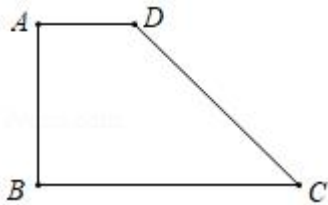


2019 年上海市青浦区中考数学二模试卷

一.选择题

1. (4 分) 下列单项式中, 与 ab^2 是同类项的是 ()
- A. a^2b B. a^2b^2 C. $-ab^2$ D. $2ab$
2. (4 分) 如果一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、二、三象限, 那么 k 、 b 应满足的条件是 ()
- A. $k > 0$ 且 $b > 0$ B. $k > 0$ 且 $b < 0$ C. $k < 0$ 且 $b > 0$ D. $k < 0$ 且 $b < 0$
3. (4 分) 抛物线 $y=2(x+1)^2-1$ 的顶点坐标是 ()
- A. (1, 1) B. (-1, -1) C. (1, -1) D. (-1, 1)
4. (4 分) 一组数据: 2, 3, 3, 4, 若添加一个数据 3, 则发生变化的统计量是 ()
- A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差
5. (3 分) 下列图形中, 是中心对称图形但不是轴对称图形的是 ()
- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 等腰梯形
6. (3 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 2$, $AB = 4$, $BC = 6$, 点 O 是边 BC 上一点, 以 O 为圆心, OC 为半径的 $\odot O$, 与边 AD 只有一个公共点, 则 OC 的取值范围是 ()



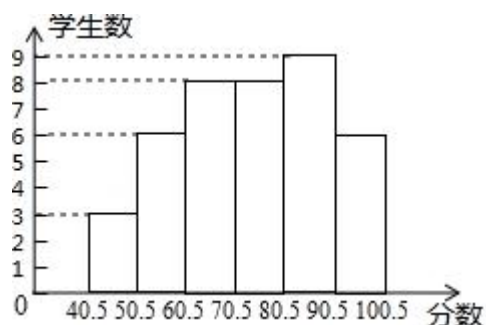
- A. $4 < OC \leq \frac{13}{3}$ B. $4 \leq OC \leq \frac{13}{3}$ C. $4 < OC \leq \frac{14}{3}$ D. $4 \leq OC \leq \frac{14}{3}$

二、填空题

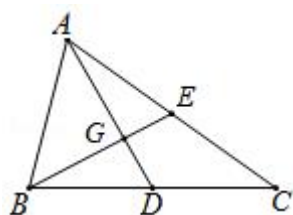
7. (3 分) $(-2x^2)^3 =$ _____.
8. (3 分) 分解因式: $a^3 - 9a =$ _____.
9. (3 分) 如果二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是 _____.
10. (3 分) 方程 $\sqrt{x^2-1}=1$ 的根是 _____.
11. (3 分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 $a =$ _____.
12. (3 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 如果在这个函数图象所在的每一个象限内, y 的值随着 x 的值增大而增大, 那么 k 的取值范围是 _____.

13. (3分) 将分别写有“创建”、“智慧”、“校园”的三张大小、质地相同的卡片随机排列, 那么恰好排列成“创建智慧校园”的概率是_____.

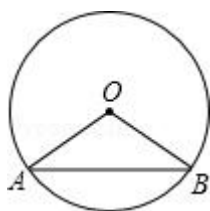
14. (3分) A 班学生参加“垃圾分类知识”竞赛, 已知竞赛得分都是整数, 竞赛成绩的频数分布直方图, 如图所示, 那么成绩高于 60 分的学生占 A 班参赛人数的百分率为_____.



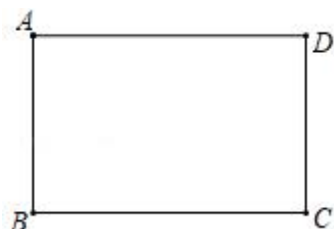
15. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 的中线 AD 、 BE 相交于点 G , 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DG}$ = _____.



16. (3分) 如图, 在 $\odot O$ 中, OA 、 OB 为半径, 连接 AB , 已知 $AB = 6$, $\angle AOB = 120^\circ$, 那么圆心 O 到 AB 的距离为_____.

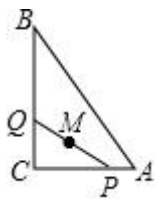


17. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, E 为 AD 的中点, F 为 CD 上一点, 且 $DF = 2CF$, 沿 BE 将 $\triangle ABE$ 翻折, 如果点 A 恰好落在 BF 上, 则 $AD =$ _____.



18. (3分) 我们把满足某种条件的所有点组成的图形, 叫做符合这个条件的点的轨迹, 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 12$, 动点 P 从点 A 开始沿射线 AC 方向以 1 个单位/秒的速度向点 C 运动, 动点 Q 从点 C 开始沿射线 CB 方向以 2 个单位/秒的速度

度向点运动， P 、 Q 两点分别从点 A 、 C 同时出发，当其中一点到达端点时，另一点也随之停止运动，在整个运动过程中，线段 PQ 的中点 M 运动的轨迹长为_____.



三.解答题

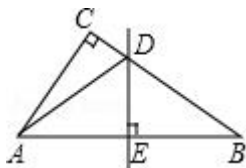
19. 计算： $(-1)^{2019} - |1 - \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + (-\frac{1}{3})^2$.

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

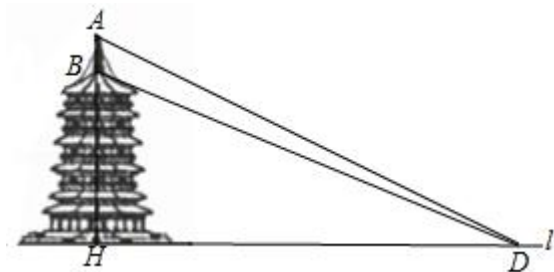
21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AB 的垂直平分线分别交边 BC 、 AB 于点 D 、 E ，联结 AD .

(1) 如果 $\angle CAD : \angle DAB = 1 : 2$ ，求 $\angle CAD$ 的度数；

(2) 如果 $AC = 1$ ， $\tan \angle B = \frac{1}{2}$ ，求 $\angle CAD$ 的正弦值.



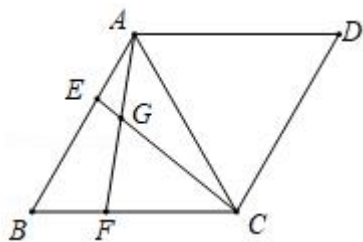
22. 如图，一座古塔 AH 的高为 33 米， $AH \perp$ 直线 l ，某校九年级数学兴趣小组为了测得该古塔塔刹 AB 的高，在直线 l 上选取了点 D ，在 D 处测得点 A 的仰角为 26.6° ，测得点 B 的仰角为 22.8° ，求该古塔塔刹 AB 的高. (精确到 0.1 米)【参考数据： $\sin 26.6^\circ = 0.45$ ， $\cos 26.6^\circ = 0.89$ ， $\tan 26.6^\circ = 0.5$ ， $\sin 22.8^\circ = 0.39$ ， $\cos 22.8^\circ = 0.92$ ， $\tan 22.8^\circ = 0.42$ 】



23. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AC$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上，且 $AE = BF$ ， CE 与 AF 相交于点 G .

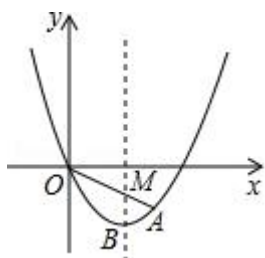
(1) 求证： $\angle FGC = \angle B$;

(2) 延长 CE 与 DA 的延长线交于点 H ，求证： $BE \cdot CH = AF \cdot AC$.



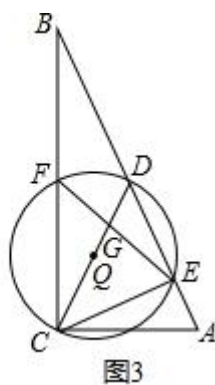
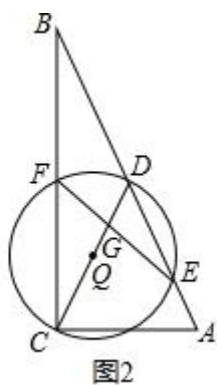
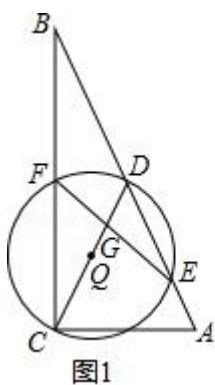
24. 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(6, -3)$ ，对称轴是直线 $x = 4$ ，顶点为 B ， OA 与其对称轴交于点 M ， M 、 N 关于点 B 对称。

- (1) 求这条抛物线的表达式和点 B 的坐标；
- (2) 联结 ON 、 AN ，求 $\triangle OAN$ 的面积；
- (3) 点 Q 在 x 轴上，且在直线 $x = 4$ 右侧，当 $\angle ANQ = 45^\circ$ 时，求点 Q 的坐标。



25. 已知：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， D 是 AB 的中点，以 CD 为直径的 $\odot Q$ 分别交 BC 、 BA 于点 F 、 E ，点 E 位于点 D 下方，连接 EF 交 CD 于点 G 。

- (1) 如图 1，如果 $BC = 2$ ，求 DE 的长；
- (2) 如图 2，设 $BC = x$ ， $\frac{GD}{GQ} = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域；
- (3) 如图 3，连接 CE ，如果 $CG = CE$ ，求 BC 的长。



2019 年上海市青浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题

1. (4 分) 下列单项式中, 与 ab^2 是同类项的是 ()

- A. a^2b B. a^2b^2 C. $-ab^2$ D. $2ab$

【分析】根据同类项的定义: 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同, 这样的项叫做同类项, 结合选项求解.

【解答】解: 由同类项的定义可知, a 的指数是 1, b 的指数是 2.

A、 a 的指数是 2, b 的指数是 1, 与 ab^2 不是同类项;

B、 a 的指数是 2, b 的指数是 2, 与 ab^2 不是同类项;

C、 a 的指数是 1, b 的指数是 2, 与 ab^2 是同类项;

D、 a 的指数是 1, b 的指数是 1, 与 ab^2 不是同类项.

故选: C.

【点评】本题考查了同类项, 判断同类项只要两看, 即一看所含有的字母是否相同, 二看相同字母的指数是否相同.

2. (4 分) 如果一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、二、三象限, 那么 k 、 b 应满足的条件是 ()

- A. $k > 0$ 且 $b > 0$ B. $k > 0$ 且 $b < 0$ C. $k < 0$ 且 $b > 0$ D. $k < 0$ 且 $b < 0$

【分析】根据一次函数图象与系数的关系求解即可.

【解答】解: $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、二、三象限, $\therefore k > 0$, $b > 0$,

故选: A.

【点评】本题考查了一次函数图象与系数的关系, 属于基础题. 注意掌握直线 $y=kx+b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限. $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限. $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交. $b = 0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

3. (4 分) 抛物线 $y=2(x+1)^2-1$ 的顶点坐标是 ()

- A. (1, 1) B. (-1, -1) C. (1, -1) D. (-1, 1)

【分析】直接利用顶点式的特点可求顶点坐标.

【解答】解: 因为 $y = 2(x+1)^2 - 1$ 是抛物线的顶点式,

根据顶点式的坐标特点可知, 顶点坐标为 $(-1, -1)$,

故选: B .

【点评】主要考查了求抛物线的对称轴和顶点坐标的方法. 牢记二次函数的顶点式是解答本题的关键.

4. (4分) 一组数据: 2, 3, 3, 4, 若添加一个数据 3, 则发生变化的统计量是 ()

A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差

【分析】依据的定义和公式分别计算新旧两组数据的平均数、中位数、众数、方差求解即可.

【解答】解: 原数据的 2、3、3、4 的平均数为 $\frac{2+3+3+4}{4} = 3$, 中位数为 $\frac{3+3}{2} = 3$, 众数为 3, 方差为 $\frac{1}{4} \times [(2-3)^2 + (3-3)^2 \times 2 + (4-3)^2] = 0.5$;

新数据 2、3、3、3、4 的平均数为 $\frac{2+3+3+3+4}{5} = 3$, 中位数为 3, 众数为 3, 方差为 $\frac{1}{5} \times [(2-3)^2 + (3-3)^2 \times 3 + (4-3)^2] = 0.4$;

$\therefore$ 添加一个数据 3, 方差发生变化,

故选: D .

【点评】本题主要考查的是众数、中位数、方差、平均数, 熟练掌握相关概念和公式是解题的关键.

5. (3分) 下列图形中, 是中心对称图形但不是轴对称图形的是 ()

A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 等腰梯形

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解: A 、平行四边形不是轴对称图形, 是中心对称图形, 符合题意;

B 、矩形是轴对称图形, 又是中心对称图形, 不符合题意;

C 、菱形既是轴对称图形, 也是中心对称图形, 不符合题意;

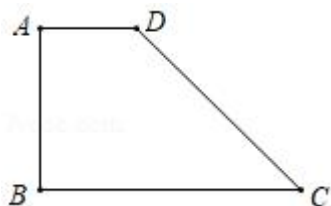
D 、等腰梯形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不符合题意.

故选: A .

【点评】此题主要考查了中心对称图形与轴对称的定义, 根据定义得出图形形状是解决问题的关键.

6. (3分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 2$, $AB = 4$, $BC = 6$, 点 O

是边 BC 上一点, 以 O 为圆心, OC 为半径的 $\odot O$, 与边 AD 只有一个公共点, 则 OC 的取值范围是 ()



- A. $4 < OC \leq \frac{13}{3}$ B. $4 \leq OC \leq \frac{13}{3}$ C. $4 < OC \leq \frac{14}{3}$ D. $4 \leq OC \leq \frac{14}{3}$

【分析】 作 $DE \perp BC$ 于 E , 当 $\odot O$ 与边 AD 相切时, 圆心 O 与 E 重合, 即 $OC = 4$; 当 $OA = OC$ 时, $\odot O$ 与 AD 交于点 A , 设 $OA = OC = x$, 则 $OB = 6 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, 由勾股定理得出方程, 解方程得出 $OC = \frac{13}{3}$; 即可得出结论.

【解答】 解: 作 $DE \perp BC$ 于 E , 如图所示:

则 $DE = AB = 4$, $BE = AD = 2$,

$\therefore CE = 4 = DE$,

当 $\odot O$ 与边 AD 相切时, 切点为 D , 圆心 O 与 E 重合, 即 $OC = 4$;

当 $OA = OC$ 时, $\odot O$ 与 AD 交于点 A ,

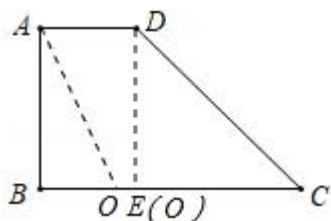
设 $OA = OC = x$, 则 $OB = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, 由勾股定理得: $4^2 + (6 - x)^2 = x^2$,

解得: $x = \frac{13}{3}$;

$\therefore$ 以 O 为圆心, OC 为半径的 $\odot O$, 与边 AD 只有一个公共点, 则 OC 的取值范围是 $4 \leq x \leq \frac{13}{3}$;

故选: B.



【点评】 本题考查了直线与圆的位置关系、直角梯形的性质、勾股定理等知识; 熟练掌握直角梯形的性质, 分情况讨论是解题的关键.

二、填空题

7. (3 分) $(-2x^2)^3 = \underline{-8x^6}$.

【分析】根据积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，进行计算即可.

【解答】解： $(-2x^2)^3$ ，
 $= -2^3x^{2 \times 3}$ ，
 $= -8x^6$.

【点评】本题考查了积的乘方的性质，熟练掌握运算性质是解题的关键.

8. (3分) 分解因式： $a^3 - 9a = \underline{a(a+3)(a-3)}$.

【分析】本题应先提出公因式 a ，再运用平方差公式分解.

【解答】解： $a^3 - 9a = a(a^2 - 3^2) = a(a+3)(a-3)$.

【点评】本题考查用提公因式法和公式法进行因式分解的能力，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

9. (3分) 如果二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，那么 x 的取值范围是 $\underline{x \geq 3}$.

【分析】二次根式的值为非负数，被开方数也为非负数.

【解答】解： $\because$ 二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，

$$\therefore x - 3 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq 3.$$

故答案为： $x \geq 3$.

【点评】此题考查了二次根式有意义的条件，要明确，当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

10. (3分) 方程 $\sqrt{x^2-1}=1$ 的根是 $\underline{x = \pm\sqrt{2}}$.

【分析】首先把方程两边同时平方，然后解一元二次方程，最后要验根.

【解答】解： $\because \sqrt{x^2-1}=1$ ，

$$\therefore x^2 - 1 = 1,$$

$$\therefore x^2 = 2,$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2},$$

经检验 $x = \pm\sqrt{2}$ 是原方程的根，

$$\therefore x = \pm\sqrt{2}.$$

故答案为： $x = \pm\sqrt{2}$.

【点评】此题主要考查了无理方程的解法，主要方法是方程两边同时平方从而转化为整式方程解决问题.

11. (3分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有两个相等的实数根，那么 $a = \underline{1}$.

【分析】若一元二次方程有两个相等的实数根，则方程的根的判别式等于 0，由此可列出关于 a 的等式，求出 a 的值.

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = 4 - 4a = 0$ ，即 $a = 1$.

【点评】总结：一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

12. (3分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，如果在这个函数图象所在的每一个象限内， y 的值随着 x 的值增大而增大，那么 k 的取值范围是 $\underline{k < 0}$.

【分析】直接利用当 $k > 0$ ，双曲线的两支分别位于第一、第三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小；当 $k < 0$ ，双曲线的两支分别位于第二、第四象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而增大，进而得出答案.

【解答】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，如果在这个函数图象所在的每一个象限内， y 的值随着 x 的值增大而增大，

$\therefore k$ 的取值范围是： $k < 0$.

故答案为： $k < 0$.

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质，正确记忆增减性是解题关键.

13. (3分) 将分别写有“创建”、“智慧”、“校园”的三张大小、质地相同的卡片随机排列，那么恰好排列成“创建智慧校园”的概率是 $\underline{\frac{1}{6}}$.

【分析】根据题意画出三张卡片排列的所有等可能结果，再由树状图确定恰好排列成“创建智慧校园”的结果数，依据概率公式可得答案.

【解答】解：根据题意，画树状图如下：



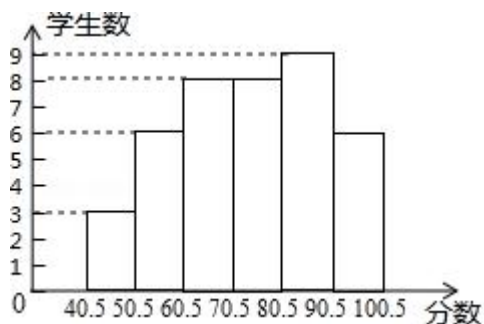
由树状图可知，共有 6 种等可能排列的方式，其中恰好排列成“创建智慧校园”的只有 1 种，

∴ 恰好排列成“创建智慧校园”的概率是 $\frac{1}{6}$ ，

故答案为 $\frac{1}{6}$ 。

【点评】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率。列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验。用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

14. (3 分) A 班学生参加“垃圾分类知识”竞赛，已知竞赛得分都是整数，竞赛成绩的频数分布直方图，如图所示，那么成绩高于 60 分的学生占 A 班参赛人数的百分率为 77.5%。



【分析】 根据频数直方图中的数据可以求得成绩高于 60 分的学生占 A 班参赛人数的百分率，本题得以解决。

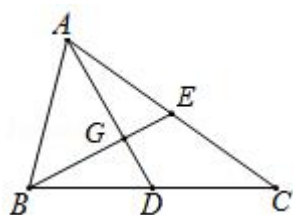
【解答】 解： $\frac{8+8+9+6}{3+6+8+8+9+6} \times 100\% = 77.5\%$ ，

故答案为：77.5%。

【点评】 本题考查频数（率）直方图，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

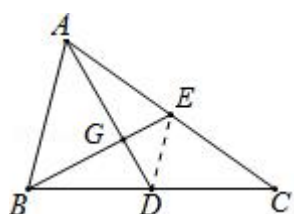
15. (3 分) 如图， $\triangle ABC$ 的中线 AD 、 BE 相交于点 G ，若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DG}$

$$= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}.$$



【分析】如图，连接 DE ．首先证明 $DG = \frac{1}{3}AD$ ，根据 $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$ ，求出 $\vec{AD}$ 即可解决问题．

【解答】解：如图，连接 DE ．



$$\because BD = CD, AE = EC,$$

$$\therefore DE \parallel AB, DE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DG = \frac{1}{3}AD,$$

$$\therefore \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}, \vec{AB} = \vec{a}, \vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \vec{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

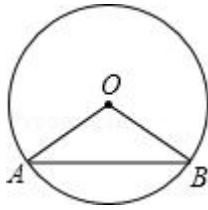
$$\therefore \vec{DG} = \frac{1}{3}\vec{DA},$$

$$\therefore \vec{DG} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}.$$

【点评】本题考查三角形的重心，平面向量等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

16. (3分) 如图，在 $\odot O$ 中， OA 、 OB 为半径，连接 AB ，已知 $AB = 6$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，那么圆心 O 到 AB 的距离为 $\sqrt{3}$ ．



【分析】过 O 作 $OC \perp AB$ 交 AB 于 C 点，由垂径定理可知， OC 垂直平分 AB ，再解直角三角形即可求解．

【解答】解：过 O 作 $OC \perp AB$ 交 AB 于 C 点，如右图所示：

由垂径定理可知， OC 垂直平分 AB ，则 $AC = \frac{1}{2}AB = 3$ ，

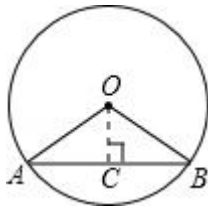
$\because OA = OB$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle OAB = 30^\circ$ ，

$\therefore \tan \angle OAB = \tan 30^\circ = \frac{OC}{AC}$ ，

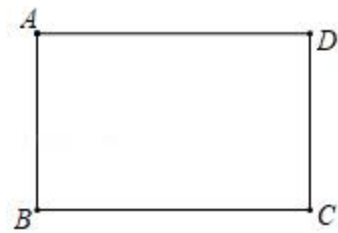
$\therefore OC = AC \cdot \tan 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ ，即圆心 O 到 AB 的距离为 $\sqrt{3}$ ；

故答案为： $\sqrt{3}$ ．



【点评】本题利用垂径定理构造出直角三角形，再根据特殊角的正切函数求解．

17. (3分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， E 为 AD 的中点， F 为 CD 上一点，且 $DF = 2CF$ ，沿 BE 将 $\triangle ABE$ 翻折，如果点 A 恰好落在 BF 上，则 $AD = \underline{2\sqrt{6}}$ ．



【分析】连接 EF ，则可证明 $\triangle EA'F \cong \triangle EDF$ ，从而根据 $BF = BA' + A'F$ ，得出 BF 的长，在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中，利用勾股定理可求出 BC ，即得 AD 的长度．

【解答】解：连接 EF ，

$\because$ 点 E 、点 F 是 AD 、 DC 的中点，

$\therefore AE = ED$ ， $DF = 2CF = 2$ ，

由折叠的性质可得 $AE = A'E$ ，

$$\therefore A'E = DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle EA'F$ 和 $\text{Rt}\triangle EDF$ 中,

$$\begin{cases} EA' = ED \\ EF = EF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle EA'F \cong \text{Rt}\triangle EDF \text{ (HL)},$$

$$\therefore A'F = DF = 2,$$

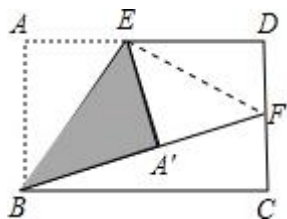
$$\therefore BF = BA' + A'F = AB + DF = 3 + 2 = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中,

$$BC = \sqrt{BF^2 - CF^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}.$$

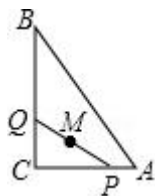
$$\therefore AD = BC = 2\sqrt{6}.$$

故答案为 $2\sqrt{6}$



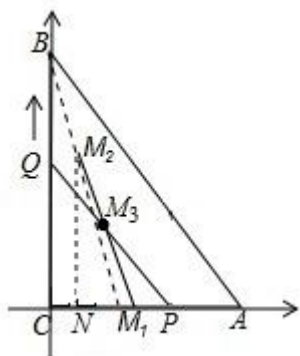
【点评】 本题考查了翻折变换的知识, 解答本题的关键是连接 EF , 证明 $\text{Rt}\triangle EA'F \cong \text{Rt}\triangle EDF$, 得出 BF 的长, 注意掌握勾股定理的表达式.

18. (3分) 我们把满足某种条件的所有点组成的图形, 叫做符合这个条件的点的轨迹, 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 12$, 动点 P 从点 A 开始沿射线 AC 方向以 1 个单位/秒的速度向点 C 运动, 动点 Q 从点 C 开始沿射线 CB 方向以 2 个单位/秒的速度向点 B 运动, P 、 Q 两点分别从点 A 、 C 同时出发, 当其中一点到达端点时, 另一点也随之停止运动, 在整个运动过程中, 线段 PQ 的中点 M 运动的轨迹长为 $3\sqrt{5}$.



【分析】 先以 C 为原点, 以 AC 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 由题意知 $0 \leq t \leq 6$, 求得 $t = 0$ 及 $t = 6$ 时 M 的坐标, 得到直线 M_1M_2 的解析式为 $y = -2x + 8$. 过点 M_2 作 $M_2N \perp x$ 轴于点 N , 则 $M_2N = 6$, $M_1N = 3$, $M_1M_2 = 3\sqrt{5}$, 线段 PQ 中点 M 所经过的路径长为 $3\sqrt{5}$ 个单位长度.

【解答】 解: 以 C 为原点, 以 AC 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系:



依题意，可知 $0 \leq t \leq 6$ ，当 $t=0$ 时，点 M_1 的坐标为 $(4, 0)$ ；

当 $t=6$ 时，点 M_2 的坐标为 $(1, 6)$ ，

设直线 M_1M_2 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ k + b = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 8 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 M_1M_2 的解析式为 $y = -2x + 8$ 。

设动点运动的时间为 t 秒，

则有点 $Q(0, 2t)$ ， $P(8-t, 0)$ ，

$\therefore$ 在运动过程中，线段 PQ 中点 M_3 的坐标为 $(\frac{8-t}{2}, t)$ ，

把 $x = \frac{8-t}{2}$ 代入 $y = -2x + 8$ ，得 $y = -2 \times \frac{8-t}{2} + 8 = t$ ，

$\therefore$ 点 M_3 在 M_1M_2 直线上，

过点 M_2 作 $M_2N \perp x$ 轴于点 N ，则 $M_2N = 6$ ， $M_1N = 3$ ，

$$\therefore M_1M_2 = 3\sqrt{5},$$

$\therefore$ 线段 PQ 中点 M 所经过的路径长为 $3\sqrt{5}$ 个单位长度。

故答案为： $3\sqrt{5}$ 。

【点评】 本题主要考查了一次函数的应用。用到解二元一次方程组以及勾股定理，综合性较强。

三.解答题

$$19. \text{ 计算: } (-1)^{2019} - |1 - \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2.$$

【分析】 直接利用绝对值的性质以及二次根式的性质分别化简得出答案。

$$\text{【解答】 解: 原式} = -1 - (\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{9}$$

$$=1\frac{1}{9}.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

【分析】先将原方程组化为两个二元一次方程组，然后求解即可.

【解答】解：原方程组变形为

$$\begin{cases} (x+3y)(x-2y)=0 \\ 2x+y=1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

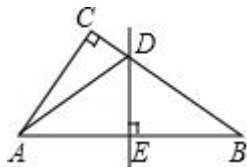
$$\therefore \text{原方程组的解为 } \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

【点评】本题考查了二次方程组的解，将二次方程组化为一次方程组是解题的关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， AB 的垂直平分线分别交边 BC 、 AB 于点 D 、 E ，联结 AD .

(1) 如果 $\angle CAD: \angle DAB=1: 2$ ，求 $\angle CAD$ 的度数；

(2) 如果 $AC=1$ ， $\tan \angle B=\frac{1}{2}$ ，求 $\angle CAD$ 的正弦值.



【分析】(1) 由 DE 垂直平分 AB 交边 BC 、 AB 于点 D 、 E ，可得 $\angle DAB = \angle DBA$ ，则 $\angle CAD + \angle DAB + \angle DBA = \angle CAD + 2\angle DAB = 90^\circ$ ，而 $\angle CAD: \angle DAB = 1: 2$ ，则可求 $\angle CAD$ 的度数.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=1$ ， $\tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ ，可求得 BC ，从而利用勾股定理可求得 AB 的值，进而可求得 AE 、 DE 的值，即可求得 AD ，而 $\cos \angle CAD = \frac{AC}{AD}$ ， $\sin \angle CAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAD}$ ，即可求 $\angle CAD$ 的正弦值.

【解答】解：

(1) $\because \angle CAD: \angle DAB = 1: 2$

$\therefore \angle DAB = 2\angle CAD$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAD + \angle DAB + \angle DBA = 90^\circ$

$\because DE$ 垂直平分 AB 交边 BC 、 AB 于点 D 、 E

$\therefore \angle DAB = \angle DBA$

$\therefore \angle CAD + \angle DAB + \angle DBA = \angle CAD + 2\angle CAD + 2\angle CAD = 90^\circ$

解得, $\angle CAD = 18^\circ$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 1$, $\tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$,

$\therefore BC = 2$

由勾股定理得, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$

$\because DE$ 垂直平分 AB 交边 BC 、 AB 于点 D 、 E

$\therefore BE = AE = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \angle DAE = \angle DBE$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中

$\tan \angle B = \tan \angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$

$\therefore DE = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$\therefore$ 由勾股定理得

$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{5}{4}$

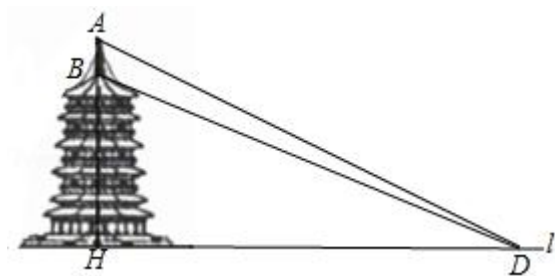
$\therefore \cos \angle CAD = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin \angle CAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAD} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

则 $\angle CAD$ 的正弦值为 $\frac{3}{5}$

【点评】 本题主要是应用三角函数定义来解直角三角形, 关键要运用锐角三角函数的概念及比正弦和余弦的基本关系进行解题.

22. 如图, 一座古塔 AH 的高为 33 米, $AH \perp$ 直线 l , 某校九年级数学兴趣小组为了测得该古塔塔刹 AB 的高, 在直线 l 上选取了点 D , 在 D 处测得点 A 的仰角为 26.6° , 测得点 B 的仰角为 22.8° , 求该古塔塔刹 AB 的高. (精确到 0.1 米) 【参考数据: $\sin 26.6^\circ = 0.45$, $\cos 26.6^\circ = 0.89$, $\tan 26.6^\circ = 0.5$, $\sin 22.8^\circ = 0.39$, $\cos 22.8^\circ = 0.92$, $\tan 22.8^\circ = 0.42$ 】



【分析】根据垂直的定义得到 $\angle AHD = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中，根据三角函数的定义得到

$$DH = \frac{33}{\tan 26.6^\circ} = \frac{33}{0.5}, \text{ 在 } \text{Rt}\triangle BDH \text{ 中, 根据三角函数的定义得到 } DH = \frac{33-AB}{\tan 22.8^\circ} = \frac{33-AB}{0.42}, \text{ 列方程即可得到结论.}$$

【解答】解： $\because AH \perp$ 直线 l ,

$$\therefore \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADH \text{ 中, } \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH},$$

$$\therefore DH = \frac{33}{\tan 26.6^\circ} = \frac{33}{0.5},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BDH \text{ 中, } \tan \angle BDH = \frac{BH}{DH},$$

$$\therefore DH = \frac{33-AB}{\tan 22.8^\circ} = \frac{33-AB}{0.42},$$

$$\therefore \frac{33}{0.5} = \frac{33-AB}{0.42},$$

$$\text{解得: } AB \approx 5.3m,$$

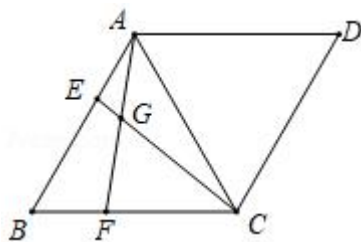
答：该古塔塔刹 AB 的高为 $5.3m$.

【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，正确的解直角三角形是解题的关键.

23. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AC$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上，且 $AE = BF$ ， CE 与 AF 相交于点 G .

(1) 求证： $\angle FGC = \angle B$;

(2) 延长 CE 与 DA 的延长线交于点 H ，求证： $BE \cdot CH = AF \cdot AC$.



【分析】(1) 先利用菱形的性质判断 $\triangle ABC$ 为等边三角形得到 $\angle B = \angle BAC = 60^\circ$ ，再证

明 $\triangle ABF \cong \triangle CAE$ 得到 $\angle BAF = \angle ACE$ ，然后利用角度代换可得到结论；

(2) 如图，先证明 $\triangle BCE \sim \triangle DHC$ 得到 $\frac{BE}{CD} = \frac{CE}{CH}$ ，然后利用等线段代换可得到结论。

【解答】证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore AB = BC,$$

而 $AB = AC$,

$$\therefore AB = BC = AC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle BAC = 60^\circ,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CAE$ 中

$$\begin{cases} AB=CA \\ \angle B=\angle CAE, \\ BF=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAF = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle FGC = \angle GAC + \angle ACG = \angle GAC + \angle BAF = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FGC = \angle B;$$

(2) 如图，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore \angle B = \angle D, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle H,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle DHC,$$

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{CE}{CH},$$

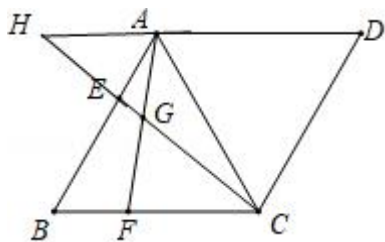
$$\because \triangle ABF \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore CE = AF$$

$$\because CA = CB = CD,$$

$$\therefore \frac{BE}{AC} = \frac{AF}{CH},$$

$$\therefore BE \cdot CH = AF \cdot AC.$$



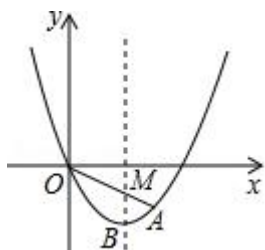
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；同时灵活运用相似三角形的性质进行几何计算．也考查了菱形的性质．

24. 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(6, -3)$ ，对称轴是直线 $x = 4$ ，顶点为 B ， OA 与其对称轴交于点 M ， M 、 N 关于点 B 对称．

(1) 求这条抛物线的表达式和点 B 的坐标；

(2) 联结 ON 、 AN ，求 $\triangle OAN$ 的面积；

(3) 点 Q 在 x 轴上，且在直线 $x = 4$ 右侧，当 $\angle ANQ = 45^\circ$ 时，求点 Q 的坐标．



【分析】 (1) 根据直线 $x = 4$ 和 $A(6, -3)$ 列出方程组，求出 a 、 b 即可求出解析式，然后将 $x = 4$ 代入函数解析式，求得得 $y = -4$ ，所以点 B 的坐标 $(4, -4)$ ；

(2) 连结 ON 、 AN ，先求出 $M(4, -2)$ ，由 M 、 N 关于点 B 对称，求出 $N(4, -6)$ ，于是 $MN = 4$ ，所以 $S_{\triangle OAN} = \frac{1}{2}MN \cdot |x_A| = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ ；

(3) 设对称轴直线 $x = 4$ 与 x 轴交于点 T ，抛物线与 x 轴另一个交点为 P ，则 $P(8, 0)$ ，直线 AN 与 x 轴交于点 P ，连接 NQ ，连接 NA 、 AP ，过点 P 作 $PR \perp PN$ ，与 NQ 交于点 R ，过 R 作 $RH \perp x$ 轴于点 H ．由 $\angle PNR = \angle ANQ = 45^\circ$ ，则 $\angle PRN = 45^\circ = \angle PNR$ ，所以 $PR = PN$ ，易证 $\triangle PTN \cong \triangle RHP$ (AAS)，则 $RH = PT = 4$ ， $PH = TN = 6$ ， $TH = 10$ ，由 $HR \parallel TN$ ，列出比例式求出 $HQ = 20$ ，于是 $OQ = OP + PH + HQ = 8 + 6 + 20 = 34$ ，所以点 Q 的坐标 $(34, 0)$ ．

【解答】 解：(1) 由题意可得

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=4 \\ 36a+6b=-3 \end{cases},$$

解得 $a = \frac{1}{4}$, $b = -2$,

$\therefore$ 抛物线的表达式 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$

将 $x = 4$ 代入, 得 $y = -4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标 $(4, -4)$;

(2) 连结 ON 、 AN , 如图 1.

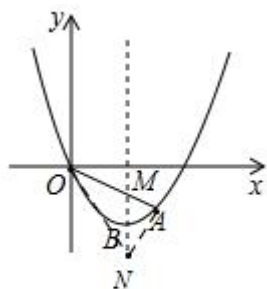


图1

$\because A(6, -3)$,

$\therefore$ 直线 $OA: y = -\frac{1}{2}x$,

将 $x = 4$ 代入, $y = -2$,

$\therefore M(4, -2)$,

$\because M$ 、 N 关于点 B 对称, $B(4, -4)$,

$\therefore N(4, -6)$,

$\therefore MN = 4$,

$\therefore S_{\triangle OAN} = \frac{1}{2}MN \cdot |x_A| = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$;

(3) 设对称轴直线 $x = 4$ 与 x 轴交于点 T , 抛物线与 x 轴另一个交点为 P , 则 $P(8, 0)$.

$\because A(6, -3)$, $N(4, -6)$,

$\therefore$ 直线 $AN: y = \frac{3}{2}x - 12$,

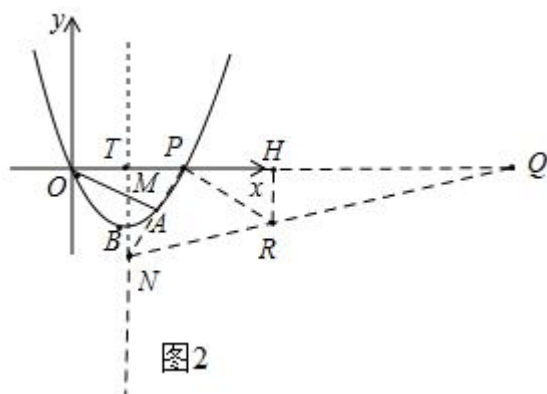
令 $y = 0$, 则 $x = 8$,

$\therefore$ 直线 AN 与 x 轴交点 $(8, 0)$,

即直线 AN 与 x 轴交于点 P ,

如图 2, 连接 NQ , 连接 NA 、 AP , 过点 P 作 $PR \perp PN$, 与 NQ 交于点 R , 过 R 作 $RH \perp x$

轴于点 H .



$$\because \angle PNR = \angle ANQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PRN = 45^\circ = \angle PNR,$$

$$\therefore PR = PN,$$

易证 $\triangle PTN \cong \triangle RHP$ (AAS),

$$\therefore RH = PT = 4, PH = TN = 6,$$

$$\therefore TH = 10,$$

$$\therefore \frac{RH}{TN} = \frac{HQ}{QT},$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{HQ}{HQ+10},$$

$$\therefore HQ = 20,$$

$$\therefore OQ = OP + PH + HQ = 8 + 6 + 20 = 34,$$

点 Q 的坐标 $(34, 0)$.

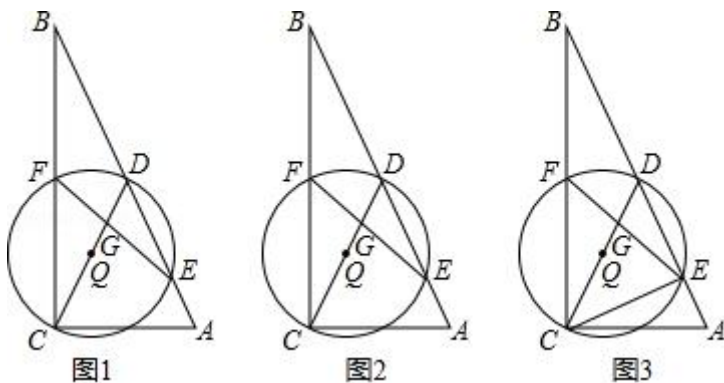
【点评】 本题考查了二次函数，熟练掌握二次函数的相关性质与全等三角形的判定与性质是解题的关键.

25. 已知：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， D 是 AB 的中点，以 CD 为直径的 $\odot Q$ 分别交 BC 、 BA 于点 F 、 E ，点 E 位于点 D 下方，连接 EF 交 CD 于点 G .

(1) 如图 1，如果 $BC = 2$ ，求 DE 的长；

(2) 如图 2，设 $BC = x$ ， $\frac{GD}{GQ} = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域；

(3) 如图 3，连接 CE ，如果 $CG = CE$ ，求 BC 的长.

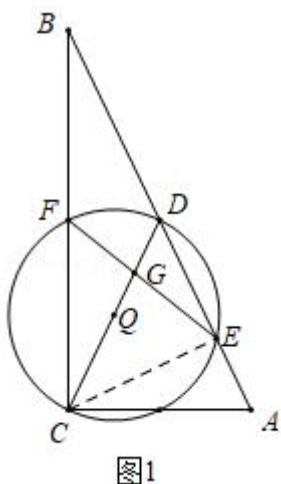


【分析】(1) 如图 1 中，连接 CE ．在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，求出 CD ， CE 即可解决问题．

(2) 如图 2 中，连接 CE ，设 AC 交 $\odot Q$ 于 K ，连接 FK ， DF ， DK ．想办法用 x 表示 CD ， DE ，证明 $FK \parallel AB$ ，推出 $\frac{DG}{GQ} = \frac{DE}{FQ}$ ，延长构建关系式即可解决问题．根据点 E 位于点 D 下方，确定 x 的取值范围即可．

(3) 如图 3 中，连接 FK ．证明 $ED = EC$ ，由此构建方程即可解决问题．

【解答】解：(1) 如图 1 中，连接 CE ．



在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $BC = 2$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$\because CD$ 是 $\odot Q$ 的直径，

$$\therefore \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore CE \perp AB,$$

$$\therefore BD = AD,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC,$$

$$\therefore CE = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

(2) 如图 2 中, 连接 CE , 设 AC 交 $\odot Q$ 于 K , 连接 FK , DF , DK .

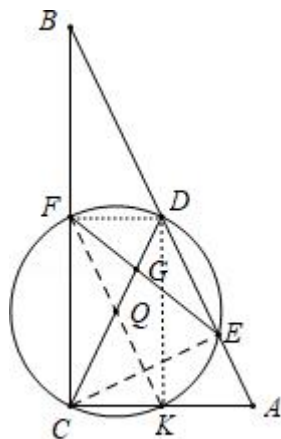


图2

$$\therefore \angle FCK = 90^\circ,$$

$\therefore FK$ 是 $\odot Q$ 的直径,

$\therefore$ 直线 FK 经过点 Q ,

$\therefore CD$ 是 $\odot Q$ 的直径,

$$\therefore \angle CFD = \angle CKD = 90^\circ,$$

$$\therefore DF \perp BC, DK \perp AC,$$

$$\therefore DC = DB = DA,$$

$$\therefore BF = CF, CK = AK,$$

$$\therefore FK \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DG}{GQ} = \frac{DE}{FQ},$$

$$\therefore BC = x, AC = 1,$$

$$\therefore AB = \sqrt{1+x^2},$$

$$\therefore DC = DB = DA = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2},$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \text{可得 } AE = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\therefore DE = AD - AE = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{2FQ},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{2}} = \frac{y}{2},$$

$$\therefore y = \frac{2x^2 - 2}{1+x^2} \quad (x > 1).$$

(3) 如图 3 中, 连接 FK .

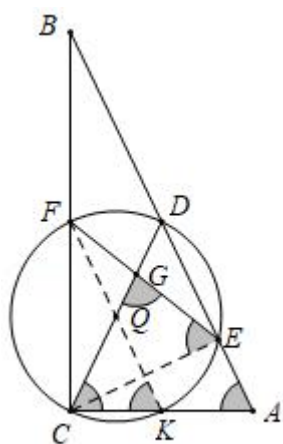


图3

$$\because CE = CG,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle CGE,$$

$$\because \angle FKC = \angle CEG,$$

$$\because FK \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FKC = \angle A,$$

$$\because DC = DA,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCA = \angle CEG = \angle CGE,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle ECG,$$

$$\therefore EC = DE,$$

$$\text{由(2)可知: } \frac{1 \times x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{整理得: } x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$\therefore x = 1 + \sqrt{2} \text{ 或 } 1 - \sqrt{2} \text{ (舍弃)},$$

$$\therefore BC = 1 + \sqrt{2}.$$

【点评】 本题属于圆综合题，考查了圆周角定理，勾股定理，三角形的中位线定理，平行线分线段成比例定理，等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造平行线解决问题，学会利用参数，构建方程解决问题，属于中考常考题型．