

2019 年上海市金山区中考数学二模试卷

一.选择题(每小题 4 分,共 24 分)

1. (4 分) 下列实数中,是有理数的是 ()

- A. π B. $\sqrt{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{7}$

2. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} -x > 3 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

- A. $x > -3$ B. $x < -3$ C. $x > 1$ D. $x < 1$

3. (4 分) 用换元法解方程: $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} - 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x}{x-1} = y$, 那么将原方程变形后表示为一元二次方程一般形式的是 ()

- A. $y - \frac{1}{y} - 2 = 0$ B. $y - \frac{2}{y} - 1 = 0$ C. $y^2 - 2y - 1 = 0$ D. $y^2 - y - 2 = 0$

4. (4 分) 数据 2、1、0、-2、0、-1 的中位数与众数分别是 ()

- A. 0 和 0 B. -1 和 0 C. 0 和 1 D. 0 和 2

5. (4 分) 下列四边形中,是中心对称而不是轴对称图形的是 ()

- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

6. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A, $\odot O_1$ 的半径等于 5, $O_1O_2 = 3$, 那么 O_2A 的长等于 ()

- A. 2 B. 3 C. 8 D. 2 或 8

二.填空题(每小题 4 分,共 48 分)

7. (4 分) 计算: $a^2 \div a^{-2} =$ _____.

8. (4 分) 因式分解: $a^3 + 2a =$ _____.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{3x-2} = 2$ 的解是_____.

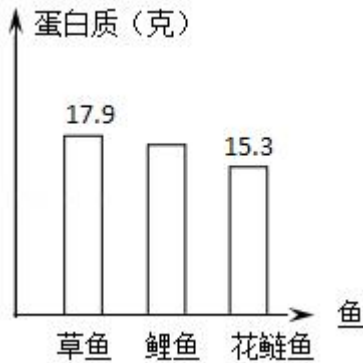
10. (4 分) 化简: $\sqrt{\frac{a^3b^2}{4}}$ ($b \geq 0$) 的结果是_____.

11. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象在第二、四象限内, 那么 k 的取值范围是_____.

12. (4 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 的一个根是 $x = 1$, 那么这个方程的另一个根是_____.

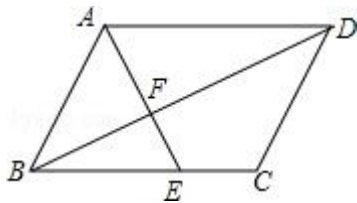
13. (4 分) 从方程 $x^2 = 0$, $\sqrt{x-1} = -1$, $x^2 - 2x + 4 = 0$ 中, 任选一个方程, 选出的这个方程无实数解的概率为_____.

14. (4分) 100克鱼肉中蛋白质的含量如图表, 每100克草鱼、鲤鱼、花鲢鱼鱼肉的平均蛋白质含量为16.8克, 那么100克鲤鱼肉的蛋白质含量是_____克.

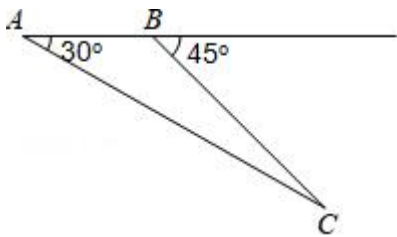


15. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 请你再添加一个条件使得 $\triangle ABC$ 成为等边三角形, 这个条件可以是_____ (只要写出一个即可).

16. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是边 BC 上的点, AE 交 BD 于点 F , $\frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BD} =$ _____ (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



17. (4分) 如图, 飞机于空中 A 处观测其正前方地面控制点 C 的俯角为 30° , 若飞机航向不变, 继续向前飞行1000米至 B 处时, 观测到其正前方地面控制点 C 的俯角为 45° , 那么该飞机与地面的高度是_____米 (保留根号).



18. (4分) 一个正多边形的对称轴共有10条, 且该正多边形的半径等于4, 那么该正多边形的边长等于_____.

三. 解答题 (19-22题, 每题10分, 23-24题, 每题12分, 25题14分, 共78分)

19. (10分) 计算: $(\sqrt{3})^0 + 8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$.

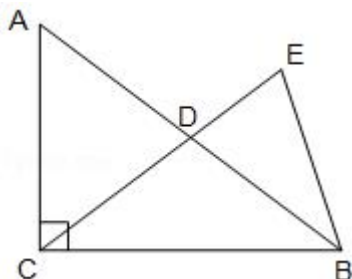
20. (10分) 解方程: $\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = 1$.

21. (10分) 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是边 AB 的中点, $CE = CB$,

$$CD = 5, \sin \angle ABC = \frac{3}{5}.$$

求：(1) BC 的长.

(2) $\tan E$ 的值.



22. (10 分) 某演唱会购买门票的方式有两种.

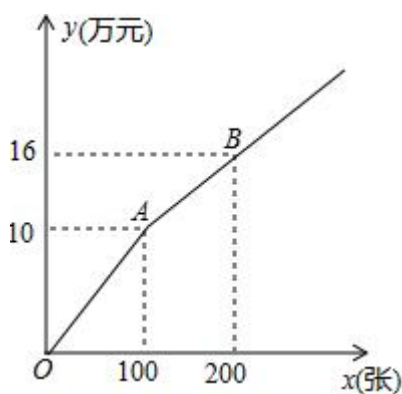
方式一：若单位赞助广告费 10 万元，则该单位所购门票的价格为每张 0.02 万元；

方式二：如图所示.

设购买门票 x 张，总费用为 y 万元，方式一中：总费用 = 广告赞助费 + 门票费.

(1) 求方式一中 y 与 x 的函数关系式.

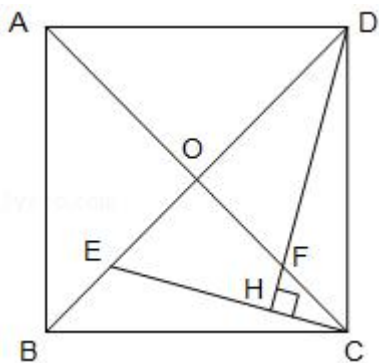
(2) 若甲、乙两个单位分别采用方式一、方式二购买本场演唱会门票共 400 张，且乙单位购买超过 100 张，两单位共花费 27.2 万元，求甲、乙两单位各购买门票多少张？



23. (12 分) 已知：如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，若 $\angle CAD = \angle DBC$.

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

(2) E 是 OB 上一点， $DH \perp CE$ ，垂足为 H ， DH 与 OC 相交于点 F ，求证： $OE = OF$.



24. (12分) 已知：抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ ，经过点 $A(-1, -2)$ ， $B(0, 1)$ 。

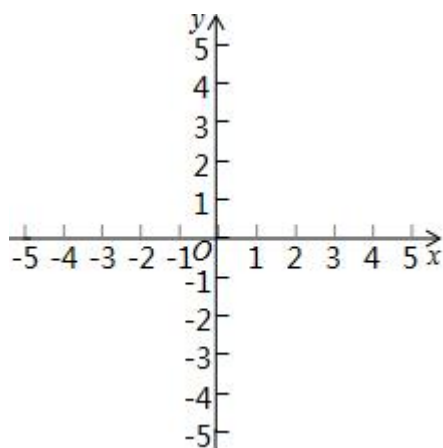
(1) 求抛物线的关系式及顶点 P 的坐标。

(2) 若点 B' 与点 B 关于 x 轴对称，把 (1) 中的抛物线向左平移 m 个单位，平移后的抛物线经过点 B' ，设此时抛物线顶点为点 P' 。

①求 $\angle P'BB'$ 的大小。

②把线段 $P'B'$ 以点 B' 为旋转中心顺时针旋转 120° ，点 P' 落在点 M 处，设点 N 在

(1) 中的抛物线上，当 $\triangle MNB'$ 的面积等于 $6\sqrt{3}$ 时，求点 N 的坐标。



25. (14分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 16\text{cm}$ ， $AB = 20\text{cm}$ ，动点 D 由点 C 向

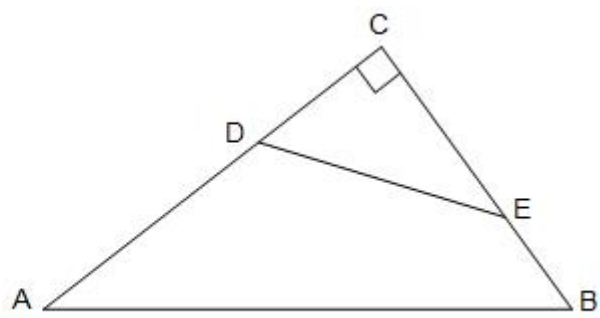
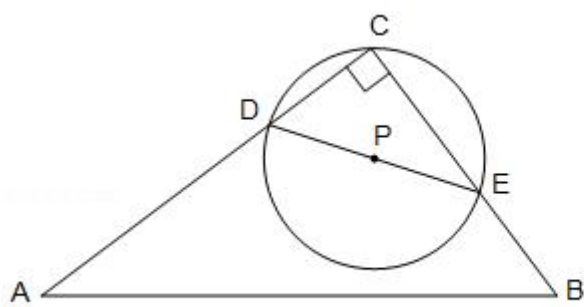
点 A 以每秒 1cm 速度在边 AC 上运动，动点 E 由点 C 向点 B 以每秒 $\frac{4}{3}\text{cm}$ 速度在边 BC 上运动，若点 D ，点 E 从点 C 同时出发，运动 t 秒 ($t > 0$)，联结 DE 。

(1) 求证： $\triangle DCE \sim \triangle BCA$ 。

(2) 设经过点 D 、 C 、 E 三点的圆为 $\odot P$ 。

①当 $\odot P$ 与边 AB 相切时，求 t 的值。

②在点 D 、点 E 运动过程中，若 $\odot P$ 与边 AB 交于点 F 、 G (点 F 在点 G 左侧)，联结 CP 并延长 CP 交边 AB 于点 M ，当 $\triangle PFM$ 与 $\triangle CDE$ 相似时，求 t 的值。



备用图

2019 年上海市金山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1.（4 分）下列实数中，是有理数的是（ ）

- A. π B. $\sqrt{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{7}$

【分析】根据有理数的定义即可求出答案.

【解答】解：有理数是整数和分数的集合，

故选：D.

【点评】本题考查有理数，解题的关键是熟练运用有理数的定义，本题属于基础题型.

2.（4 分）不等式组 $\begin{cases} -x > 3 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ 的解集是（ ）

- A. $x > -3$ B. $x < -3$ C. $x > 1$ D. $x < 1$

【分析】求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可.

【解答】解：解不等式 $-x > 3$ ，得： $x < -3$ ，

解不等式 $x-1 < 0$ ，得： $x < 1$ ，

则不等式组的解集为 $x < -3$.

故选：B.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，熟知解一元一次不等式的基本步骤是解答此题的关键.

3.（4 分）用换元法解方程： $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} - 2 = 0$ 时，如果设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么将原方程变形后表示为一元二次方程一般形式的是（ ）

- A. $y - \frac{1}{y} - 2 = 0$ B. $y - \frac{2}{y} - 1 = 0$ C. $y^2 - 2y - 1 = 0$ D. $y^2 - y - 2 = 0$

【分析】依题意，设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么将原方程可化为： $y - \frac{1}{y} - 2 = 0$ ，去分母得， $y^2 - 1 - 2y = 0$ ，对比选项即可得出答案

【解答】解：

设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么将原方程可化为： $y - \frac{1}{y} - 2 = 0$ ，去分母得， $y^2 - 1 - 2y = 0$ ，

整理得 $y^2 - 2y - 1 = 0$

故选：C.

【点评】此题主要考查换元法解一元二次方程. 主要针对有相似的整体项, 可以利用换元法进行求解, 再求出最终的答案.

4. (4分) 数据 2、1、0、-2、0、-1 的中位数与众数分别是 ()

- A. 0 和 0 B. -1 和 0 C. 0 和 1 D. 0 和 2

【分析】中位数是一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (或最中间两个数的平均数); 众数是一组数据中出现次数最多的数据.

【解答】解: 在这一组数据中 2 是出现次数最多的, 故众数是 0;

将这组数据已从小到大的顺序排列, 处于中间位置的数是 0, 那么由中位数的定义可知, 这组数据的中位数是 0;

故选: A.

【点评】此题主要考查了众数与中位数的意义. 将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (或最中间两个数的平均数) 叫做这组数据的中位数; 如果中位数的概念掌握得不好, 不把数据按要求重新排列, 就会出错.

5. (4分) 下列四边形中, 是中心对称而不是轴对称图形的是 ()

- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

【分析】根据中心对称图形以及轴对称图形的定义即可作出判断.

【解答】解: A、平行四边形是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故选项正确;

B、矩形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故选项错误;

C、菱形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故选项错误;

D、正方形, 矩形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故选项错误.

故选: A.

【点评】本题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的定义, 正确理解定义是解题关键.

6. (4分) 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A, $\odot O_1$ 的半径等于 5, $O_1O_2 = 3$, 那么 O_2A 的长等于 ()

- A. 2 B. 3 C. 8 D. 2 或 8

【分析】设 $\odot O_2$ 的半径为 r , 利用两圆相切的性质得 $O_2A = r$, $O_1A = 5$, 再根据内切的判定方法得到 $r - 5 = 3$ 或 $5 - r = 3$, 然后计算出确定 r 的值.

【解答】解: 设 $\odot O_2$ 的半径为 r ,

$\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A,

$$\therefore O_2A = r, O_1A = 5,$$

$$\therefore r - 5 = 3 \text{ 或 } 5 - r = 3,$$

$$\therefore r = 8 \text{ 或 } r = 2,$$

即 O_2A 的长等于 2 或 8.

故选: D.

【点评】 本题考查了圆和圆的位置关系: 两圆的圆心距为 d , 两圆半径分别为 R 、 r , 当两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$; 两圆外切 $\Leftrightarrow d = R+r$; 两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r$ ($R \geq r$); 两圆内切 $\Leftrightarrow d = R-r$ ($R > r$); 两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r$ ($R > r$).

二. 填空题 (每小题 4 分, 共 48 分)

7. (4 分) 计算: $a^2 \div a^{-2} = \underline{a^4}$.

【分析】 根据同底数幂的除法法则计算, 得到答案.

【解答】 解: $a^2 \div a^{-2} = a^{2-(-2)} = a^4$,

故答案为: a^4 .

【点评】 本题考查的是同底数幂的除法、负整数指数幂, 同底数幂的除法法则: 底数不变, 指数相减.

8. (4 分) 因式分解: $a^3+2a = \underline{a(a^2+2)}$.

【分析】 运用提公因式法分解因式即可, 提公因式法基本步骤: (1) 找出公因式; (2) 提公因式并确定另一个因式.

【解答】 解: $a^3+2a = a(a^2+2)$,

故答案为 $a(a^2+2)$.

【点评】 本题考查了因式分解, 正确提取公因式是解题的关键.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{3x-2} = 2$ 的解是 $\underline{x=2}$.

【分析】 首先根据乘方法消去方程中的根号, 然后根据一元一次方程的求解方法, 求出 x 的值是多少, 最后验根, 求出方程 $\sqrt{3x-2} = 2$ 的解是多少即可.

【解答】 解: $\because \sqrt{3x-2} = 2$,

$$\therefore 3x - 2 = 4,$$

$$\therefore x = 2,$$

当 $x = 2$ 时,

$$\text{左边} = \sqrt{3 \times 2 - 2} = 2,$$

右边 = 2,

∵ 左边 = 右边,

∴ 方程 $\sqrt{3x-2} = 2$ 的解是: $x = 2$.

故答案为: $x = 2$.

【点评】 此题主要考查了无理方程的求解, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: (1) 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有: 乘方法, 配方法, 因式分解法, 设辅助元素法, 利用比例性质法等. (2) 注意: 用乘方法 (即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号) 来解无理方程, 往往会产生增根, 应注意验根.

10. (4分) 化简: $\sqrt{\frac{a^3b^2}{4}}$ ($b \geq 0$) 的结果是 $\frac{ab\sqrt{a}}{2}$.

【分析】 依据二次根式的性质化简即可.

【解答】 解: $\sqrt{\frac{a^3b^2}{4}} = \frac{ab\sqrt{a}}{2}$,

故答案为: $\frac{ab\sqrt{a}}{2}$.

【点评】 本题主要考查的是二次根式的性质与化简, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

11. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象在第二、四象限内, 那么 k 的取值范围是 $k < 1$.

【分析】 根据 $k < 0$ 时, 图象是位于二、四象限即可得出结果.

【解答】 解: 由题意可得 $k - 1 < 0$,

则 $k < 1$.

故答案为: $k < 1$.

【点评】 此题主要考查反比例函数图象的性质: (1) $k > 0$ 时, 图象是位于一、三象限. (2) $k < 0$ 时, 图象是位于二、四象限.

12. (4分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 的一个根是 $x = 1$, 那么这个方程的另一个根是 -2 .

【分析】 首先设关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 的另一个实数根是 α , 然后根据根与系数的关系, 即可得 $\alpha + 1 = -1$, 继而求得答案.

【解答】 解: 设关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 的另一个实数根是 α ,

∴ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 的一个实数根为 1,

$$\therefore a+1 = -1,$$

$$\therefore a = -2.$$

故答案为 -2 .

【点评】 此题考查了根与系数的关系. 此题难度不大, 注意掌握若二次项系数为 1 , x_1 , x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根时, $x_1+x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

13. (4 分) 从方程 $x^2=0$, $\sqrt{x-1} = -1$, $x^2-2x+4=0$ 中, 任选一个方程, 选出的这个方程无实数解的概率为 $\frac{2}{3}$.

【分析】 根据算术平方根具有非负性可得 $\sqrt{x-1} = -1$, 再计算 $x^2-2x+4=0$ 的 $\Delta < 0$, 因此也无实数解, 再利用概率可得答案.

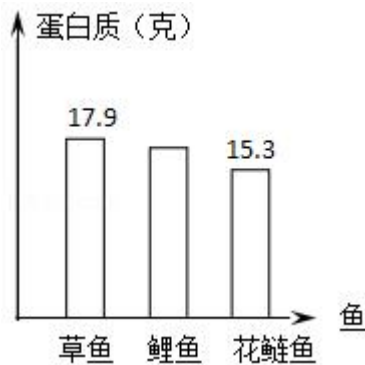
【解答】 解: $\because \sqrt{x-1} = -1$, $x^2-2x+4=0$ 无实数解,

$\therefore$ 无实数解的概率为 $\frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点评】 此题主要考查了概率公式和一元二次方程的解法, 关键是掌握算术平方根具有非负性, 掌握判断一元二次方程解的方法.

14. (4 分) 100 克鱼肉中蛋白质的含量如图表, 每 100 克草鱼、鲤鱼、花鲢鱼鱼肉的平均蛋白质含量为 16.8 克, 那么 100 克鲤鱼肉的蛋白质含量是 17.2 克.



【分析】 直接利用频数分布直方图结合平均数求法得出答案.

【解答】 解: $\because$ 每 100 克草鱼、鲤鱼、花鲢鱼鱼肉的平均蛋白质含量为 16.8 克,

$\therefore$ 设 100 克鲤鱼肉的蛋白质含量是 x 克,

由题意可得: $\frac{1}{3}(17.9+15.3+x) = 16.8$,

解得: $x = 17.2$.

故答案为: 17.2.

【点评】此题主要考查了频数分布直方图，由直方图获取正确信息是解题关键.

15. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 请你再添加一个条件使得 $\triangle ABC$ 成为等边三角形, 这个条件可以是 $\angle A = 60^\circ$ (只要写出一个即可).

【分析】根据有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形可得答案.

【解答】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 再添加 $\angle A = 60^\circ$ 可得 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 故答案为: $\angle A = 60^\circ$.

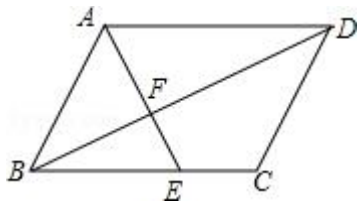
【点评】此题主要考查了等边三角形的判定, 关键是掌握等边三角形的判定方法: (1)

由定义判定: 三条边都相等的三角形是等边三角形.

(2) 判定定理1: 三个角都相等的三角形是等边三角形.

(3) 判定定理2: 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

16. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是边 BC 上的点, AE 交 BD 于点 F , $\frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BD} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}}}$ (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



【分析】利用平行四边形的性质求出 $\overrightarrow{AD}$, 再根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ 求解即可.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore BE : BC = 2 : 3,$$

$$\therefore BE : AD = 2 : 3,$$

$$\therefore AD = \frac{3}{2}BE,$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{a},$$

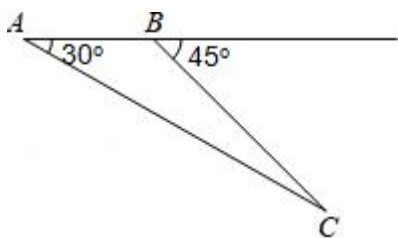
$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b},$$

$$\text{故答案为 } \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}.$$

【点评】 本题考查平行四边形的性质，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

17. (4分) 如图，飞机于空中 A 处观测其正前方地面控制点 C 的俯角为 30° ，若飞机航向不变，继续向前飞行 1000 米至 B 处时，观测到其正前方地面控制点 C 的俯角为 45° ，那么该飞机与地面的高度是 $(500\sqrt{3}+500)$ 米（保留根号）．



【分析】 易得 $CD = BD$ ，那么利用 30° 的正切值即可求得 BD 长，即为飞机再向前飞行多少米与地面控制点 C 的距离最近．

【解答】 解：作 $CD \perp AB$ 于点 D ．

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\because \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = CD,$$

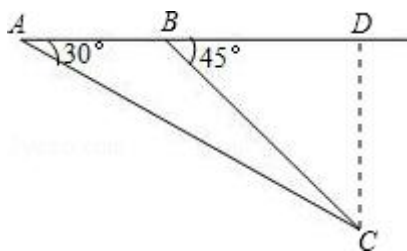
$$\because \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{CD}{AB+DB} = \frac{CD}{AB+CD} = \frac{CD}{1000+CD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{解得 } CD = BD = 500\sqrt{3} + 500 \text{ (米)}.$$

答：飞机再向前飞行 $(500\sqrt{3}+500)$ 米与地面控制点 C 的距离最近．

故答案为： $(500\sqrt{3}+500)$ ．



【点评】 此题主要考查了解直角三角形的应用，用到的知识点为：点到直线的最短距离为这点到这条直线的垂线段的长度；借助俯角构造直角三角形并解直角三角形是俯角问题常用的方法．

18. (4分) 一个正多边形的对称轴共有 10 条，且该正多边形的半径等于 4，那么该正多边形的边长等于 $2\sqrt{5}-2$ ．

【分析】根据轴对称图形的性质得到这个正多边形是正十边形，求出正十边形的中心角，作 AC 平分 $\angle OAB$ 交 OB 于 C ，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可．

【解答】解：∵ 正多边形的对称轴共有 10 条，

∴ 这个正多边形是正十边形，

设这个正十边形的中心为 O ，则 $OA = OB = 4$ ，

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ,$$

∵ $OA = OB$ ，

∴ $\angle OAB = \angle B = 72^\circ$ ，

作 AC 平分 $\angle OAB$ 交 OB 于 C ，

则 $\angle OAC = \angle O$ ， $\angle ACB = \angle B$ ，

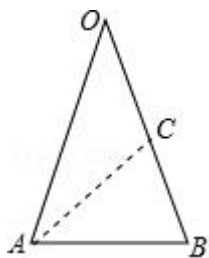
∴ $OC = CA = AB$ ， $\triangle ABC \sim \triangle OAB$ ，

$$\therefore \frac{AB}{OA} = \frac{BC}{AB}, \text{ 即 } AB^2 = 4 \times (4 - AB),$$

解得， $AB_1 = 2\sqrt{5} - 2$ ， $AB_2 = -2\sqrt{5} - 2$ （舍去），

$$\therefore AB = 2\sqrt{5} - 2,$$

故答案为： $2\sqrt{5} - 2$ ．



【点评】本题考查的是轴对称图形、正多边形的概念和性质、相似三角形的判定和性质，掌握正多边形的计算公式是解题的关键．

三．解答题（19-22 题，每题 10 分，23-24 题，每题 12 分，25 题 14 分，共 78 分）

19.（10 分）计算： $(\sqrt{3})^0 + 8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$ ．

【分析】分别化简零指数幂、分数指数幂、负指数幂，然后相加即可．

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= 3 + \sqrt{3}; \end{aligned}$$

【点评】本题考查了实数的运算，熟练掌握零指数幂、分数指数幂、负指数幂是解题的关键．

关键.

20. (10分) 解方程: $\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = 1$.

【分析】先去分母, 化成整式方程, 然后求出整式方程的解, 最后检验得出结论.

【解答】解: 去分母, 得 $x+2-2x=x^2-4$,

整理, 得 $x^2+x-6=0$,

$$\therefore (x+3)(x-2)=0,$$

$$\therefore x+3=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\therefore x=-3 \text{ 或 } x=2,$$

检验: $x=2$ 时, 分母 $x-2=0$, 因此 $x=2$ 是原分式方程的增根,

$x=-3$ 时, 左边 $=1$ = 右边

所以原方程的解为 $x=-3$.

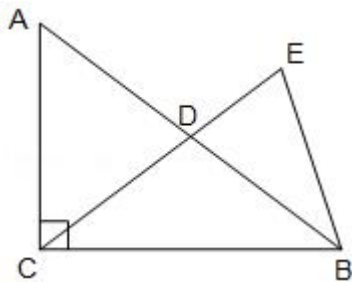
【点评】本题考查了解分式方程, 将分式方程化成整式方程求解是解题的关键.

21. (10分) 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, D 是边 AB 的中点, $CE=CB$,

$$CD=5, \sin \angle ABC = \frac{3}{5}.$$

求: (1) BC 的长.

(2) $\tan E$ 的值.



【分析】(1) 先由直角三角形的中线定理求出 CD 的长度, 然后根据勾股定理求出长度;

(2) 作 $EH \perp BC$, 垂足为 H , 所以 $\angle EHC = \angle EHB = 90^\circ$, 由 D 是边 AB 的中点, 可得 $BD = CD = \frac{1}{2}AB$, $\angle DCB = \angle ABC$, $\angle EHC = \angle ACB$, 得到 $\triangle EHC \sim \triangle ACB$, 然后根据相似比求出 $EH = \frac{24}{5}$, $CH = \frac{32}{5}$, $BH = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5}$, 因此 $\tan \angle CBE = \frac{EH}{BH} = 3$, 即 $\tan E = 3$.

【解答】解: (1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, D 是边 AB 的中点;

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\because CD=5,$$

$$\therefore AB = 10,$$

$$\because \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AC = 6$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8;$$

(2) 作 $EH \perp BC$, 垂足为 H ,

$$\therefore \angle EHC = \angle EHB = 90^\circ$$

$\because D$ 是边 AB 的中点,

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}AB, \quad \angle DCB = \angle ABC,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHC = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle EHC \sim \triangle ACB,$$

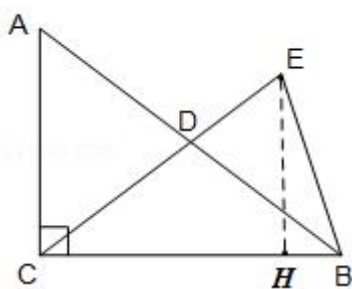
$$\therefore \frac{EH}{AC} = \frac{CH}{BC} = \frac{EC}{AB}$$

由 $BC = 8$, $CE = CB$ 得 $CE = 8$, $\angle CBE = \angle CEB$,

$$\therefore \frac{EH}{6} = \frac{CH}{8} = \frac{8}{10}$$

$$\text{解得 } EH = \frac{24}{5}, \quad CH = \frac{32}{5}, \quad BH = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \tan \angle CBE = \frac{EH}{BH} = 3, \text{ 即 } \tan E = 3.$$



【点评】 本题考查了解直角三角形，熟练运用直角三角函数以及三角形相似是解题的关键.

22. (10 分) 某演唱会购买门票的方式有两种.

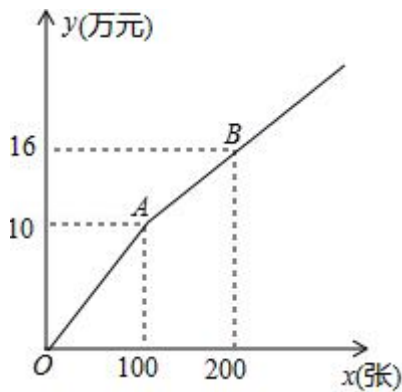
方式一: 若单位赞助广告费 10 万元, 则该单位所购门票的价格为每张 0.02 万元;

方式二: 如图所示.

设购买门票 x 张, 总费用为 y 万元, 方式一中: 总费用 = 广告赞助费 + 门票费.

(1) 求方式一中 y 与 x 的函数关系式.

(2) 若甲、乙两个单位分别采用方式一、方式二购买本场演唱会门票共 400 张，且乙单位购买超过 100 张，两单位共花费 27.2 万元，求甲、乙两单位各购买门票多少张？



【分析】(1) 方案一中，总费用 = 广告赞助费 10 + 门票单价 $0.02 \times$ 票的张数；

(2) 方案二中，当 $x > 100$ 时，设出一次函数解析式，把其中两点的坐标代入即可求得相应的函数解析式；

设乙单位购买了 a 张门票，则甲单位购买了 $(400 - a)$ 张门票，进而根据 ((1) 得甲单位的总费用，再根据两单位共花费 27.2 万元，列出方程解答便可。

【解答】解：(1) 方案一：单位赞助广告费 10 万元，该单位所购门票的价格为每张 0.02 万元，则 $y = 10 + 0.02x$ ；

(2) 方案二：当 $x > 100$ 时，设解析式为 $y = kx + b$ 。

将 $(100, 10)$, $(200, 16)$ 代入，

$$\text{得 } \begin{cases} 100k + b = 10 \\ 200k + b = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 0.06 \\ b = 4 \end{cases},$$

所以 $y = 0.06x + 4$ 。

设乙单位购买了 a 张门票，则甲单位购买了 $(400 - a)$ 张门票，根据题意得

$$0.06a + 4 + [10 + 0.02(400 - a)] = 27.2,$$

解得， $a = 130$ ，

$$\therefore 400 - a = 270,$$

答：甲、乙两单位购买门票分别为 270 张和 130 张。

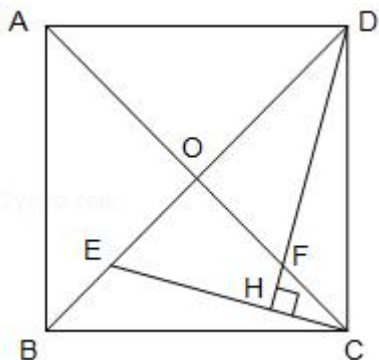
【点评】 本题考查了一次函数的应用，待定系数法求一次函数的解析式的运用，及一元一次方程解决实际问题的运用，在解答的过程中求出一一次函数的解析式 $y = 0.06x + 4$ 。是

解答的关键，根据自变量不同的取值，对总门票费分情况进行探讨是解决本题的易错点.

23. (12分) 已知：如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，若 $\angle CAD = \angle DBC$.

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

(2) E 是 OB 上一点， $DH \perp CE$ ，垂足为 H ， DH 与 OC 相交于点 F ，求证： $OE = OF$.



【分析】(1) 由菱形的性质得出 $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 2\angle DAC$ ， $\angle ABC = 2\angle DBC$ ，得出 $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ ，证出 $\angle BAD = \angle ABC$ ，求出 $\angle BAD = 90^\circ$ ，即可得出结论；

(2) 由正方形的性质得出 $AC \perp BD$ ， $AC = BD$ ， $CO = \frac{1}{2}AC$ ， $DO = \frac{1}{2}BO$ ，得出 $\angle COB = \angle DOC = 90^\circ$ ， $CO = DO$ ，证出 $\angle ECO = \angle EDH$ ，证明 $\triangle ECO \cong \triangle FDO$ (ASA)，即可得出结论.

【解答】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AD \parallel BC, \angle BAD = 2\angle DAC, \angle ABC = 2\angle DBC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because \angle CAD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC,$$

$$\therefore 2\angle BAD = 180^\circ, \therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形；

(2) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AC \perp BD, AC = BD, CO = \frac{1}{2}AC, DO = \frac{1}{2}BO,$$

$$\therefore \angle COB = \angle DOC = 90^\circ, CO = DO,$$

$$\because DH \perp CE, \text{垂足为 } H,$$

$$\therefore \angle DHE = 90^\circ, \angle EDH + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\because \angle ECO + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECO = \angle EDH,$$

$$\text{在} \triangle ECO \text{ 和 } \triangle FDO \text{ 中, } \begin{cases} \angle ECO = \angle EDH \\ CO = DO \\ \angle COE = \angle DHE = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ECO \cong \triangle FDO \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OE = OF.$$

【点评】本题考查了正方形的判定与性质、菱形的性质、全等三角形的判定与性质等知识；熟练掌握正方形的判定与性质是解题关键.

24. (12分) 已知: 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$, 经过点 $A(-1, -2)$, $B(0, 1)$.

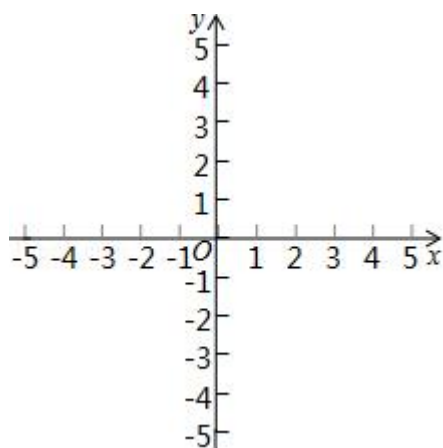
(1) 求抛物线的关系式及顶点 P 的坐标.

(2) 若点 B' 与点 B 关于 x 轴对称, 把(1)中的抛物线向左平移 m 个单位, 平移后的抛物线经过点 B' , 设此时抛物线顶点为点 P' .

①求 $\angle P'BB'$ 的大小.

②把线段 $P'B'$ 以点 B' 为旋转中心顺时针旋转 120° , 点 P' 落在点 M 处, 设点 N 在

(1)中的抛物线上, 当 $\triangle MNB'$ 的面积等于 $6\sqrt{3}$ 时, 求点 N 的坐标.



【分析】(1) 把点 A 、 B 坐标代入抛物线表达式, 即可求解;

(2) ①设抛物线平移后为 $y = -(x - 1 + m)^2 + 2$, 代入点 $B'(0, -1)$, 求出 $P'(-\sqrt{3}, 2)$, 则 $P'H = \sqrt{3}$, $HB = 1$, $BP' = \sqrt{3+1} = 2$, 即可求解; ② $BB' = 2$, $P'B = 2$, 即 $BB' = P'B$, 则 $\angle BP'B' = \angle P'B'B = 30^\circ$, 则点 P' 落在 M 处, 此时 $MB' \parallel x$ 轴, 即可求解.

【解答】解: (1) 把点 A 、 B 坐标代入抛物线表达式得: $\begin{cases} -2 = -1 - b + c \\ 1 = c \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$,

则抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 1 = -(x - 1)^2 + 2$,

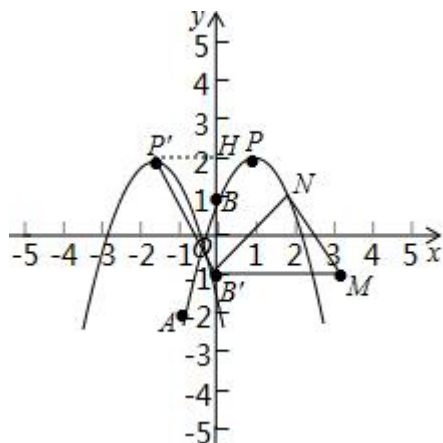
故顶点 P 的坐标为 $(1, 2)$;

(2) ①设抛物线平移后为 $y = -(x - 1 + m)^2 + 2$, 代入点 $B'(0, -1)$ 得:

$-1 = -(m-1)^2 + 2$, 解得: $m = 1 \pm \sqrt{3}$ (舍去负值),

则 $y = -(x + \sqrt{3})^2 + 2$, 则顶点 $P'(-\sqrt{3}, 2)$,

连结 $P'B$ 、 $P'B'$, 作 $P'H \perp y$ 轴交于点 H ,



则: $P'H = \sqrt{3}$, $HB = 1$, $BP' = \sqrt{3+1} = 2$,

$$\therefore \tan \angle P'BH = \frac{P'H}{BH} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle P'BH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle P'BB' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

② $\because BB' = 2$, $P'B = 2$, 即 $BB' = P'B$,

$$\therefore \angle BP'B' = \angle P'B'B = 30^\circ;$$

$\therefore$ 线段 $P'B'$ 围绕 B' 旋转 120° , 点 P' 落在 M 处,

$$\therefore \angle OB'M = 90^\circ, B'M = B'P',$$

$$\therefore MB' \parallel x \text{ 轴}, MB' = B'P' = 2\sqrt{3},$$

设: $\triangle MNB'$ 在 MB' 边上的高为 h , 则 $S_{\triangle MNB'} = \frac{1}{2} \times B'M \cdot h = 6\sqrt{3}$, 解得: $h = 6$,

设: $N(a, -7)$ 或 $(a, 5)$ 分别代入 $y = -x^2 + 2x + 1$ 得: $-7 = -a^2 + 2a + 1$,

解得: $a = 4$ 或 -2 ;

$5 = -a^2 + 2a + 1$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 故方程无实数根,

故: $a = 4$ 或 -2 , 即点 $N(4, -7)$ 或 $(-2, -7)$.

【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到一次函数、点的对称性、图象平移等, 其中 (2) ②, 通过求解 $\angle P'BB' = 60^\circ$, 得到点 P' 落在 M 处且 $MB' \parallel x$ 轴, 是本题的关键.

25. (14 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 16\text{cm}$, $AB = 20\text{cm}$, 动点 D 由点 C 向

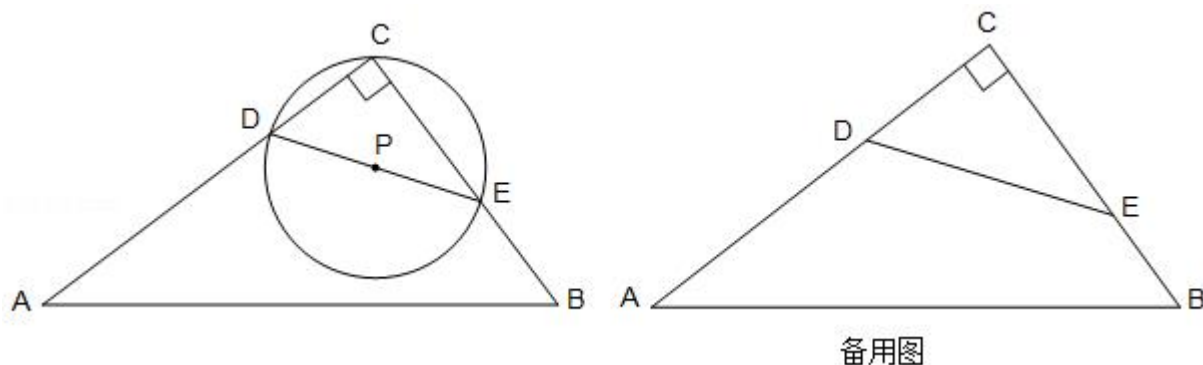
点 A 以每秒 1cm 速度在边 AC 上运动, 动点 E 由点 C 向点 B 以每秒 $\frac{4}{3}\text{cm}$ 速度在边 BC 上运动, 若点 D , 点 E 从点 C 同时出发, 运动 t 秒 ($t > 0$), 联结 DE .

(1) 求证: $\triangle DCE \sim \triangle BCA$.

(2) 设经过点 D 、 C 、 E 三点的圆为 $\odot P$.

①当 $\odot P$ 与边 AB 相切时, 求 t 的值.

②在点 D 、点 E 运动过程中, 若 $\odot P$ 与边 AB 交于点 F 、 G (点 F 在点 G 左侧), 联结 CP 并延长 CP 交边 AB 于点 M , 当 $\triangle PFM$ 与 $\triangle CDE$ 相似时, 求 t 的值.



【分析】(1) 根据题意用 t 表示出 CD 、 CE , 根据两边对应成比例、夹角相等的两个三角形相似证明;

(2) ①联结 CP 并延长 CP 交 AB 于点 H , 根据切线的性质、正弦的定义求出 CH 、 DE , 再根据正弦的定义求出 CD , 根据题意求出 t ;

②分 $\triangle FMP \sim \triangle DCE$ 和 $\triangle PMF \sim \triangle DCE$ 两种情况, 根据相似三角形的性质列出比例式, 计算即可.

【解答】(1) 证明: 由题意得: $CD = t$, $CE = \frac{4}{3}t$,

由勾股定理得, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12$,

$$\frac{CD}{CB} = \frac{t}{12}, \quad \frac{CE}{AC} = \frac{\frac{4}{3}t}{16} = \frac{t}{12},$$

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{AC}, \quad \text{又 } \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCA;$$

(2) ①联结 CP 并延长 CP 交 AB 于点 H ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot P$ 的直径, 即 P 为 DE 中点,

$$\therefore CP = DP = PE = \frac{1}{2}DE,$$

$$\therefore \angle PCE = \angle PEC,$$

$$\because \triangle DCE \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle B,$$

$$\because \angle CDE + \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle HCB = 90^\circ, \text{ 即 } CH \perp AB,$$

$$\because \odot P \text{ 与边 } AB \text{ 相切},$$

$$\therefore \text{点 } H \text{ 为切点, } CH \text{ 为 } \odot P \text{ 的直径},$$

$$\because \sin A = \frac{CH}{CA} = \frac{CB}{AB},$$

$$\therefore \frac{CH}{16} = \frac{12}{20},$$

$$\text{解得, } CH = \frac{48}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{48}{5},$$

$$\sin A = \sin \angle CED = \frac{CD}{DE} = \frac{CB}{AB}, \text{ 即 } \frac{CD}{\frac{48}{5}} = \frac{12}{20},$$

$$\text{解得, } CD = \frac{144}{25},$$

$$\therefore t = \frac{144}{25};$$

$$\textcircled{2} \text{ 由题意得, } 0 < \frac{4}{3}t \leq 12, \text{ 即 } 0 < t \leq 9,$$

$$\because CD = t, CE = \frac{4}{3}t,$$

$$\therefore DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \frac{5}{3}t,$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 得, } CM = \frac{48}{5}, CP = \frac{1}{2}DE = \frac{5}{6}t, CM \perp AB,$$

$$\therefore PM = \frac{48}{5} - \frac{5}{6}t, PF = CP = \frac{5}{6}t, \angle PMF = 90^\circ,$$

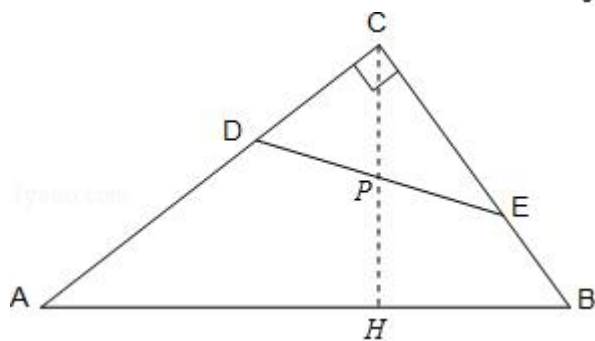
$$\text{当 } \triangle FMP \sim \triangle DCE \text{ 时, } \frac{PF}{DE} = \frac{PM}{CE}, \text{ 即 } \frac{\frac{5}{6}t}{\frac{5}{3}t} = \frac{\frac{48}{5} - \frac{5}{6}t}{\frac{4}{3}t},$$

$$\text{解得, } t = \frac{32}{5};$$

当 $\triangle PMF \sim \triangle DCE$ 时, $\frac{PF}{DE} = \frac{PM}{CD}$, 即 $\frac{\frac{5}{6}t}{\frac{5}{3}t} = \frac{\frac{48}{5} - \frac{5}{6}t}{t}$,

解得, $t = \frac{36}{5}$;

$\therefore$ 综上所述: 当 $\triangle PFM$ 与 $\triangle CDE$ 相似时, $t = \frac{32}{5}$ 或 $t = \frac{36}{5}$.



【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、切线的性质, 掌握相似三角形的判定定理和性质定理、灵活运用分情况讨论思想是解题的关键.