的体重

【分析】 总体是指考查的对象的全体，个体是总体中的每一个考查的对象，样本是总体中所抽取的一部分个体，而样本容量则是指样本中个体的数目. 我们在区分总体、个体、样本、样本容量，这四个概念时，首先找出考查的对象. 从而找出总体、个体. 再根据被收集数据的这一部分对象找出样本，最后再根据样本确定出样本容量.

【解答】 解：样本是抽取 50 名学生的体重，

故选：D.

【点评】 考查了总体、个体、样本、样本容量，解题要分清具体问题中的总体、个体与样本，关键是明确考查的对象. 总体、个体与样本的考查对象是相同的，所不同的是范围的大小. 样本容量是样本中包含的个体的数目，不能带单位.

5. (4分) 下列等式成立的是 ()

A. $-(\vec{a}) = \vec{a}$ B. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ C. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$ D. $\vec{0} - \vec{a} = \vec{a}$

【分析】 根据平面向量的线性运算法则即可求出答案.

【解答】 解：(B) 原式 $= \vec{0}$ ，故 B 错误；

(C) $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$ ，故 C 错误；

(D) 原式 $= -\vec{a}$ ，故 D 错误；

故选：A.

【点评】 本题考查平面向量，解题的关键是熟练运用平面向量的运算法则，本题属于基础题型.

6. (4分) 半径分别为 1 和 5 的两个圆相交, 它们的圆心距可以是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】根据两圆相交时圆心距与两圆半径之间的数量关系进行解答.

【解答】解: $\because 5 - 1 = 4, 1 + 5 = 9,$

$\therefore$ 相交时, $4 < \text{圆心距} < 9,$

$\therefore$ 只有 C 中 5 满足.

故选: C.

【点评】本题利用两圆相交时, 圆心距与两圆半径之间的数量关系进行判断.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) $\sqrt{4} = \underline{2}$.

【分析】如果一个数 x 的平方等于 a , 那么 x 是 a 的算术平方根, 由此即可求解.

【解答】解: $\because 2^2 = 4,$

$\therefore \sqrt{4} = 2.$

故答案为: 2

【点评】此题主要考查了学生开平方的运算能力, 比较简单.

8. (4分) 因式分解: $a^2 - 9 = \underline{(a+3)(a-3)}$.

【分析】 $a^2 - 9$ 可以写成 $a^2 - 3^2$, 符合平方差公式的特点, 利用平方差公式分解即可.

【解答】解: $a^2 - 9 = (a+3)(a-3).$

【点评】本题考查了公式法分解因式, 熟记平方差公式的结构特点是解题的关键.

9. (4分) 方程 $\sqrt{x+1} = 3$ 的根是 $x = \underline{8}$.

【分析】把方程两边平方去根号后求解.

【解答】解: 方程两边平方得: $x+1 = 9$, 解得: $x = 8$,

经检验: $x = 8$ 是方程的解.

故答案是: 8.

【点评】本题考查了无理方程的解法, 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了平方法.

10. (4分) 直线 $y = 2x - 3$ 的截距是 $\underline{-3}$.

【分析】由一次函数 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距是 b , 可求解.

【解答】解: $\because$ 在一次函数 $y = 2x - 3$ 中,

$b = -3,$

∴一次函数 $y = 2x - 3$ 在 y 轴上的截距 $b = -3$.

故答案是： -3 .

【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征. 一次函数图象上的点的坐标，一定满足该函数的关系式.

11. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 2x > 5, \\ x - 3 < 0 \end{cases}$ 的解集是 $\frac{5}{2} < x < 3$.

【分析】 分别解两个不等式得到 $x > \frac{5}{2}$ 和 $x < 3$ ，然后根据大小小大中间找确定不等式组的解集.

【解答】 解： $\begin{cases} 2x > 5 \text{ ①} \\ x - 3 < 0 \text{ ②} \end{cases}$,

解①得 $x > \frac{5}{2}$,

解②得 $x < 3$,

所以不等式组的解集为 $\frac{5}{2} < x < 3$.

故答案为 $\frac{5}{2} < x < 3$.

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组：解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分，利用数轴可以直观地表示不等式组的解集. 解集的规律：同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到.

12. (4分) 若关于 x 的方程 $x^2 - (2m - 1)x + m^2 = 0$ 没有实数根，则 m 的取值范围是 $m > \frac{1}{4}$.

【分析】 根据根的判别式的意义得到 $\Delta = (2m - 1)^2 - 4m^2 < 0$ ，然后解不等式即可.

【解答】 解：根据题意 $\Delta = (2m - 1)^2 - 4m^2 < 0$,

整理得 $-4m + 1 < 0$,

解得 $m > \frac{1}{4}$.

故答案为 $m > \frac{1}{4}$.

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根.

13. (4分) 掷一枚质地均匀的正方体骰子，骰子的六个面分别标有 1 到 6 的点数，向上的

一面出现的点数是 2 的倍数的概率是 $\frac{1}{2}$.

【分析】共有 6 种等可能的结果数，其中点数是 2 的倍数有 2、4 和 6，从而利用概率公式可求出向上的一面出现的点数是 2 的倍数的概率.

【解答】解：掷一次骰子，向上的一面出现的点数是 2 的倍数的有 2、4、6，
故骰子向上的一面出现的点数是 2 的倍数的概率是： $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$.

14. (4 分) 秋季新学期开学时，某中学对六年级新生掌握“中学生日常行为规范”的情况进行了知识测试，测试成绩全部合格，现学校随机选取了部分学生的成绩，整理并制作成了不完整的图表（如表所示），图表中 $c = \underline{9}$.

分 数 段	频数	频率
$60 \leq x < 70$	6	a
$70 \leq x < 80$	20	0.4
$80 \leq x < 90$	15	b
$90 \leq x \leq 100$	c	0.18

【分析】根据表格中的数据可以求得抽查的学生数，从而可以求得 c 的值.

【解答】解： $\frac{20}{0.4} = 50$,

$$c = 50 - 6 - 20 - 15 = 9,$$

故答案为：9

【点评】本题考查频数分布表，解题的关键是明确题意，利用表格中的数据，求出所求问题的答案.

15. (4 分) 正九边形的中心角等于 $\underline{40}$ 度.

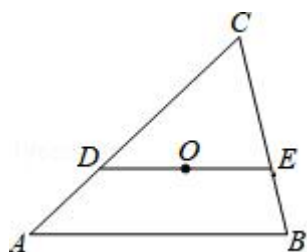
【分析】利用 360 度除以边数 9，即可求解.

【解答】解：正九边形的中心角等于： $\frac{360}{9} = 40^\circ$.

故答案是：40.

【点评】本题考查了正多边形的计算，理解正多边形的中心角相等是关键.

16. (4分) 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 O 作 $DE \parallel AB$, 分别交 AC 、 BC 于点 D 、 E , 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 那么 $\overrightarrow{DO} = -\frac{1}{3}\vec{a}$. (结果用 $\vec{a}$ 表示).



【分析】连接 CO 并延长交 AB 于点 M , 因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 可得 M 是 AB 的中点, 由 $DE \parallel AB$, 可得 $\triangle CDO \sim \triangle CAM$, 即 $\frac{DO}{AM} = \frac{CO}{CM} = \frac{2}{3}$, 即可得出 DO 的长.

【解答】解: 如图, 连接 CO 并延长交 AB 于点 M ,

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore M$ 是 AB 的中点,

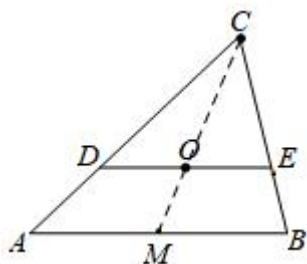
$\because DE \parallel AB$,

$\therefore \triangle CDO \sim \triangle CAM$,

$$\therefore \frac{DO}{AM} = \frac{CO}{CM} = \frac{2}{3},$$

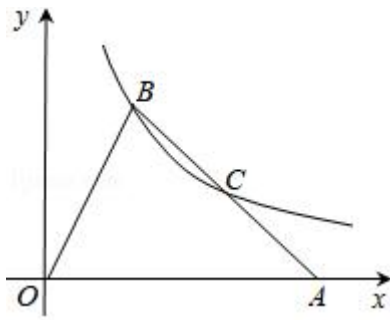
$$\therefore DO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a.$$

故答案为: $\frac{1}{3}a$.



【点评】本题考查三角形重心的概念和性质, 相似三角形的判定和性质. 解题的关键是掌握三角形重心的概念和性质.

17. (4分) 如图, 函数 $y = \frac{12}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过 $\triangle OAB$ 的顶点 B 和边 AB 的中点 C , 如果点 B 的横坐标为 3, 则点 C 的坐标为 $(6, 2)$.



【分析】把 B 点的横坐标代入反比例函数的解析式求得 B 点的纵坐标，再根据 C 点 AB 的中点求得 C 点的纵坐标，进而代入反比例函数的解析式中求得其横坐标便可．

【解答】解：把 $x=3$ 代入 $y=\frac{12}{x}$ ($x>0$) 中，得 $y=4$ ，

$\therefore B(3, 4)$ ，

$\because C$ 点是 AB 的中点， A 点在 x 轴上，

$\therefore C$ 点的纵坐标为： $4 \div 2 = 2$ ，

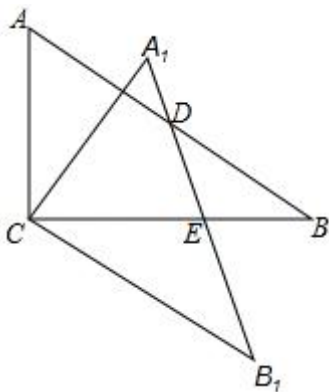
把 $y=2$ 代入 $y=\frac{12}{x}$ ($x>0$) 中，得 $x=6$ ，

$\therefore C(6, 2)$ ．

【点评】本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标特征，中点坐标公式，关键是由 B 点纵坐标求出 C 点的纵坐标．

18. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 顺时针旋转，

得到 $\triangle A_1B_1C$ ，点 A 、 B 分别与点 A_1 、 B_1 对应，边 A_1B_1 分别交边 AB 、 BC 于点 D 、 E ，如果点 E 是边 A_1B_1 的中点，那么 $\frac{BD}{B_1C} = \frac{3}{5}$ ．



【分析】设 $AC = 3x$ ， $AB = 5x$ ，可求 $BC = 4x$ ，由旋转的性质可得 $CB_1 = BC = 4x$ ， $A_1B_1 = 5x$ ， $\angle ACB = \angle A_1CB_1$ ，由题意可证 $\triangle CEB_1 \sim \triangle DEB$ ，可得 $\frac{BD}{B_1C} = \frac{BE}{B_1E} = \frac{1.5x}{2.5x} = \frac{3}{5}$ ，即可求解．

【解答】解：∵ $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ ，

∴ 设 $AC = 3x$ ， $AB = 5x$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4x,$$

∴ 将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 顺时针旋转，得到 $\triangle A_1B_1C$ ，

∴ $CB_1 = BC = 4x$ ， $A_1B_1 = 5x$ ， $\angle ACB = \angle A_1CB_1$ ，

∴ 点 E 是 A_1B_1 的中点，

$$\therefore CE = \frac{1}{2}A_1B_1 = 2.5x = B_1E,$$

∴ $BE = BC - CE = 1.5x$ ，

∴ $\angle B = \angle B_1$ ， $\angle CEB_1 = \angle BED$

∴ $\triangle CEB_1 \sim \triangle DEB$

$$\therefore \frac{BD}{B_1C} = \frac{BE}{B_1E} = \frac{1.5x}{2.5x} = \frac{3}{5}$$

故答案为： $\frac{3}{5}$

【点评】本题考查了旋转的性质，解直角三角形，相似三角形的判定和性质，证 $\triangle CEB_1 \sim \triangle DEB$ 是本题的关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $\frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ - \cos 30^\circ} - (27)^{\frac{1}{3}+|1-\sqrt{3}|} - (\sqrt{2019})^0$.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及零指数幂的性质和绝对值的性质、分数指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式 $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} - 3 + \sqrt{3} - 1 - 1$

$$= 2 - 3 + \sqrt{3} - 2$$
$$= -3 + \sqrt{3}.$$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值以及零指数幂的性质和绝对值的性质、分数指数幂的性质，正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 解分式方程： $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】解：去分母得： $(x+2)^2 - 16 = x - 2$,

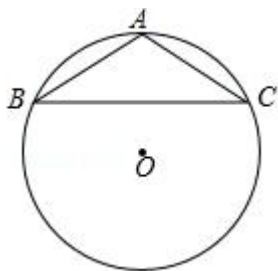
整理得： $x^2 + 3x - 10 = 0$, 即 $(x - 2)(x + 5) = 0$,

解得： $x = 2$ 或 $x = -5$,

经检验 $x = 2$ 是增根，分式方程的解为 $x = -5$.

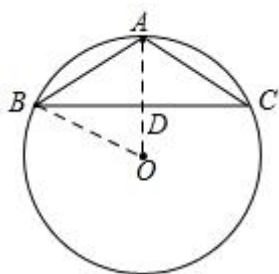
【点评】此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解．解分式方程一定要注意验根．

21. (10 分) 如图，已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的外部， $AB = AC = 4$ ， $BC = 4\sqrt{3}$ ，求 $\odot O$ 的半径．



【分析】连接 AO ，交 BC 于点 D ，连接 BO ，由垂径可求 $AO \perp BC$ ， $BD = CD$ ，即可求 $BD = 2\sqrt{3}$ ，由勾股定理可求 AD 的长，圆的半径．

【解答】解：如图，连接 AO ，交 BC 于点 D ，连接 BO



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

又 AO 是半径，

$$\therefore AO \perp BC, BD = CD$$

$$\because BC = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$$

$$\text{又 } \because AB = 4,$$

$$\therefore AD = 2$$

设半径为 r . 在 $\text{Rt}\triangle BDO$ 中, $\because BD^2 + DO^2 = BO^2$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 + (r-2)^2 = r^2$$

$$\therefore r = 4$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 4.

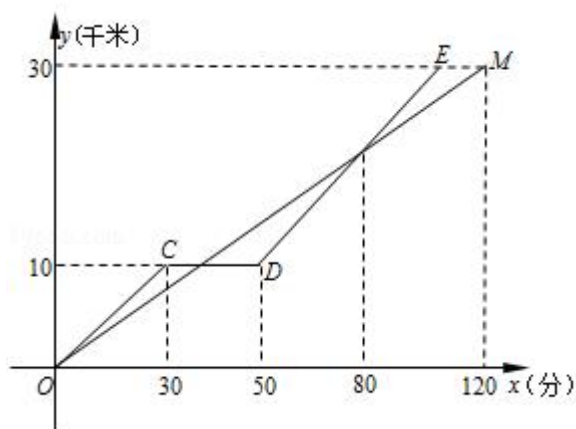
【点评】 本题考查了三角形的外接圆与外心, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 熟练运用勾股定理求线段的长是本题的关键.

22. (10 分) A 、 B 两地相距 30 千米, 已知甲、乙两人分别骑自行车和摩托车从 A 地出发前往 B 地, 途中乙因修车耽误了些时间, 然后又继续赶路. 图中的线段 OM 和折线 $OCDE$ 分别反映了甲、乙两人所行的路程 y (千米) 与时间 x (分) 的函数关系, 根据图象提供的信息回答下列问题:

(1) 甲骑自行车的速度是 $\frac{1}{4}$ 千米/分钟;

(2) 两人第二次相遇时距离 A 地 20 千米;

(3) 线段 DE 反映了乙修好车后所行的路程 y (千米) 与时间 x (分) 的函数关系. 请求出线段 DE 的表达式及其定义域.



【分析】 (1) 根据函数图象中的数据可以求得甲骑自行车的速度;

(2) 根据 (1) 中的答案和函数图象中的数据可以求得两人第二次相遇时距离 A 地的距离;

(3) 根据 (2) 中的答案和一次函数的性质可以求得线段 DE 的表达式及其定义域.

【解答】 解: (1) 由图可得,

甲骑自行车的速度是: $30 \div 120 = \frac{1}{4}$ 千米/分钟,

故答案为: $\frac{1}{4}$;

(2) 两人第二次相遇时距离 A 地: $\frac{1}{4} \times 80 = 20$ 千米,

故答案为: 20;

(3) 设线段 DE 的表达式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

$\because$ 线段 DE 经过点 D (50, 10) 和 (80, 20),

$$\therefore \begin{cases} 50k + b = 10 \\ 80k + b = 20 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{20}{3} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{3},$$

当 $y = 30$ 时, $x = 110$,

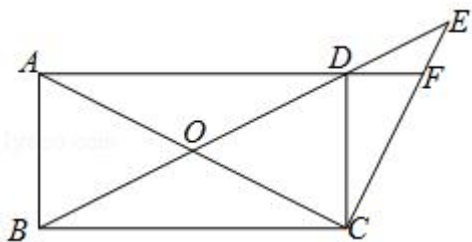
$$\therefore y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{3} (50 \leq x \leq 110).$$

【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

23. (12 分) 如图, 已知四边形 ABCD, $AD \parallel BC$, 对角线 AC、BD 交于点 O, $DO = BO$, 过点 C 作 $CE \perp AC$, 交 BD 的延长线于点 E, 交 AD 的延长线于点 F, 且满足 $\angle DCE = \angle ACB$.

(1) 求证: 四边形 ABCD 是矩形;

(2) 求证: $\frac{DE}{EF} = \frac{AD}{CD}$.



【分析】 (1) 先证明四边形 ABCD 是平行四边形, 再证明 $\angle BCD = 90^\circ$, 即可求解;

(2) 由 $AD \parallel BC$, 得: $\frac{DE}{BD} = \frac{EF}{FC}$, $\cot \angle DAC = \frac{AC}{FC} = \frac{AD}{CD}$, 即可求解.

【解答】 解: (1) 证明 $\because AD \parallel BC$,

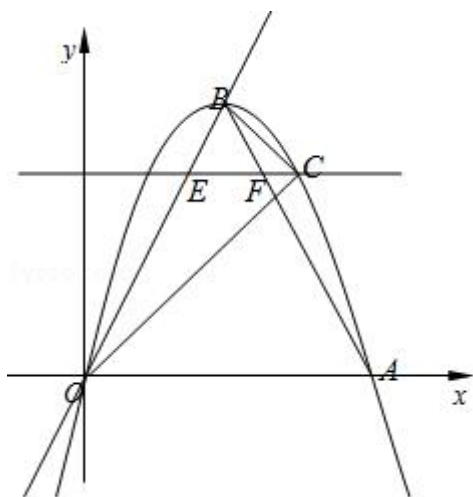
$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DO}{BO},$$

$\because DO = BO,$
 $\therefore AD = BC,$
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\because CE \perp AC,$
 $\therefore \angle ACD + \angle DCE = 90^\circ,$
 $\because \angle DCE = \angle ACB,$
 $\therefore \angle ACB + \angle ACD = 90^\circ$, 即 $\angle BCD = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形;
 (2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore AC = BD, \angle ADC = 90^\circ$,
 $\because AD \parallel BC,$
 $\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{EF}{FC},$
 $\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{FC}$
 $\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AC}{FC},$
 $\because \angle ADC = \angle ACF = 90^\circ$,
 $\therefore \cot \angle DAC = \frac{AC}{FC} = \frac{AD}{CD},$
 $\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AD}{CD}.$

【点评】 本题主要考查对矩形的性质，成比例的线段性质的理解和掌握，此题难度不大．

24. (12分) 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过原点 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$ ，直线 $y = 2x$ 经过抛物线的顶点 B ，点 C 是抛物线上一点，且位于对称轴的右侧，联结 BC 、 OC 、 AB ，过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴，分别交线段 OB 、 AB 于点 E 、 F ．

- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 当 $BC = CE$ 时，求证： $\triangle BCE \sim \triangle ABO$ ；
- (3) 当 $\angle CBA = \angle BOC$ 时，求点 C 的坐标．



【分析】(1) 先根据题意得出抛物线的顶点坐标，设其顶点式，再将原点代入计算可得；

(2) 由 $BC = CE$ 知 $\angle BEF = \angle CBE$ ，再由 $CE \parallel x$ 轴知 $\angle BEF = \angle BOA$ ，根据 $OB = AB = \sqrt{5}$ 知 $\angle BOA = \angle BAO$ ，从而得 $\angle CBE = \angle BEF = \angle BOA = \angle BAO$ ，据此即可得证；

(3) 记 CE 与 y 轴交于点 M ，作 $BN \perp CE$ ，设 $C(m, -2m^2 + 4m)$ 。由 $\angle BEF = \angle BOC + \angle ECO$ ， $\angle BFE = \angle CBA + \angle BCE$ 知 $\angle ECO = \angle BCE$ ，据此得 $\tan \angle ECO = \tan \angle BCE$ 。结合 $\angle OMC = \angle BNC = 90^\circ$ 得 $\frac{OM}{CM} = \frac{BN}{CN}$ ，据此得出关于 m 的方程，解之可得。

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过原点 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$ ，

$\therefore$ 对称轴为 $x = 1$ ，

$\because$ 直线 $y = 2x$ 经过抛物线的顶点 B ，

$\therefore B(1, 2)$ ，

设 $y = a(x - 1)^2 + 2$ ，

$\because$ 抛物线经过原点 $O(0, 0)$ ，

$\therefore a = -2$ ，

$\therefore y = -2x^2 + 4x$ 。

(2) $\because BC = CE$ ，

$\therefore \angle BEF = \angle CBE$ ，

$\because CE \parallel x$ 轴，

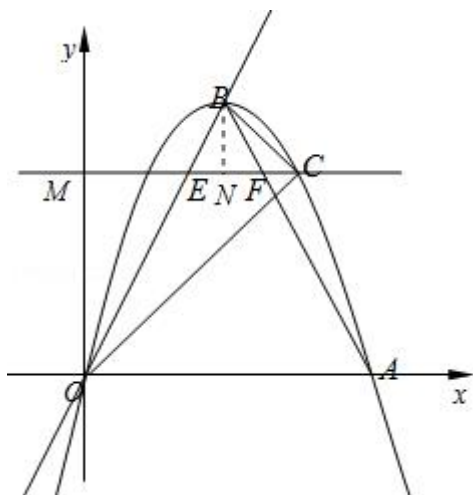
$\therefore \angle BEF = \angle BOA$ ，

$\because B(1, 2)$ ， $A(2, 0)$ ，

$\therefore OB = AB = \sqrt{5}$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \angle BOA &= \angle BAO, \\ \therefore \angle CBE &= \angle BEF = \angle BOA = \angle BAO, \\ \therefore \triangle BCE &\sim \triangle ABO;\end{aligned}$$

(3) 记 CE 与 y 轴交于点 M , 过点 B 作 $BN \perp CE$, 垂足为点 N .



设 $C(m, -2m^2+4m)$.

$$\because \angle BEF = \angle BOC + \angle ECO, \quad \angle BFE = \angle CBA + \angle BCE,$$

$$\text{又 } \angle CBA = \angle BOC, \quad \angle BEF = \angle BFE,$$

$$\therefore \angle ECO = \angle BCE,$$

$$\therefore \tan \angle ECO = \tan \angle BCE.$$

$$\because CE \parallel x \text{ 轴}, \quad x \text{ 轴} \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle OMC = \angle BNC = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{OM}{CM} = \frac{BN}{CN},$$

$$\therefore \frac{-2m^2+4m}{m} = \frac{2+2m^2-4m}{m-1},$$

$$\therefore m_1 = 1 \text{ (舍)}, \quad m_2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

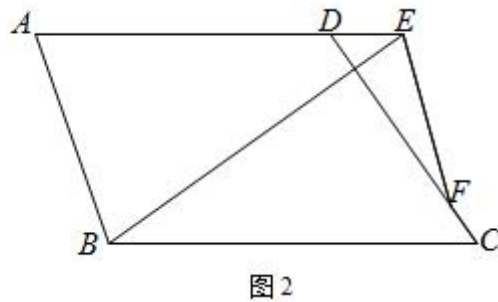
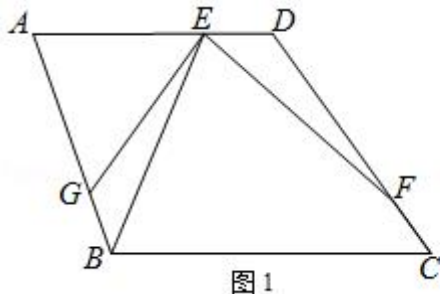
【点评】 本题是二次函数的综合问题, 解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式, 相似三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、三角形外角的性质等知识点.

25. (14 分) 已知四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 2\angle C$, 点 E 是射线 AD 上一点, 点 F 是射线 DC 上一点, 且满足 $\angle BEF = \angle A$.

(1) 如图 1, 当点 E 在线段 AD 上时, 若 $AB = AD$, 在线段 AB 上截取 $AG = AE$, 联结 GE . 求证: $GE = DF$;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 AD 的延长线上时, 若 $AB = 3$, $AD = 4$, $\cos A = \frac{1}{3}$, 设 $AE = x$, $DF = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域;

(3) 记 BE 与 CD 交于点 M , 在 (2) 的条件下, 若 $\triangle EMF$ 与 $\triangle ABE$ 相似, 求线段 AE 的长.



【分析】 (1) 根据全等三角形的判定和性质解答即可;

(2) 在射线 AB 上截取 $AH = AE$, 联结 EH , 根据相似三角形的判定和性质以及勾股定理解答即可;

(3) 记 EH 与 BC 相交于点 N , 分 $\angle AEB = \angle EMF$ 或 $\angle AEB = \angle EFM$ 两种情况进行解答即可.

【解答】 解: (1) $\because AG = AE$,

$$\therefore \angle AGE = \frac{180^\circ - \angle A}{2}.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle C = \frac{180^\circ - \angle A}{2},$$

$$\therefore \angle AGE = \angle C,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle D + \angle C = 180^\circ, \text{ 又 } \angle BGE + \angle AGE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BGE = \angle D,$$

$$\because \angle BEF + \angle FED = \angle A + \angle GBE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle A,$$

$$\therefore \angle FED = \angle GBE,$$

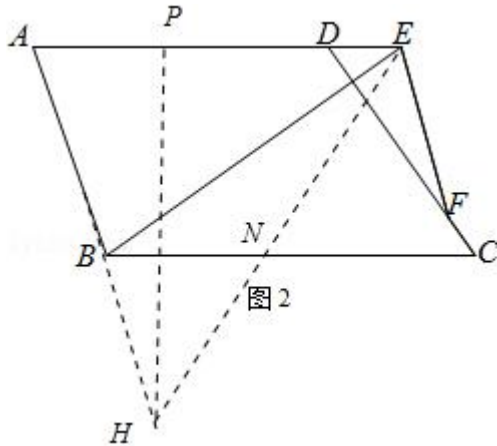
$$\text{又 } AB = AD, AG = AE,$$

$$\therefore BG = ED,$$

$$\therefore \triangle GBE \cong \triangle DEF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore GE = DF;$$

(2) 在射线 AB 上截取 $AH = AE$, 联结 EH ,



$$\because \angle HBE = \angle A + \angle AEB, \angle DEF = \angle BEF + \angle AEB, \text{ 又 } \angle BEF = \angle A,$$

$$\therefore \angle HBE = \angle DEF.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle C, \angle A + \angle ABC = 180^\circ.$$

$$\because AH = AE,$$

$$\therefore \angle H = \frac{180^\circ - \angle A}{2},$$

$$\text{又 } \angle ABC = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle H = \angle C,$$

$$\therefore \angle H = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle BHE \sim \triangle EDF,$$

$$\therefore \frac{BH}{ED} = \frac{EH}{DF}.$$

过点 H 作 $HP \perp AE$, 垂足为点 P .

$$\because \cos A = \frac{1}{3}, AE = AH = x,$$

$$\therefore AP = \frac{1}{3}x, PH = \frac{2\sqrt{2}}{3}x, PE = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore EH = \frac{2\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\because AB = 3, AD = 4, AE = x, DF = y,$$

$$\therefore \frac{x-3}{x-4} = \frac{\frac{2\sqrt{3}x}{3}}{y},$$

$$\therefore y = \frac{2\sqrt{3}x^2 - 8\sqrt{3}x}{3x-9} (x > 4);$$

(3) 记 EH 与 BC 相交于点 N .

$$\because \triangle EMF \sim \triangle ABE, \angle BEF = \angle A,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EMF, \text{ 或 } \angle AEB = \angle EFM,$$

若 $\angle AEB = \angle EMF$, 又 $\angle AEB < \angle EMF$, 矛盾,

$\therefore$ 此情况不存在,

若 $\angle AEB = \angle EFM$, $\because \triangle BHE \sim \triangle EDF$,

$$\therefore \angle BEH = \angle EFM,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEH,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EBC,$$

$$\therefore \angle BEH = \angle EBC,$$

$$\therefore BN = EN = BH = x - 3,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AB}{AH} = \frac{EN}{EH},$$

$$\therefore \frac{3}{x} = \frac{x-3}{\frac{2\sqrt{3}x}{3}},$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3} + 3,$$

$\therefore$ 线段 AE 的长为 $2\sqrt{3} + 3$.

【点评】 本题属于相似三角形综合题, 考查了全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考压轴题.