

2019 年上海市静安区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{18}$

2.（4 分）计算 $(1-a)(-1-a)$ 的结果是（ ）

- A. $a^2 - 1$ B. $1 - a^2$ C. $a^2 - 2a + 1$ D. $-a^2 + 2a - 1$

3.（4 分）函数 $y = -\frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4.（4 分）如图，在同一平面内，将边长相等的正方形、正五边形的一边重合，那么 $\angle 1$ 的大小是（ ）



- A. 8° B. 15° C. 18° D. 28°

5.（4 分）小明和小丽暑期参加工厂社会实践活动，师傅将他们工作第一周每天生产的合格产品的个数整理成如表 1 两组数据. 那么关于他们工作第一周每天生产的合格产品个数，下列说法中正确的是（ ）

小明	2	6	7	7	8
小丽	2	3	4	8	8

- A. 小明的平均数小于小丽的平均数
B. 两人的中位数相同
C. 两人的众数相同
D. 小明的方差小于小丽的方差

6.（4 分）下列说法中正确的是（ ）

- A. 对角线相等的四边形是矩形
B. 对角线互相垂直的矩形是正方形

C. 顺次联结矩形各边中点所得四边形是正方形

D. 正多边形都是中心对称图形

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7.（4 分）计算： $a^2 \cdot a^4 =$ _____.

8.（4 分）如果 $\frac{\sqrt{x}}{x}$ 有意义，那么 x 的取值范围是_____.

9.（4 分）方程： $\sqrt{x-1} = 3$ 的解为_____.

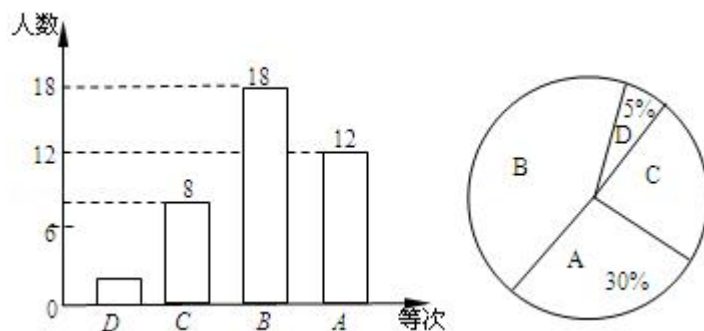
10.（4 分）如果关于 x 的二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 在实数范围内不能分解因式，那么 m 的取值范围是_____.

11.（4 分）某商店三月份的利润是 25000 元，要使五月份的利润达到 36000 元，假设每月的利润增长率相同，那么这个相同的增长率是_____.

12.（4 分）已知正比例函数 $y = -2x$ ，那么 y 的值随 x 的值增大而_____。（填“增大”或“减小”）

13.（4 分）从 0, 1, 2, 3 这四个数字中任取 3 个数，取得的 3 个数中不含 2 的概率是_____.

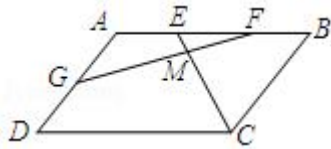
14.（4 分）为了解某校九年级男生 1000 米跑步的水平情况，从中随机抽取部分男生进行测试，并把测试成绩分为 D 、 C 、 B 、 A 四个等次绘制成如图所示的不完整的统计图，那么扇形统计图中表示 C 等次的扇形所对的圆心角的度数为_____度.



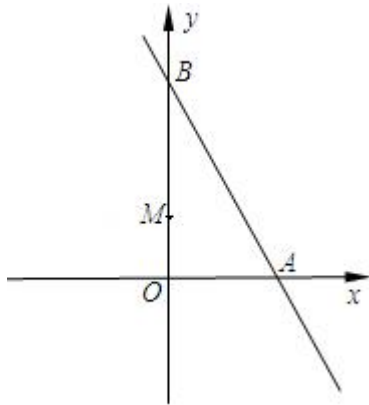
15.（4 分）已知 $\triangle ABC$ 中， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABC}} =$ _____.

16.（4 分）已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2$ ，如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有且只有一个交点，那么 $\odot C$ 的半径是_____.

17.（4 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 是 AB 的三等分点，点 G 是 AD 的中点，联结 EC 、 FG 交于点 M 。已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{MC} =$ _____。（用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示）.



18. (4分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 6)$, $M(0, 2)$. 点 Q 在直线 AB 上, 把 $\triangle BMQ$ 沿着直线 MQ 翻折, 点 B 落在点 P 处, 联结 PQ . 如果直线 PQ 与直线 AB 所构成的夹角为 60° , 那么点 P 的坐标是_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

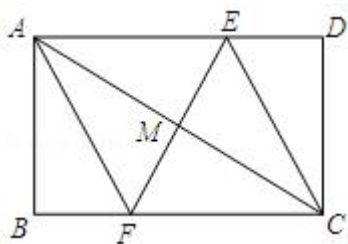
19. (10分) 计算: $4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + |1 - \sqrt{2}|$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + 3xy - 10y^2 = 0 \end{cases}$$

21. (10分) 一个水库的水位在某段时间内持续上涨, 表格中记录了连续 5 小时内 6 个时间点的水位高度, 其中 x 表示时间, y 表示水位高度.

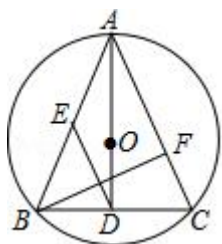
x (小时)	0	1	2	3	4	5	...
y (米)	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	...

- (1) 通过观察数据, 请写出水位高度 y 与时间 x 的函数解析式 (不需要写出定义域);
 - (2) 据估计, 这种上涨规律还会持续, 并且当水位高度达到 8 米时, 水库报警系统会自动发出警报. 请预测再过多久系统会发出警报.
22. (10分) 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 过 AC 的中点 M 作 $EF \perp AC$, 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F .
- (1) 求证: 四边形 $AECF$ 是菱形;
 - (2) 如果 $CD^2 = BF \cdot BC$, 求 $\angle BAF$ 的度数.



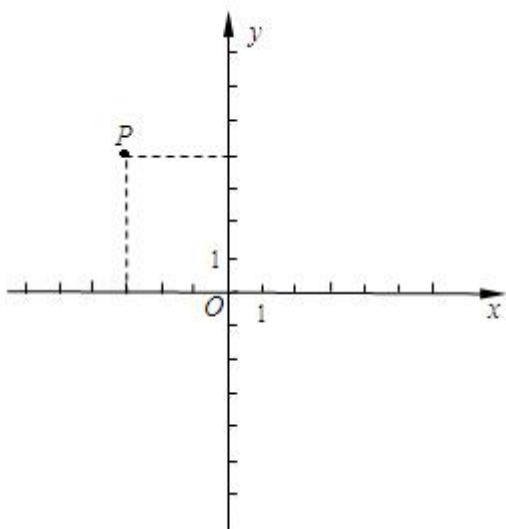
23. (12分) 已知: 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = AC$, 点 E 为弦 AB 的中点, AO 的延长线交 BC 于点 D , 联结 ED . 过点 B 作 $BF \perp DE$ 交 AC 于点 F .

- (1) 求证: $\angle BAD = \angle CBF$;
- (2) 如果 $OD = DB$, 求证: $AF = BF$.



24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图 7), 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过原点, 与 x 轴的另一个交点为 A , 顶点为 $P(-3, 4)$.

- (1) 求这条抛物线表达式;
- (2) 将该抛物线向右平移, 平移后的新抛物线顶点为 Q , 它与 y 轴交点为 B , 联结 PB 、 PQ . 设点 B 的纵坐标为 m , 用含 m 的代数式表示 $\angle BPQ$ 的正切值;
- (3) 连接 AP , 在 (2) 的条件下, 射线 PB 平分 $\angle APQ$, 求点 B 到直线 AP 的距离.

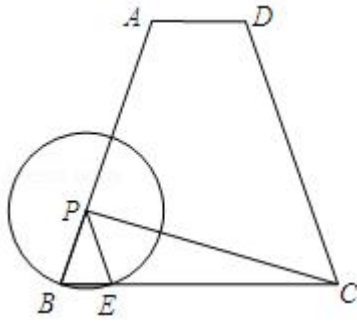


25. (14分) 已知: 如图 8, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $AB = BC = CD = 6$. 动点 P 在射线 BA 上, 以 BP 为半径的 $\odot P$ 交边 BC 于点 E (点 E 与点 C 不重合), 联结 PE 、 PC . 设 $BP = x$, $PC = y$.

(1) 求证: $PE \parallel DC$;

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 联结 PD , 当 $\angle PDC = \angle B$ 时, 以 D 为圆心半径为 R 的 $\odot D$ 与 $\odot P$ 相交, 求 R 的取值范围.



2019 年上海市静安区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{18}$

【分析】各项化简后，利用同类二次根式定义判断即可．

【解答】解：与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ，

故选：C．

【点评】此题考查了同类二次根式，熟练掌握同类二次根式的定义是解本题的关键．

2.（4 分）计算 $(1-a)(-1-a)$ 的结果是（ ）

- A. a^2-1 B. $1-a^2$ C. a^2-2a+1 D. $-a^2+2a-1$

【分析】利用平方差公式计算即可求出值，

【解答】解：原式 $= (-a)^2 - 1^2 = a^2 - 1$ ，

故选：A．

【点评】此题考查了平方差公式，熟练掌握平方差公式是解本题的关键．

3.（4 分）函数 $y = -\frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据反比例函数中 $y = \frac{k}{x}$ ，当 $k < 0$ ，双曲线的两支分别位于第二、第四象限，

在每一象限内 y 随 x 的增大而增大，进而得出答案．

【解答】解：函数 $y = -\frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象位于第四象限．

故选：D．

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质，正确记忆反比例函数图象分布的象限是解题关键．

4.（4 分）如图，在同一平面内，将边长相等的正方形、正五边形的一边重合，那么 $\angle 1$ 的大小是（ ）



- A. 8° B. 15° C. 18° D. 28°

【分析】 $\angle 1$ 的度数是正五边形的内角与正方形的内角的度数的差，根据多边形的内角和定理求得角的度数即可得出结果．

【解答】解： $\because$ 正五边形的内角的度数是 $\frac{1}{5} \times (5 - 2) \times 180^\circ = 108^\circ$ ，

又 $\because$ 正方形的内角是 90° ，

$\therefore \angle 1 = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$ ；

故选：C．

【点评】本题考查了多边形的内角和定理、正方形的性质，求得正五边形的内角的度数是关键．

- 5.（4分）小明和小丽暑期参加工厂社会实践活动，师傅将他们工作第一周每天生产的合格产品的个数整理成如表1两组数据．那么关于他们工作第一周每天生产的合格产品个数，下列说法中正确的是（ ）

小明	2	6	7	7	8
小丽	2	3	4	8	8

- A. 小明的平均数小于小丽的平均数
B. 两人的中位数相同
C. 两人的众数相同
D. 小明的方差小于小丽的方差

【分析】根据众数、中位数、方差和平均数的计算公式分别进行解答即可得出答案．

【解答】解：A、小明的平均数为 $(2+6+7+7+8) \div 5 = 6$ ，小丽的平均数为 $(2+3+4+8+8) \div 5 = 5$ ，故本选项错误；

B、小明的中位数为 7，小丽的中位数为 4，故本选项错误；

C、小明的众数为 7，小丽的众数为 8，故本选项错误；

D、小明的方差为 4.4，小丽的方差为 6.4，小明的方差小于小丽的方差，故原题说法正确；

故选：D．

【点评】此题主要考查了众数、中位数、方差和平均数，熟练掌握定义和公式是解题的关键；一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数．如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数；一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立．

6. (4分) 下列说法中正确的是 ()

- A. 对角线相等的四边形是矩形
- B. 对角线互相垂直的矩形是正方形
- C. 顺次联结矩形各边中点所得四边形是正方形
- D. 正多边形都是中心对称图形

【分析】根据矩形的判定方法对 A 进行判断；根据正方形的判定方法对 B 进行判断；根据矩形的性质、三角形中位线定理以及菱形的判定方法对 C 进行判断；根据中心对称图形的定义对 D 进行判断．

【解答】解： A 对角线相等的平行四边形是矩形，所以 A 选项错误；
 B 、对角线互相垂直的矩形是正方形，所以 B 选项正确；
 C 、顺次联结矩形各边中点所得四边形是菱形，所以 C 选项错误；
 D 、边数为偶数的正多边形都是中心对称图形，所以 D 选项错误．
 故选： B ．

【点评】本题考查了命题与定理：判断一件事情的语句，叫做命题．命题都是由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项，一个命题可以写成“如果…那么…”形式．有些命题的正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理．

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. (4分) 计算： $a^2 \cdot a^4 = \underline{a^6}$ ．

【分析】根据同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，进行运算即可．

【解答】解： $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$ ．
 故答案为： a^6 ．

【点评】此题考查了同底数幂的乘法运算，属于基础题，解答本题的关键是掌握同底数幂的乘法法则.

8. (4分) 如果 $\frac{\sqrt{x}}{x}$ 有意义，那么 x 的取值范围是 $x > 0$.

【分析】根据二次根式有意义的条件以及分式有意义的条件即可求出答案.

【解答】解：由题意可知：
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

解得： $x > 0$,

故答案为： $x > 0$.

【点评】本题考查二次根式，解题的关键是熟练运用二次根式有意义的条件以及分式有意义的条件，本题属于基础题型.

9. (4分) 方程： $\sqrt{x-1} = 3$ 的解为 10.

【分析】将无理方程两边平方，转化为一元一次方程来解.

【解答】解：两边平方得： $x - 1 = 9$,

移项得： $x = 10$.

故本题答案为：10.

【点评】本题由于两边平方，可能产生增根，所以解答以后要验根.

10. (4分) 如果关于 x 的二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 在实数范围内不能分解因式，那么 m 的取值范围是 $m > 4$.

【分析】关于 x 的二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 在实数范围内不能分解因式，就是对应的二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 无实数根，由此可解.

【解答】关于 x 的二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 在实数范围内不能分解因式，就是对应的二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 无实数根，

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4m = 16 - 4m < 0,$$

$$\therefore m > 4.$$

故答案为： $m > 4$.

【点评】本题考查二次三项式的因式分解问题，可转化为对应的二次方程的实数根的情况，属于比较简单的问题.

11. (4分) 某商店三月份的利润是 25000 元，要使五月份的利润达到 36000 元，假设每月的利润增长率相同，那么这个相同的增长率是 20%.

【分析】设每月的利润增长率为 x ，根据该商店三月份及五月份的利润，可得出关于 x

的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论．

【解答】解：设每月的利润增长率为 x ，

依题意，得： $25000(1+x)^2 = 36000$ ，

解得： $x_1 = 0.2 = 20\%$ ， $x_2 = -2.2$ （不合题意，舍去）．

故答案为：20%．

【点评】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键．

- 12.（4分）已知正比例函数 $y = -2x$ ，那么 y 的值随 x 的值增大而 减小．（填“增大”或“减小”）

【分析】直接根据正比例函数的性质解答．

【解答】解：因为正比例函数 $y = -2x$ 中的 $k = -2 < 0$ ，

所以 y 的值随 x 的值增大而 减小．

故答案是：减小．

【点评】本题考查了正比例函数的性质：正比例函数 $y = kx$ （ $k \neq 0$ ）的图象为直线，当 $k > 0$ 时，图象经过第一、三象限， y 值随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时，图象经过第二、四象限， y 值随 x 的增大而减小．

- 13.（4分）从 0，1，2，3 这四个数字中任取 3 个数，取得的 3 个数中不含 2 的概率是 $\frac{1}{4}$ ．

【分析】利用列举法展示所有 4 种等可能的结果数，再确定取得的 3 个数中不含 2 的结果数，然后根据概率公式求解．

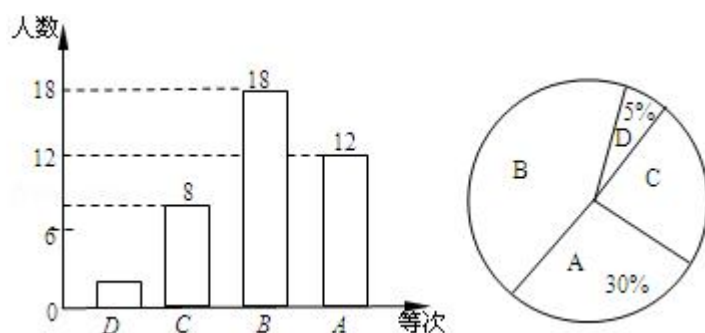
【解答】解：从 0，1，2，3 这四个数字中任取 3 个数有 0、1、2；0、1、3；0、2、3；1、2、3 四种等可能的结果数，

所以取得的 3 个数中不含 2 的概率 $= \frac{1}{4}$ ．

故答案为 $\frac{1}{4}$ ．

【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后根据概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率．

- 14.（4分）为了解某校九年级男生 1000 米跑步的水平情况，从中随机抽取部分男生进行测试，并把测试成绩分为 D 、 C 、 B 、 A 四个等次绘制成如图所示的不完整的统计图，那么扇形统计图中表示 C 等次的扇形所对的圆心角的度数为 72 度．



【分析】 根据 A 等次的人数和所占的百分比求出总人数，再用 C 等次的人数除以总人数求出所占的百分比，然后乘以 360° 即可得出答案．

【解答】 解：扇形统计图中表示 C 等次的扇形所对的圆心角的度数为： $360^\circ \times \frac{8}{12 \div 30\%}$
 $= 72^\circ$ ，

故答案为：72．

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用．读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．

15. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 中，G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$ ．

【分析】 设 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高为 h，根据三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍可得 $\triangle ABG$ 边 AB 上的高线为 $\frac{1}{3}h$ ，再根据三角形的面积公式计算即可得解．

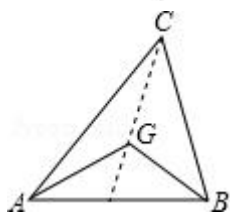
【解答】 解：设 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高为 h，

$\because$ G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore \triangle ABG$ 边 AB 上的高为 $\frac{1}{3}h$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{3}h}{\frac{1}{2}AB \cdot h} = \frac{1}{3}.$$

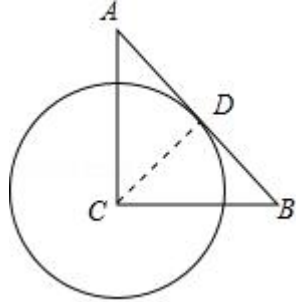
故答案为： $\frac{1}{3}$ ．



【点评】 本题考查了三角形的重心，熟记三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键，本知识点在很多教材上已经不做要求．

16. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 2$, 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有且只有一个交点, 那么 $\odot C$ 的半径是 $\sqrt{2}$.

【分析】根据等腰直角三角形的性质和直线与圆的位置关系解答即可.

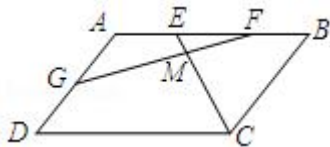


【解答】解:

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 2$,
 $\therefore$ 以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有且只有一个交点,
 $\therefore CD \perp AB$,
 $\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$,
 即 $\odot C$ 的半径是 $\sqrt{2}$
 故答案为: $\sqrt{2}$.

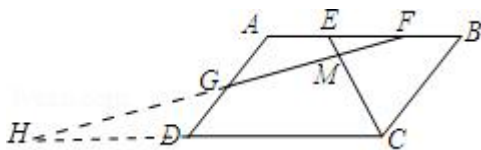
【点评】此题考查直线与圆的位置关系, 关键是根据等腰直角三角形的性质和直线与圆的位置关系解答.

17. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 是 AB 的三等分点, 点 G 是 AD 的中点, 联结 EC 、 FG 交于点 M . 已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{MC} = -\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$. (用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示).



【分析】如图, 延长 FG 交 CD 的延长线于 H . 首先证明 $CM = \frac{5}{6}EC$, 求出 $\overrightarrow{EC}$ 即可解决问题.

【解答】解: 如图, 延长 FG 交 CD 的延长线于 H .



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB \parallel CH$,

$$\therefore \frac{AF}{DH} = \frac{AG}{DG} = 1,$$

∴ $AF = DH$,

设 $AE = EF = FB = a$, 则 $AB = CD = 3a$, $AF = DH = 2a$, $CH = 5a$,

∵ $EF \parallel CH$,

$$\therefore \frac{EM}{CM} = \frac{EF}{CH} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore CM = \frac{5}{6}CE,$$

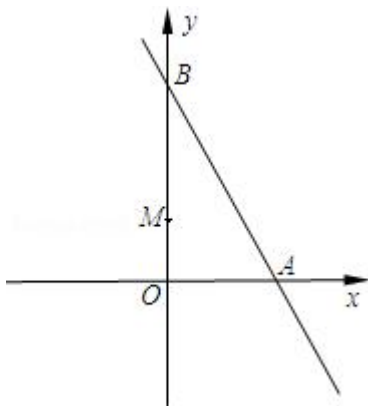
$$\therefore \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{MC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{EC} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b},$$

故答案为 $\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$.

【点评】 本题考查平面向量, 平行四边形的性质, 平行线分线段成比例定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 灵活运用平行线分线段成比例定理解决问题, 属于中考常考题型.

18. (4 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 6)$, $M(0, 2)$. 点 Q 在直线 AB 上, 把 $\triangle BMQ$ 沿着直线 MQ 翻折, 点 B 落在点 P 处, 联结 PQ . 如果直线 PQ 与直线 AB 所构成的夹角为 60° , 那么点 P 的坐标是 $(2\sqrt{3}, 4)$ 或 $(0, -2)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 0)$.



【分析】 先求出 $OA = 2\sqrt{3}$, $OB = 6$, $OM = 2$, $BM = OB - OM = 4$, $\tan \angle BAO = \sqrt{3}$, 得出 $\angle BAO = 60^\circ$, $AB = 2OA = 4\sqrt{3}$, 分 $\angle PQB = 120^\circ$ 或 $\angle PQB = 60^\circ$ 两种情况,

(1) 当 $\angle PQB = 120^\circ$ 时, 又分两种情况: ①延长 PQ 交 OB 于点 N , 则 $\angle BQN = 60^\circ$, $QN \perp BM$, 由折叠得出 $BM = MP = 4$, 求出 $BN = NM = \frac{1}{2}BM = 2$, 由勾股定理得出 $NP = \sqrt{MP^2 - NM^2} = 2\sqrt{3}$, $ON = OM + NM = 4$, 即可得出 P 点的坐标; ② $QM \perp OB$, $BM = MP$, $OP = PM - OM = BM - OM = 4 - 2 = 2$, 即可得出 P 点的坐标;

(2) 当 $\angle PQB = 60^\circ$ 时, Q 点与 A 点重合, $AB = AP = 4\sqrt{3}$, $OP = AP - OA = 2\sqrt{3}$, 即可得出 P 点的坐标;

综上所述即可 P 点的坐标.

【解答】解: $\because A(2\sqrt{3}, 0), B(0, 6), M(0, 2)$,

$$\therefore OA = 2\sqrt{3}, OB = 6, OM = 2, BM = OB - OM = 4,$$

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2OA = 4\sqrt{3},$$

$\therefore$ 直线 PQ 与直线 AB 所构成的夹角为 60° ,

$$\therefore \angle PQB = 120^\circ \text{ 或 } \angle PQB = 60^\circ,$$

(1) 当 $\angle PQB = 120^\circ$ 时, 分两种情况:

①如图 1 所示: 延长 PQ 交 OB 于点 N , 则 $\angle BQN = 60^\circ$,

$$\therefore \angle QNB = 90^\circ, \text{ 即 } QN \perp BM,$$

由折叠得: $BM = MP = 4$, $\angle BQM = \angle PQM$,

$$\therefore \angle PQB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BQM = \angle PQM = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BQN = \angle MQN = 60^\circ,$$

$$\therefore QN \perp BM,$$

$$\therefore BN = NM = \frac{1}{2}BM = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PNM \text{ 中, } NP = \sqrt{MP^2 - NM^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$ON = OM + NM = 4,$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为: } (2\sqrt{3}, 4);$$

②如图 2 所示: $QM \perp OB$, $BM = MP$,

$$OP = PM - OM = BM - OM = 4 - 2 = 2,$$

$\therefore P$ 点的坐标为: $(0, -2)$;

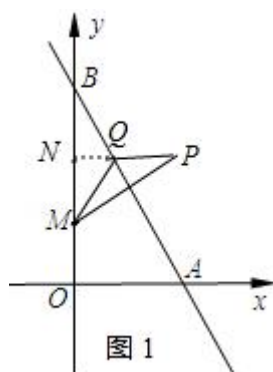
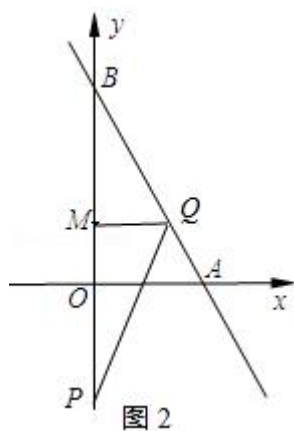
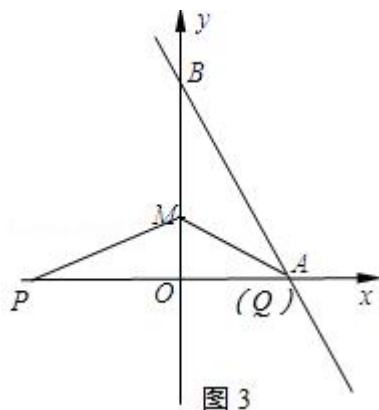
(2) 当 $\angle PQB = 60^\circ$ 时, 如图 3 所示: Q 点与 A 点重合,

由折叠得: $AB = AP = 4\sqrt{3}$,

$$OP = AP - OA = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore P$ 点的坐标为: $(-2\sqrt{3}, 0)$;

综上所述: P 点的坐标为: $(2\sqrt{3}, 4)$ 或 $(0, -2)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 0)$.



【点评】 本题考查了翻折变换的性质、直角三角形的性质、勾股定理、三角函数、坐标等知识, 熟练掌握翻折变换的性质、直角三角形的性质, 并进行分类讨论是关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19.（10 分）计算： $4^{-\frac{1}{2}} + (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + |1 - \sqrt{2}|$.

【分析】将原式每一项分别化简为 $\sqrt{\frac{1}{4}} + (2 + 1 - 2\sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1$ ，再进行计算即可.

【解答】解：原式 = $\sqrt{\frac{1}{4}} + (2 + 1 - 2\sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1$
 $= \frac{1}{2} + 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$
 $= \frac{5}{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

【点评】本题考查负指数幂的运算，分母有理化，绝对值运算. 能够将每一项准确化简是正确计算的关键.

20.（10 分）解方程组：
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + 3xy - 10y^2 = 0 \end{cases}$$

【分析】先将二次方程化为两个一次方程，则原方程组化为两个二元一次方程组，解方程组即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} x - y = 6 \text{ ①} \\ x^2 + 3xy - 10y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得： $(x - 2y)(x + 5y) = 0$

原方程组可化为： $\begin{cases} x - y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$

解得： $\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 6 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -1 \end{cases}$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 6 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -1 \end{cases}$.

【点评】本题考查了解高次方程组，将高次方程化为一次方程是解题的关键.

21.（10 分）一个水库的水位在某段时间内持续上涨，表格中记录了连续 5 小时内 6 个时间点的水位高度，其中 x 表示时间， y 表示水位高度.

x （小时）	0	1	2	3	4	5	...
----------	---	---	---	---	---	---	-----

y (米)	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	...
---------	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----

(1) 通过观察数据, 请写出水位高度 y 与时间 x 的函数解析式 (不需要写出定义域);

(2) 据估计, 这种上涨规律还会持续, 并且当水位高度达到 8 米时, 水库报警系统会自动发出警报. 请预测再过多久系统会发出警报.

【分析】(1) 根据题意和表格中的数据可以求得 y 与 x 之间的函数解析式;

(2) 将 $y=8$ 代入 (1) 中的函数解析式, 求出 x 的值, 再用 x 的值减去 5 即可解答本题.

【解答】解: (1) 设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=kx+b$,

$$\begin{cases} b=3 \\ k+b=3.3 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k=0.3 \\ b=3 \end{cases},$$

即 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=0.3x+3$;

(2) 把 $y=8$, 代入 $y=0.3x+3$, 得

$$8=0.3x+3,$$

$$\text{解得, } x=\frac{50}{3},$$

$$\frac{50}{3}-5=\frac{35}{3},$$

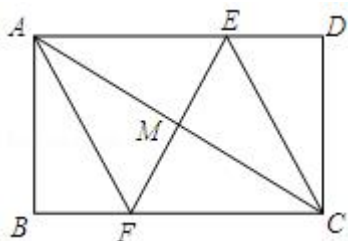
答: 再过 $\frac{35}{3}$ 小时后系统会发出警报.

【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质解答.

22. (10 分) 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 过 AC 的中点 M 作 $EF \perp AC$, 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F .

(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是菱形;

(2) 如果 $CD^2 = BF \cdot BC$, 求 $\angle BAF$ 的度数.



【分析】(1) 通过证明 $\triangle AME \cong \triangle CMF$ 得到 $ME = MF$. 则可判断四边形 $AECF$ 为平行四边形, 然后利用对角线互相垂直得到结论;

(2) 利用 $CD^2 = BF \cdot BC$ 和 $AB = CD$ 得到 $\frac{AB}{BF} = \frac{BC}{AB}$, 根据相似三角形的判定方法得到 $\triangle$

$ABF \sim \triangle CBA$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$, 而根据菱形的性质得 $\angle 1 = \angle 4$, 即 $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4$, 从而

可求出 $\angle 1$ 的度数.

【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$\because$ 点 M 为 AC 的中点,

$$\therefore AM = CM.$$

在 $\triangle AME$ 与 $\triangle CMF$ 中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AM = CM \\ \angle AME = \angle CMF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle CMF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore ME = MF.$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形,

又 $\because EF \perp AC$,

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 为菱形;

$$(2) \text{ 解: } \because CD^2 = BF \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{CD}{BF} = \frac{BC}{CD},$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AB = CD,$$

$$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{BC}{AB}$$

又 $\because \angle ABF = \angle CBA$,

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

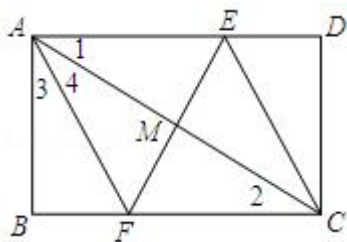
$\because$ 四边形 $AECF$ 为菱形,

$$\therefore \angle 1 = \angle 4, \text{ 即 } \angle 1 = \angle 3 = \angle 4,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle BAD = \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{即 } \angle 1 = 30^\circ.$$

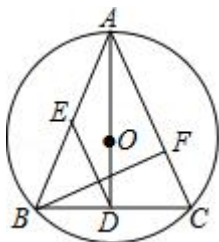


【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形．也考查了菱形的判定与性质和矩形的性质．

23. (12 分) 已知：如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB = AC$ ，点 E 为弦 AB 的中点， AO 的延长线交 BC 于点 D ，联结 ED ．过点 B 作 $BF \perp DE$ 交 AC 于点 F ．

(1) 求证： $\angle BAD = \angle CBF$ ；

(2) 如果 $OD = DB$ ．求证： $AF = BF$ ．



【分析】 (1) 由等腰三角形的性质得出 $\angle ABC = \angle C$ ，由垂径定理得出 $AD \perp BC$ ， $BD = CD$ ，证出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线．得出 $DE \parallel AC$ ，证出 $\angle BFC = 90^\circ$ ，由角的互余关系即可得出结论；

(2) 连接 OB ．证出 $\triangle ODB$ 是等腰直角三角形，得出 $\angle BOD = 45^\circ$ ．再由等腰三角形的性质得出 $\angle OBA = \angle OAB$ ．即可得出结论．

【解答】 (1) 证明：如图 1 所示：

$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C,$

$\because$ 直线 AD 经过圆心 O ,

$\therefore AD \perp BC, BD = CD,$

$\because$ 点 E 为弦 AB 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线．

$\therefore DE \parallel AC,$

$\because BF \perp DE,$

$\therefore \angle BPD = 90^\circ,$

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle ACB = 90^\circ .$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CBF;$$

(2) 证明：连接 OB ．如图 2 所示：

$$\because AD \perp BC, OD = DB,$$

$$\therefore \triangle ODB \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore \angle BOD = 45^\circ .$$

$$\because OB = OA,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle OAB.$$

$$\because \angle BOD = \angle OBA + \angle OAB,$$

$$\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BOD = 22.5^\circ ,$$

$$\because AB = AC, \text{ 且 } AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAC = 2 \angle BAO = 45^\circ .$$

$$\because \angle 2 = 90^\circ , \text{ 即 } BF \perp AC,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABF \text{ 中, } \angle ABF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BAC,$$

$$\therefore AF = BF.$$

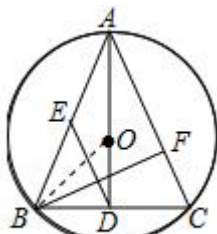


图 2

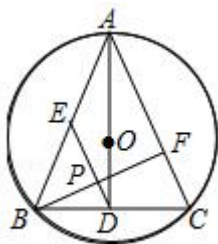


图 1

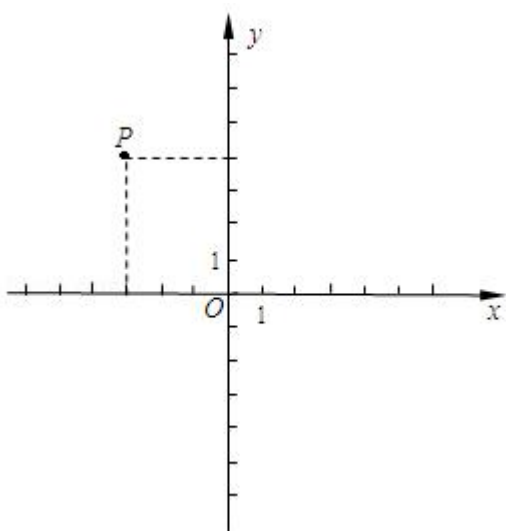
【点评】 本题考查了圆周角定理、等腰三角形的性质、等腰直角三角形的判定与性质、垂径定理、直角三角形的性质等知识；熟练掌握圆周角定理和垂径定理是解题的关键．

24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图 7), 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过原点, 与 x 轴的另一个交点为 A , 顶点为 $P(-3, 4)$.

(1) 求这条抛物线表达式;

(2) 将该抛物线向右平移, 平移后的新抛物线顶点为 Q , 它与 y 轴交点为 B , 联结 PB 、 PQ . 设点 B 的纵坐标为 m , 用含 m 的代数式表示 $\angle BPQ$ 的正切值;

(3) 连接 AP , 在 (2) 的条件下, 射线 PB 平分 $\angle APQ$, 求点 B 到直线 AP 的距离.



【分析】 (1) 可设顶点式解析式, 把点 $O(0, 0)$ 代入, 求得 a , 从而得抛物线的解析式;

(2) 画图, 把 $\angle BPQ$ 放到直角三角形中来考虑, 分别用点 P 、点 H 、点 B 的相关坐标来表示这个直角三角形中的直角边长即可求解;

(3) 设 PB 与 x 轴交于点 M , 求出点 A 坐标, 利用点 P 坐标, 得出 AP 长度, 利用角平分线即 $PQ \parallel x$ 轴, 推得 $\angle AMP = \angle APB$, 从而得出 AP 和 AM 的长度;

求出直线 PB 得解析式, 从而求得点 B 的坐标, 进而求出 BH 的长度, 再利用角平分线的性质定理即可得点 B 到直线 AP 的距离就等于 BH 的长度.

【解答】 解: (1) 设抛物线表达式为: $y = a(x+3)^2 + 4$ ($a \neq 0$)

把 $O(0, 0)$ 代入得 $a = -\frac{4}{9}$,

$\therefore$ 抛物线的表达式: $y = -\frac{4}{9}(x+3)^2 + 4$.

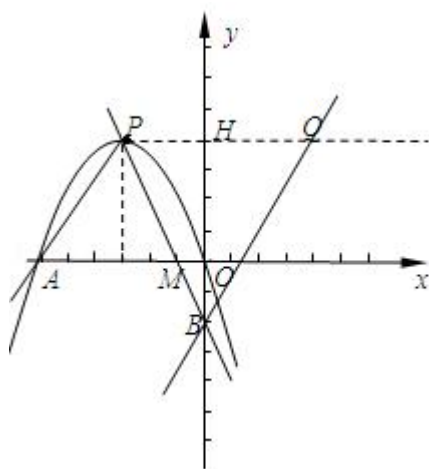
(2) 设 PQ 与 y 轴交点为 H .

$\because P(-3, 4), B(0, m)$,

$\therefore PH = 3, BH = 4 - m$,

在 $\text{Rt}\triangle PBH$ 中, $\tan \angle BPQ = \frac{BH}{PH} = \frac{4-m}{3}$.

故 $\angle BPQ$ 的正切值为: $\frac{4-m}{3}$.



(3) 设 PB 与 x 轴交于点 M .

由 (1) 得点 A 坐标为 $(-6, 0)$.

又 $P(-3, 4)$,

$\therefore AP = 5$.

$\because$ 射线 PB 平分 $\angle APQ$,

$\therefore \angle APB = \angle BPQ$.

$\because PQ \parallel x$ 轴, $\therefore \angle AMP = \angle BPQ$,

$\therefore \angle AMP = \angle APB$,

$\therefore AP = AM = 5$,

$\therefore M(-1, 0)$.

设直线 PB 为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 把点 $P(-3, 4), M(-1, 0)$ 代入, 得: $y = 2x - 2$,

$\therefore$ 点 B 为 $(0, -2)$.

$\therefore BH = 4 - m = 4 - (-2) = 6$.

$\because$ 射线 PB 平分 $\angle APQ$, $BH \perp PQ$,

$\therefore$ 点 B 到直线 AP 的距离为 6.

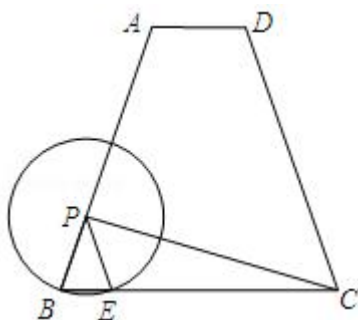
【点评】 本题是二次函数的综合题, 分别考查了待定系数法求解析式、构造直角三角形求三角函数值、利用点的坐标表示相关线段长度, 以及角平分线的性质定理来得点到直线的距离等知识点, 综合性较强, 难度较大.

25. (14 分) 已知: 如图 8, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $AB = BC = CD = 6$. 动点 P 在射线 BA 上, 以 BP 为半径的 $\odot P$ 交边 BC 于点 E (点 E 与点 C 不重合), 联结 PE 、 PC . 设 $BP = x$, $PC = y$.

(1) 求证: $PE \parallel DC$;

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 联结 PD , 当 $\angle PDC = \angle B$ 时, 以 D 为圆心半径为 R 的 $\odot D$ 与 $\odot P$ 相交, 求 R 的取值范围.



【分析】 (1) 根据梯形的性质得到 $\angle B = \angle DCB$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle PEB$, 根据平行线的判定定理即可得到结论;

(2) 分别过 P 、 A 、 D 作 BC 的垂线, 垂足分别为点 H 、 F 、 G . 推出四边形 $ADGF$ 是矩形, $PH \parallel AF$, 求得 $BF = FG = GC = 2$, 根据勾股定理得到 $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$, 根据平行线分线段成比例定理得到 $PH = \frac{2}{3}\sqrt{2}x$, $BH = \frac{1}{3}x$, 求得 $CH = 6 - \frac{1}{3}x$, 根据勾股定理即可得到结论;

(3) 作 $EM \parallel PD$ 交 DC 于 M . 推出四边形 $PDME$ 是平行四边形. 得到 $PE = DM = x$, 即 $MC = 6 - x$, 根据相似三角形的性质得到 $PD = EC = 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$, 根据相切两圆的性质即可得到结论.

【解答】 (1) $\because$ 证明: 梯形 $ABCD$, $AB = CD$,

$\therefore \angle B = \angle DCB$,

$$\because PB = PE,$$

$$\therefore \angle B = \angle PEB,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle PEB,$$

$$\therefore PE \parallel CD;$$

(2) 解: 分别过 P 、 A 、 D 作 BC 的垂线, 垂足分别为点 H 、 F 、 G .

$$\because \text{梯形 } ABCD \text{ 中, } AD \parallel BC, AF \perp BC, DG \perp BC, PH \perp BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ADGF \text{ 是矩形, } PH \parallel AF,$$

$$\because AD = 2, BC = DC = 6,$$

$$\therefore BF = FG = GC = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中,

$$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\because PH \parallel AF,$$

$$\therefore \frac{PH}{AF} = \frac{BF}{AB} = \frac{BH}{BF}, \text{ 即 } \frac{PH}{4\sqrt{2}} = \frac{x}{6} = \frac{BH}{2},$$

$$\therefore PH = \frac{2}{3}\sqrt{2}x, BH = \frac{1}{3}x,$$

$$\therefore CH = 6 - \frac{1}{3}x,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PHC \text{ 中, } PC = \sqrt{PH^2 + CH^2},$$

$$\therefore y = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2 + \left(6 - \frac{1}{3}x\right)^2}, \text{ 即 } y = \sqrt{x^2 - 4x + 36} \quad (0 < x < 9),$$

(3) 解: 作 $EM \parallel PD$ 交 DC 于 M .

$$\because PE \parallel DC,$$

$$\therefore \text{四边形 } PDME \text{ 是平行四边形.}$$

$$\therefore PE = DM = x, \text{ 即 } MC = 6 - x,$$

$$\therefore PD = ME, \angle PDC = \angle EMC,$$

$$\text{又 } \because \angle PDC = \angle B, \angle B = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle EMC = \angle PBE = \angle PEB.$$

$$\therefore \triangle PBE \sim \triangle ECM,$$

$$\therefore \frac{PB}{EC} = \frac{BE}{MC}, \text{ 即 } \frac{x}{6 - \frac{2}{3}x} = \frac{\frac{2}{3}x}{6 - x},$$

$$\text{解得: } x = \frac{18}{5},$$

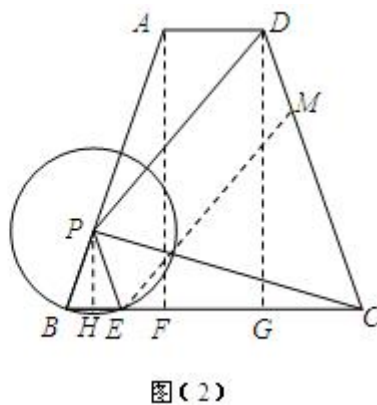
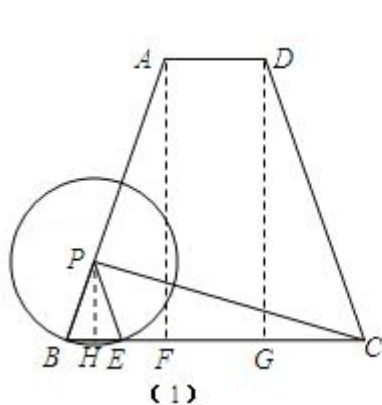
$$\text{即 } BE = \frac{12}{5},$$

$$\therefore PD = EC = 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5},$$

当两圆外切时, $PD = r_P + R$, 即 $R = 0$ (舍去);

当两圆内切时, $PD = r_P - R$, 即 $R_1 = 0$ (舍去), $R_2 = \frac{36}{5}$;

即两圆相交时, $0 < R < \frac{36}{5}$.



【点评】 本题属于圆综合题, 梯形的性质, 平行四边形的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 正确的作出辅助线是解题的关键.