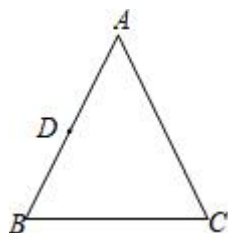


2019 年上海市虹口区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. (4 分) 计算 $(a^3)^2$ 的结果是 ()
- A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. a^9
2. (4 分) 方程 $\sqrt{x-1}=3$ 的解为 ()
- A. $x=4$ B. $x=7$ C. $x=8$ D. $x=10$.
3. (4 分) 已知一次函数 $y=(3-a)x+3$ ，如果 y 随自变量 x 的增大而增大，那么 a 的取值范围为 ()
- A. $a<3$ B. $a>3$ C. $a<-3$ D. $a>-3$.
4. (4 分) 下列事件中，必然事件是 ()
- A. 在体育中考中，小明考了满分
- B. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯
- C. 抛掷两枚正方体骰子，点数和大于 1
- D. 四边形的外角和为 180 度.
5. (4 分) 正六边形的半径与边心距之比为 ()
- A. $1:\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}:1$ C. $\sqrt{3}:2$ D. $2:\sqrt{3}$
6. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $BC=4$ ， $\tan B=2$ ，以 AB 的中点 D 为圆心， r 为半径作 $\odot D$ ，如果点 B 在 $\odot D$ 内，点 C 在 $\odot D$ 外，那么 r 可以取 ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. (4 分) 计算： $2^{-1} =$ _____.
8. (4 分) 在数轴上，实数 $2-\sqrt{5}$ 对应的点在原点的 _____ 侧. (填“左”、“右”)
9. (4 分) 不等式 $-2x > -4$ 的正整数解为 _____.

10. (4分) 如果关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 k 的值为_____.

11. (4分) 已知反比例函数的图象经过点 $A(1, 3)$, 那么这个反比例函数的解析式是_____.

12. (4分) 如果将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 3 个单位, 那么所得新抛物线的表达式为_____.

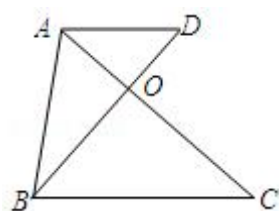
13. (4分) 一个不透明的袋中装有 4 个白球和若干个红球, 这些球除颜色外其他都相同, 摇匀后随机摸出一个球, 如果摸到白球的概率为 0.4, 那么红球有_____个.

14. (4分) 为了了解初三毕业班学生一分钟跳绳次数的情况, 某校抽取了一部分初三毕业生进行一分钟跳绳次数的测试, 将所得数据进行处理, 共分成 4 组, 频率分布表 (不完整) 如下表所示. 如果次数在 110 次 (含 110 次) 以上为达标, 那么估计该校初三毕业生一分钟跳绳次数的达标率约为_____.

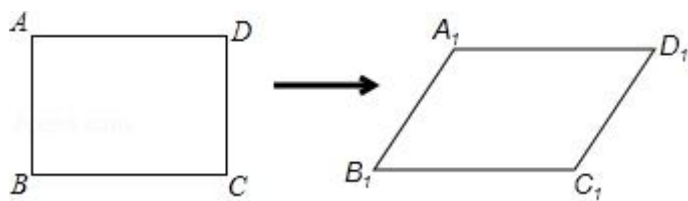
组别	分组 (含最小值, 不含最大值)	频数	频率
1	90 ~ 100	3	0.06
2	100 ~ 110	1	a
3	110 ~ 120	24	0.48
4	120 ~ 130	b	c

15. (4分) 已知两圆外切, 圆心距为 7, 其中一个圆的半径为 3, 那么另一个圆的半径长为_____.

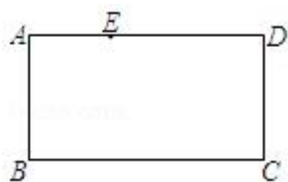
16. (4分) 如图, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, AC 与 BD 相交于点 O , 如果 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 是_____.



17. (4分) 我们知道, 四边形不具有稳定性, 容易变形. 一个矩形发生变形后成为一个平行四边形, 设这个平行四边形相邻两个内角中较小的一个内角为 α , 我们把 $\frac{1}{\cos \alpha}$ 的值叫做这个平行四边形的变形度. 如图, 矩形 $ABCD$ 的面积为 5, 如果变形后的平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 3, 那么这个平行四边形的变形度为_____.



18. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, 点 E 在边 AD 上且 $AE = 4$, 点 F 是边 BC 上的一个动点, 将四边形 $ABFE$ 沿 EF 翻折, A 、 B 的对应点 A_1 、 B_1 与点 C 在同一直线上, A_1B_1 与边 AD 交于点 G , 如果 $DG = 3$, 那么 BF 的长为_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 先化简, 再求值: $\frac{3-m}{2m-4} \div (m+2-\frac{5}{m-2})$, $m = \sqrt{2} - 3$.

20. (10分) 解方程组: $\begin{cases} x^2 - 5xy - 6y^2 = 0 & \text{①} \\ x - 3y = 12 & \text{②} \end{cases}$

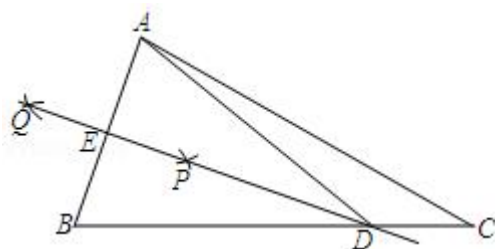
21. (10分) 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 小明进行了如下的尺规作图:

①分别以点 A 、 B 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧, 两弧分别相交于点 P 、 Q ;

②作直线 PQ 分别交边 AB 、 BC 于点 E 、 D .

(1) 小明所求作的直线 DE 是线段 AB 的_____;

(2) 联结 AD , $AD = 7$, $\sin \angle DAC = \frac{1}{7}$, $BC = 9$, 求 AC 的长.



22. (10分) 甲、乙两组同时加工某种零件, 甲组每小时加工 80 件, 乙组加工的零件数量 y (件) 与时间 x (小时) 为一次函数关系, 部分数据如下表所示.

x (小时)	2	4	6
y (件)	50	150	250

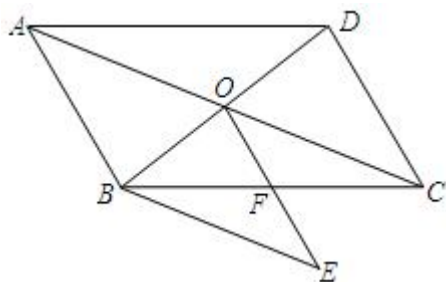
(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 甲、乙两组同时生产，加工的零件合在一起装箱，每满 340 件装一箱，零件装箱的时间忽略不计，求经过多长时间恰好装满第 1 箱？

23. (12 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，过点 B 作 $BE \parallel AC$ ，联结 OE 交 BC 于点 F ，点 F 为 BC 的中点。

(1) 求证：四边形 $AOEB$ 是平行四边形；

(2) 如果 $\angle OBC = \angle E$ ，求证： $BO \cdot OC = AB \cdot FC$ 。

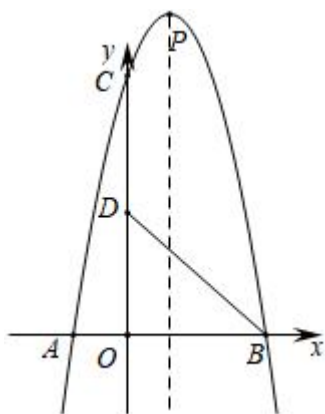


24. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 8$ 与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(4, 0)$ ，与 y 轴相交于点 C ，顶点为点 P 。点 $D(0, 4)$ 在 OC 上，联结 BC 、 BD 。

(1) 求抛物线的表达式并直接写出点 P 的坐标；

(2) 点 E 为第一象限内抛物线上一点，如果 $\triangle COE$ 与 $\triangle BCD$ 的面积相等，求点 E 的坐标；

(3) 点 Q 在抛物线对称轴上，如果 $\triangle CDB \sim \triangle CPQ$ ，求点 Q 的坐标。



25. (14 分) 如图， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = 3$ ， $AB = 4$ ，点 P 为射线 BC 上一动点，以 P 为圆心， BP 长为半径作 $\odot P$ ，交射线 BC 于点 Q ，联结 BD 、 AQ 相交于点 G ， $\odot P$ 与线段 BD 、 AQ 分别相交于点 E 、 F 。

(1) 如果 $BE = FQ$ ，求 $\odot P$ 的半径；

(2) 设 $BP = x$ ， $FQ = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

2019 年上海市虹口区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. (4 分) 计算 $(a^3)^2$ 的结果是 ()

- A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. a^9

【分析】根据幂的乘方，底数不变，指数相乘即可求.

【解答】解： $(a^3)^2 = a^6$,

故选：B.

【点评】本题考查了幂的乘方，解题的关键是熟练掌握幂的乘方公式.

2. (4 分) 方程 $\sqrt{x-1}=3$ 的解为 ()

- A. $x=4$ B. $x=7$ C. $x=8$ D. $x=10$.

【分析】将方程两边平方求解可得.

【解答】解：将方程两边平方得 $x-1=9$,

解得： $x=10$,

经检验： $x=10$ 是原无理方程的解，

故选：D.

【点评】本题考查解无理方程，解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等.

3. (4 分) 已知一次函数 $y=(3-a)x+3$ ，如果 y 随自变量 x 的增大而增大，那么 a 的取值范围为 ()

- A. $a<3$ B. $a>3$ C. $a<-3$ D. $a>-3$.

【分析】先根据一次函数的性质得出关于 a 的不等式，再解不等式即可求出 a 的取值范围.

【解答】解： $\because$ 一次函数 $y=(3-a)x+3$ ，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大，

$\therefore 3-a>0$ ，解得 $a<3$.

故选：A.

【点评】 本题考查的是一次函数的图象与系数的关系，熟知一次函数的增减性是解答此题的关键.

4. (4分) 下列事件中，必然事件是 ()

- A. 在体育中考中，小明考了满分
- B. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯
- C. 抛掷两枚正方体骰子，点数和大于1
- D. 四边形的外角和为180度.

【分析】 根据事件发生的可能性大小判断相应事件的类型即可.

【解答】 解：A、在体育中考中，小明考了满分是随机事件；

B、经过有交通信号灯的路口，遇到红灯是随机事件；

C、抛掷两枚正方体骰子，点数和大于1是必然事件；

D、四边形的外角和为180度是不可能事件，

故选：C.

【点评】 本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下，一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

5. (4分) 正六边形的半径与边心距之比为 ()

- A. $1: \sqrt{3}$
- B. $\sqrt{3}: 1$
- C. $\sqrt{3}: 2$
- D. $2: \sqrt{3}$

【分析】 求出正六边形的边心距 (用 R 表示)，根据“接近度”的定义即可解决问题.

【解答】 解：∵ 正六边形的半径为 R ,

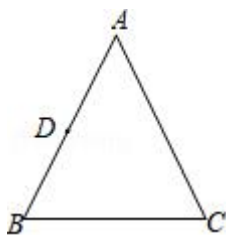
$$\therefore \text{边心距 } r = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

$$\therefore R: r = 1: \frac{\sqrt{3}}{2} = 2: \sqrt{3},$$

故选：D.

【点评】 本题考查正多边形与圆的知识，等边三角形高的计算，记住等边三角形的高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (a 是等边三角形的边长)，理解题意是解题的关键，属于中考常考题型.

6. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 4$ ， $\tan B = 2$ ，以 AB 的中点 D 为圆心， r 为半径作 $\odot D$ ，如果点 B 在 $\odot D$ 内，点 C 在 $\odot D$ 外，那么 r 可以取 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【分析】先求出 DB 和 DC 的长，根据点 B 在 $\odot D$ 内，点 C 在 $\odot D$ 外，确定 r 的取值范围，从而确定 r 可以取的值.

【解答】解：如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，连接 CD 交 AF 于点 G ，

$$\because AB = AC, BC = 4,$$

$$\therefore BF = CF = 2,$$

$$\because \tan B = 2,$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = 2, \text{ 即 } AF = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\because D \text{ 为 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore BD = \sqrt{5}, G \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的重心},$$

$$\therefore GF = \frac{1}{3}AF = \frac{4}{3},$$

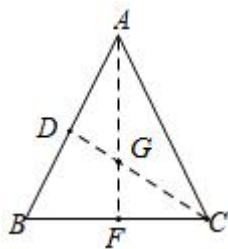
$$\therefore CG = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3},$$

$$\therefore CD = \frac{3}{2}CG = \sqrt{13},$$

$$\because \text{点 } B \text{ 在 } \odot D \text{ 内, 点 } C \text{ 在 } \odot D \text{ 外},$$

$$\therefore \sqrt{5} < r < \sqrt{13},$$

故选：B.



【点评】本题考查点与圆的位置关系，锐角三角函数的定义，等腰三角形的性质，解题的关键是掌握点与圆的位置关系的判别方法.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. (4 分) 计算: $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

【分析】根据幂的负整数指数运算法则进行计算即可.

【解答】解: $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查负整数指数幂的运算. 幂的负整数指数运算, 先把底数化成其倒数, 然后将负整数指数幂当成正的进行计算.

8. (4 分) 在数轴上, 实数 $2 - \sqrt{5}$ 对应的点在原点的 左 侧. (填“左”、“右”)

【分析】根据 $2 < \sqrt{5} < 3$, 可知 $2 - \sqrt{5} < 0$, 所以 $2 - \sqrt{5}$ 在原点的左侧.

【解答】解: 根据题意可知: $2 - \sqrt{5} < 0$,

$\therefore 2 - \sqrt{5}$ 对应的点在原点的左侧.

故填: 左

【点评】本题考查实数与数轴上点的对应关系, 掌握了实数与数轴上的点的一一对应关系, 很容易得出正确答案.

9. (4 分) 不等式 $-2x > -4$ 的正整数解为 $x = 1$.

【分析】由题意可求一元一次不等式的解, 即可得正整数解.

【解答】解: $\because -2x > -4$

$\therefore x < 2$

$\therefore$ 正整数解为: $x = 1$

故答案为: $x = 1$

【点评】本题考查了一元一次不等式的整数解, 熟练运用解不等式的方法是本题的关键.

10. (4 分) 如果关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 k 的值为 1.

【分析】根据根的判别式和已知得出 $\Delta = (-6)^2 - 4k \times 9 = 0$ 且 $k \neq 0$, 求出即可.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4k \times 9 = 0$ 且 $k \neq 0$,

解得: $k = 1$,

故答案为: 1.

【点评】本题考查了一元二次方程的定义和根的判别式, 能根据已知得出 $\Delta = (-6)^2 - 4k \times 9 = 0$ 且 $k \neq 0$ 是解此题的关键.

11. (4分) 已知反比例函数的图象经过点 $A(1, 3)$, 那么这个反比例函数的解析式是 $y = \frac{3}{x}$.

【分析】把 $(1, 3)$ 代入函数 $y = \frac{k}{x}$ 中可先求出 k 的值, 那么就可求出函数解析式.

【解答】解: 由题意知, $k = 1 \times 3 = 3$.

则反比例函数的解析式为: $y = \frac{3}{x}$.

故答案为: $y = \frac{3}{x}$.

【点评】本题考查了待定系数法求解反比例函数解析式, 此为近几年中考的热点问题, 同学们要熟练掌握.

12. (4分) 如果将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 3 个单位, 那么所得新抛物线的表达式为 $y = 2(x+3)^2$.

【分析】根据“左加右减, 上加下减”的规律解题.

【解答】解: 将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 3 个单位, 所得新抛物线的表达式为 $y = 2(x+3)^2$,

故答案为: $y = 2(x+3)^2$.

【点评】主要考查了函数图象的平移, 抛物线与坐标轴的交点坐标的求法, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减. 并用规律求函数解析式.

13. (4分) 一个不透明的袋中装有 4 个白球和若干个红球, 这些球除颜色外其他都相同, 摇匀后随机摸出一个球, 如果摸到白球的概率为 0.4, 那么红球有 6 个.

【分析】设红球有 x 个, 根据摸到白球的概率为 0.4 列出方程, 求出 x 的值即可.

【解答】解: 设红球有 x 个, 根据题意得:

$$\frac{4}{4+x} = 0.4,$$

解得: $x = 6$,

答: 红球有 6 个;

故答案为: 6.

【点评】本题考查了概率公式, 设出未知数, 列出方程是解题的关键. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

14. (4分) 为了了解初三毕业班学生一分钟跳绳次数的情况, 某校抽取了一部分初三毕业生进行一分钟跳绳次数的测试, 将所得数据进行处理, 共分成 4 组, 频率分布表 (不完

整)如下表所示. 如果次数在 110 次(含 110 次)以上为达标, 那么估计该校初三毕业生一分钟跳绳次数的达标率约为 92%.

组别	分组(含最小值, 不含最大值)	频数	频率
1	90 ~ 100	3	0.06
2	100 ~ 110	1	a
3	110 ~ 120	24	0.48
4	120 ~ 130	b	c

【分析】根据抽取的学生一分钟跳绳的达标率, 即可估计该校初三毕业生一分钟跳绳的达标率.

【解答】解: $\because$ 样本容量为: $3 \div 0.06 = 50$,
 $\therefore$ 该校初三毕业生一分钟跳绳次数的达标率约为 $\frac{50-3-1}{50} \times 100\% = 92\%$,

故答案为: 92%

【点评】本题考查的是频数分布表的知识, 准确读表、从中获取准确的信息是解题的关键, 注意用样本估计总体的运用.

15. (4 分) 已知两圆外切, 圆心距为 7, 其中一个圆的半径为 3, 那么另一个圆的半径长为 4.

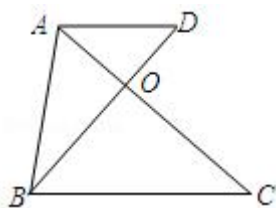
【分析】根据两圆外切时圆心距等于两圆的半径的和, 即可求解.

【解答】解: $\because$ 两圆外切, 圆心距为 7, 若其中一个圆的半径为 3,
 $\therefore$ 另一个圆的半径 $= 7 - 3 = 4$.

故答案为: 4.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系与数量关系间的联系. 此类题为中考热点, 需重点掌握.

16. (4 分) 如图, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, AC 与 BD 相交于点 O , 如果 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 是 $\vec{a} - 2\vec{b}$.



【分析】根据平面向量的线性运算法则即可求出答案.

【解答】解：∵ $AD \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$$

$$= \vec{AO} + \vec{OD} + 3\vec{DO}$$

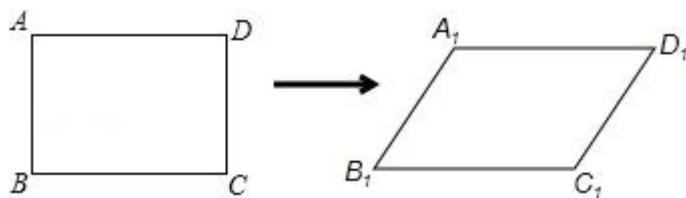
$$= \vec{a} + \vec{b} - 3\vec{b}$$

$$= \vec{a} - 2\vec{b},$$

故答案为： $\vec{a} - 2\vec{b}$.

【点评】本题考查平面向量，解题的关键是熟练运用平面向量的运算法则，本题属于基础题型.

17. (4分) 我们知道，四边形不具有稳定性，容易变形. 一个矩形发生变形后成为一个平行四边形，设这个平行四边形相邻两个内角中较小的一个内角为 α ，我们把 $\frac{1}{\cos \alpha}$ 的值叫做这个平行四边形的变形度. 如图，矩形 $ABCD$ 的面积为 5，如果变形后的平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 3，那么这个平行四边形的变形度为 $\frac{5}{4}$.



【分析】设矩形的长和宽分别为 a , b ，变形后的平行四边形的高为 h ，根据平行四边形和矩形的面积公式即可得到结论.

【解答】解：过 A_1 作 $A_1D \perp B_1C_1$,

设矩形的长和宽分别为 a , b ，变形后的平行四边形的高为 h ,

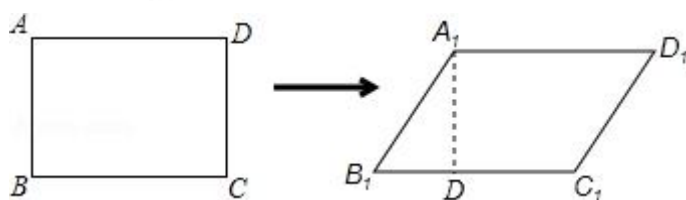
$$\therefore ab = 5, 3 = ah,$$

$$\therefore b = \frac{5}{a}, \quad h = \frac{3}{a},$$

$$\therefore B_1D = \sqrt{b^2 - h^2} = \frac{4}{a},$$

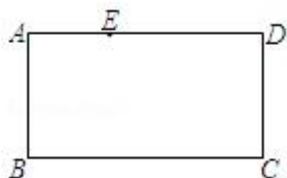
$$\therefore \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{\frac{4}{a}}}{\frac{5}{a}} = \frac{5}{4},$$

故答案为: $\frac{5}{4}$.



【点评】本题考查了平行四边形的性质，矩形的性质，三角函数的定义，正确的理解题意是解题的关键．

18. (4分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ，点 E 在边 AD 上且 $AE = 4$ ，点 F 是边 BC 上的一个动点，将四边形 $ABFE$ 沿 EF 翻折， A 、 B 的对应点 A_1 、 B_1 与点 C 在同一直线上， A_1B_1 与边 AD 交于点 G ，如果 $DG = 3$ ，那么 BF 的长为 $6\sqrt{5} - 8$ ．



【分析】由 $DG = 3$ ， $CD = 6$ 可知 $\triangle CDG$ 的三角函数关系，由 $\triangle CDG$ 分别与 $\triangle A'EG$ ， $\triangle B'FC$ 相似，可求得 CG ， CB' ，由勾股定理 $\triangle CFB'$ 可求得 BF 长度．

【解答】解： $\because \triangle CDG \sim \triangle A'EG$ ， $A'E = 4$

$$\therefore A'G = 2$$

$$\therefore B'G = 4$$

由勾股定理可知 $CG' = 3\sqrt{5}$

$$\text{则 } CB' = 3\sqrt{5} - 4$$

由 $\triangle CDG \sim \triangle CFB'$

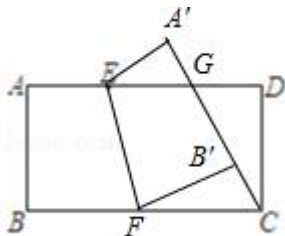
设 $BF = x$

$$\frac{CB'}{B'F} = \frac{GD}{CD}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}-4}{x} = \frac{3}{6}$$

解得 $x = 6\sqrt{5}-8$

故答案为 $6\sqrt{5}-8$



【点评】 本题考查了翻折的性质与相似，通过寻找等角关系，确定相似关系是本题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 先化简，再求值： $\frac{3-m}{2m-4} \div (m+2-\frac{5}{m-2})$, $m = \sqrt{2}-3$.

【分析】 先把分式化简，再将 m 的值代入求解.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{-(m-3)}{2(m-2)} \div \frac{(m+3)(m-3)}{m-2} \\ &= \frac{-(m-3)}{2(m-2)} \times \frac{m-2}{(m+3)(m-3)} \\ &= -\frac{1}{2(m+3)} \end{aligned}$$

当 $m = \sqrt{2}-3$ 时，原式 $= -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【点评】 本题主要考查了分式的化简求值这一知识点，要求把式子化到最简，然后代值.

20. (10 分) 解方程组： $\begin{cases} x^2-5xy-6y^2=0 \text{①} \\ x-3y=12 \text{②} \end{cases}$

【分析】 对于第 1 个方程利用因式分解法可得 $x-6y=0$ 或 $x+y=0$ ，再将它们与方程②分别组成方程组，分别求解可得.

【解答】 解：由①得， $x-6y=0$ 或 $x+y=0$,

将它们与方程②分别组成方程组，得： $\begin{cases} x-6y=0, \\ x-3y=12. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-3y=12. \end{cases}$

分别解这两个方程组，

$$\text{得原方程组的解为} \begin{cases} x_1=24, \\ y_1=4; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-3. \end{cases}$$

【点评】 本题是考查高次方程，高次方程的解法思想：通过适当的方法，把高次方程化

为次数较低的方程求解．所以解高次方程一般要降次，即把它转化成二次方程或一次方程．也有的通过因式分解来解．

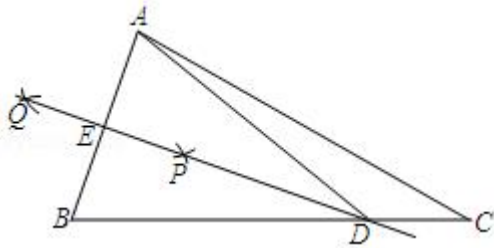
21. (10分) 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，小明进行了如下的尺规作图：

①分别以点 A 、 B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧分别相交于点 P 、 Q ；

②作直线 PQ 分别交边 AB 、 BC 于点 E 、 D ．

(1) 小明所求作的直线 DE 是线段 AB 的线段 AB 的垂直平分线(或中垂线)；

(2) 联结 AD ， $AD = 7$ ， $\sin \angle DAC = \frac{1}{7}$ ， $BC = 9$ ，求 AC 的长．



【分析】(1) 利用基本作法进行判断；

(2) 过点 D 作 $DF \perp AC$ ，垂足为点 F ，如图，根据线段垂直平分线的性质得到 $AD = BD = 7$ ，则 $CD = 2$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中先利用正弦的定义可计算出 DF ，再利用勾股定理可计算出 AF ，接着在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中利用勾股定理可计算出 CF ，然后计算 $AF + CF$ ．

【解答】解：(1) 小明所求作的直线 DE 是线段 AB 的垂直平分线(或中垂线)；

故答案为线段 AB 的垂直平分线(或中垂线)；

(2) 过点 D 作 $DF \perp AC$ ，垂足为点 F ，如图，

$\because DE$ 是线段 AB 的垂直平分线，

$$\therefore AD = BD = 7$$

$$\therefore CD = BC - BD = 2,$$

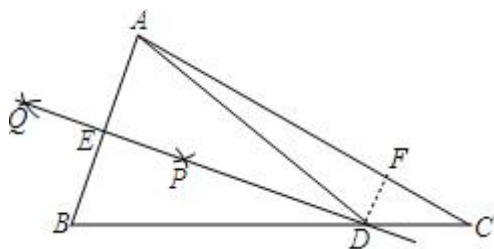
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADF \text{ 中, } \because \sin \angle DAC = \frac{DF}{AD} = \frac{1}{7},$$

$$\therefore DF = 1,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADF \text{ 中, } AF = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CDF \text{ 中, } CF = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = AF + CF = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$



【点评】 本题考查了作图 - 基本作图：熟练掌握基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线），也考查了解直角三角形．

- 22.（10 分）甲、乙两组同时加工某种零件，甲组每小时加工 80 件，乙组加工的零件数量 y （件）与时间 x （小时）为一次函数关系，部分数据如下表所示．

x （小时）	2	4	6
y （件）	50	150	250

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）甲、乙两组同时生产，加工的零件合在一起装箱，每满 340 件装一箱，零件装箱的时间忽略不计，求经过多长时间恰好装满第 1 箱？

【分析】（1）运用待定系数法解答即可；

（2）设经过 x 小时恰好装满第 1 箱，可得方程 $80x+50x-50=340$ ，解方程即可解答．

【解答】解：（1）设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$ （ $k \neq 0$ ）

把（2，50）（4，150）代入，

$$\text{得} \begin{cases} 50=2k+b, \\ 150=4k+b. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=50, \\ b=-50. \end{cases}$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=50x-50$ ；

（2）设经过 x 小时恰好装满第 1 箱，

根据题意得 $80x+50x-50=340$ ，

$$\therefore x=3,$$

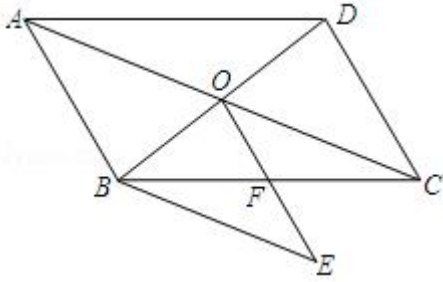
答：经过 3 小时恰好装满第 1 箱．

【点评】 本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，运用待定系数法求出 y 与 x 之间的函数关系式．

- 23.（12 分）如图，在 $\square ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，过点 B 作 $BE \parallel AC$ ，联结 OE 交 BC 于点 F ，点 F 为 BC 的中点．

(1) 求证：四边形 $AOEB$ 是平行四边形；

(2) 如果 $\angle OBC = \angle E$ ，求证： $BO \cdot OC = AB \cdot FC$.



【分析】(1) 根据平行四边形的性质和判定以及相似三角形的性质得出比例解答即可；

(2) 根据平行四边形的性质和相似三角形的判定和性质解答即可 .

【解答】证明：(1) $\because BE \parallel AC$,

$$\therefore \triangle COF \sim \triangle BFE$$

$$\therefore \frac{OC}{BE} = \frac{CF}{BF}$$

$\because$ 点 F 为 BC 的中点,

$$\therefore CF = BF,$$

$$\therefore OC = BE$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AO = CO$$

$$\therefore AO = BE$$

$\because BE \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $AOEB$ 是平行四边形

(2) $\because$ 四边形 $AOEB$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle BAO = \angle E$$

$\because \angle OBC = \angle E$,

$$\therefore \angle BAO = \angle OBC$$

$\because \angle ACB = \angle BCO$,

$$\therefore \triangle COB \sim \triangle CBA$$

$$\therefore \frac{BO}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AC = 2OC$$

∵ 点 F 为 BC 的中点,

$$\therefore BC = 2FC$$

$$\therefore \frac{BO}{AB} = \frac{FC}{OC}$$

$$\text{即 } BO \cdot OC = AB \cdot FC$$

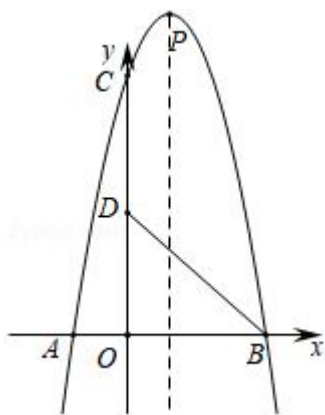
【点评】 此题考查相似三角形的判定和性质, 关键是根据平行四边形的性质和相似三角形的判定和性质解答.

24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 8$ 与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(4, 0)$, 与 y 轴相交于点 C , 顶点为点 P . 点 $D(0, 4)$ 在 OC 上, 联结 BC 、 BD .

(1) 求抛物线的表达式并直接写出点 P 的坐标;

(2) 点 E 为第一象限内抛物线上一点, 如果 $\triangle COE$ 与 $\triangle BCD$ 的面积相等, 求点 E 的坐标;

(3) 点 Q 在抛物线对称轴上, 如果 $\triangle CDB \sim \triangle CPQ$, 求点 Q 的坐标.



【分析】 (1) 由点 A, B 的坐标, 利用待定系数法可求出抛物线的表达式, 再利用配方法可求出抛物线顶点 P 的坐标;

(2) 利用二次函数图象上点的坐标特征可求出点 C 的坐标, 设点 E 的坐标为 $(x, -x^2 + 2x + 8)$ ($0 < x < 4$), 由三角形的面积公式结合 $S_{\triangle COE} = S_{\triangle BCD}$ 可得出关于 x 的一元一次方程, 解之即可得出 x 的值, 再将其代入点 E 的坐标中即可求出结论;

(3) 过点 C 作 $CM \parallel x$ 轴, 交抛物线对称轴于点 M , 由点 C, P, B, D 的坐标可得出 $\angle CPQ = \angle CDB = 135^\circ$ 及 CP, BD, CD 的长度, 由 $\triangle CDB \sim \triangle CPQ$ 可得出 $\frac{CP}{CD} = \frac{PQ}{DB}$, 代入 CP, BD, CD 的长可求出 PQ 的长, 再结合点 P 的坐标即可得出点 Q 的坐标.

【解答】 解: (1) 将点 $A(-2, 0), B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 8$, 得:

$$\begin{cases} 4a-2b+8=0 \\ 16a+4b+8=0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 8$.

$$\because y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, 9)$.

$$(2) \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } y = -x^2 + 2x + 8 = 8,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 8)$.

设点 E 的坐标为 $(x, -x^2 + 2x + 8) (0 < x < 4)$,

$$\because S_{\triangle COE} = S_{\triangle BCD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8 \cdot x = \frac{1}{2} \times 4 \times 4,$$

解得: $x = 2$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2, 8)$.

(3) 过点 C 作 $CM \parallel x$ 轴, 交抛物线对称轴于点 M , 如图所示.

$\because$ 点 $B(4, 0)$, 点 $D(0, 4)$,

$$\therefore OB = OD = 4,$$

$$\therefore \angle ODB = 45^\circ, \quad BD = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle BDC = 135^\circ.$$

$\because$ 点 $C(0, 8)$, 点 $P(1, 9)$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(1, 8)$,

$$\therefore CM = PM = 1,$$

$$\therefore \angle CPM = 45^\circ, \quad CP = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 Q 在抛物线对称轴上且在点 P 的上方,

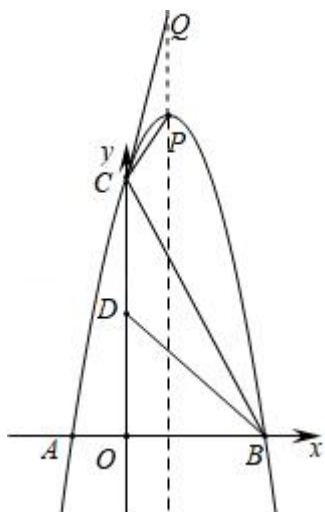
$$\therefore \angle CPQ = \angle CDB = 135^\circ.$$

$$\because \triangle CDB \sim \triangle CPQ,$$

$$\therefore \frac{CP}{CD} = \frac{PQ}{DB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{PQ}{4\sqrt{2}},$$

解得: $PQ = 2$,

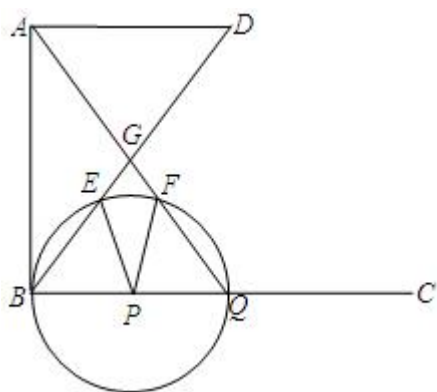
$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(1, 11)$.



【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征、三角形的面积以及相似三角形的性质，解题的关键是：（1）根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数解析式；（2）利用三角形的面积公式，找出关于 x 的一元一次方程；（3）利用相似三角形的性质，求出 PQ 的长度．

25. (14 分) 如图, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 3$, $AB = 4$, 点 P 为射线 BC 上一动点, 以 P 为圆心, BP 长为半径作 $\odot P$, 交射线 BC 于点 Q , 联结 BD 、 AQ 相交于点 G , $\odot P$ 与线段 BD 、 AQ 分别相交于点 E 、 F .

- (1) 如果 $BE = FQ$, 求 $\odot P$ 的半径;
- (2) 设 $BP = x$, $FQ = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;
- (3) 联结 PE 、 PF , 如果四边形 $EGFP$ 是梯形, 求 BE 的长.



【分析】(1) 证出 $\angle FQP = \angle ADB$, 由三角函数得出 $\tan \angle FQP = \frac{AB}{BQ} = \frac{4}{2r}$, 得出 $\frac{4}{3} = \frac{4}{2r}$,

即可得出结果;

(2) 过点 P 作 $PM \perp FQ$, 垂足为点 M , 在 $Rt\triangle ABQ$ 中, 由三角函数得出 $\cos \angle AQB = \frac{BQ}{AQ}$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}, \text{ 在 Rt } \triangle PQM \text{ 中, } QM = PQ \cos \angle AQB = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}, \text{ 进一步求出}$$

$$y = \frac{2x^2\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}, \text{ 当圆与 } D \text{ 点相交时, } x \text{ 最大, 作 } DH \perp BC \text{ 于 } H, \text{ 则 } PD = PB = x, DH$$

$= AB = 4, BH = AD = 3, \text{ 则 } PH = BP - BH = x - 3, \text{ 在 Rt } \triangle PDH \text{ 中, 由勾股定理得出方程, 解方程求出 } x \text{ 的值, 即可得出 } x \text{ 的取值范围;}$

(3) 设 $BP = x$, 分两种情况: ① $EP \parallel AQ$ 时, 求出 $QG = QB = 2x$, 同理: $AG = AD = 3$, 在 $\text{Rt} \triangle ABQ$ 中, 由勾股定理得出方程, 解方程得出 $x = \frac{7}{12}$, $QG = QB = 2x = \frac{7}{6}$, 由平行线得出 $\frac{BG}{BD} = \frac{QG}{AQ}$, 求出 $BG = \frac{7}{5}$, 即可得出结果;

② $PF \parallel BD$ 时, 同①得: $BG = BQ = 2x, DG = AD = 3$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 由勾股定理得出方程, 解方程求出 $BQ = 2, BP = 1$, 作 $PN \perp BG$ 于 N , 由垂径定理得出 $BE = 2BN$, 由三角函数得出 $\cos \angle PBN = \cos \angle ADB = \frac{3}{5}$, 求出 $BN = \frac{3}{5}$, 即可得出结果.

【解答】 解: (1) $\because BE = FQ$,

$$\therefore \angle BPE = \angle FPQ,$$

$$\because PE = PB,$$

$$\therefore \angle EBP = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle EPB),$$

$$\text{同理 } \angle FQP = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle FPQ),$$

$$\therefore \angle EBP = \angle FQP,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle EBP,$$

$$\therefore \angle FQP = \angle ADB,$$

$$\therefore \tan \angle FQP = \tan \angle ADB = \frac{4}{3},$$

$$\text{设 } \odot P \text{ 的半径为 } r, \text{ 则 } \tan \angle FQP = \frac{AB}{BQ} = \frac{4}{2r},$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{4}{2r},$$

$$\text{解得: } r = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \odot P \text{ 的半径为 } \frac{3}{2};$$

(2) 过点 P 作 $PM \perp FQ$, 垂足为点 M , 如图 1 所示:

$$\text{在 Rt}\triangle ABQ \text{ 中, } \cos \angle AQB = \frac{BQ}{AQ} = \frac{2BP}{\sqrt{(2BP)^2 + AB^2}} = \frac{2x}{\sqrt{(2x)^2 + 4^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PQM \text{ 中, } QM = PQ \cos \angle AQB = \frac{x^2 \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$\because PM \perp FQ, PF = PQ,$$

$$\therefore FQ = 2QM = \frac{2x^2 \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$\therefore y = \frac{2x^2 \sqrt{x^2+4}}{x^2+4},$$

当圆与 D 点相交时, x 最大, 作 $DH \perp BC$ 于 H , 如图 2 所示:

$$\text{则 } PD = PB = x, DH = AB = 4, BH = AD = 3,$$

$$\text{则 } PH = BP - BH = x - 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDH \text{ 中, 由勾股定理得: } 4^2 + (x - 3)^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{25}{6},$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围为: } 0 < x \leq \frac{25}{6};$$

(3) 设 $BP = x$, 分两种情况:

① $EP \parallel AQ$ 时,

$$\therefore \angle BEP = \angle BGQ,$$

$$\because PB = PE,$$

$$\therefore \angle PBE = \angle BEP,$$

$$\therefore \angle BGQ = \angle PBE,$$

$$\therefore QG = QB = 2x,$$

$$\text{同理: } AG = AD = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABQ \text{ 中, 由勾股定理得: } 4^2 + (2x)^2 = (3+2x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{7}{12},$$

$$\therefore QG = QB = 2x = \frac{7}{6},$$

$$\because EP \parallel AQ, PB = PQ,$$

$$\therefore BE = EG,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{QG}{AQ}, \text{ 即 } \frac{BG}{5} = \frac{\frac{7}{6}}{3 + \frac{7}{6}},$$

$$\text{解得: } BG = \frac{7}{5},$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BG = \frac{7}{10};$$

$$\textcircled{2} PF \parallel BD \text{ 时, 同 } \textcircled{1} \text{ 得: } BG = BQ = 2x, DG = AD = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, 由勾股定理得: } 4^2 + 3^2 = (3 + 2x)^2,$$

$$\text{解得: } x = 1 \text{ 或 } x = -4 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore BQ = 2,$$

$$\therefore BP = 1,$$

作 $PN \perp BG$ 于 N , 则 $BE = 2BN$, 如图 3 所示:

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle PBN = \angle ADB,$$

$$\therefore \cos \angle PBN = \cos \angle ADB = \frac{3}{5}, \text{ 即 } \frac{BN}{BP} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BN = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BE = 2BN = \frac{6}{5};$$

$$\text{综上所述, } BE = \frac{7}{10} \text{ 或 } \frac{6}{5}.$$

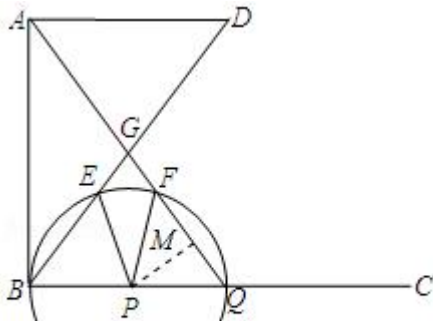


图 1

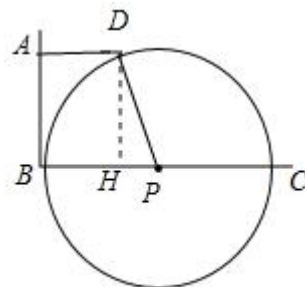


图 2

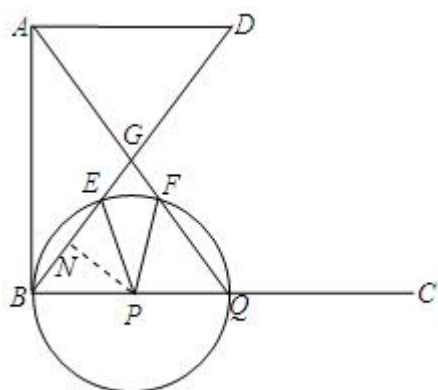


图 3

【点评】本题是圆的综合题目，考查了等腰三角形的判定与性质、平行线的性质、三角函数、垂径定理、勾股定理等知识；本题综合性强，熟练掌握等腰三角形的性质，由勾股定理得出方程是解题关键．