

2019 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

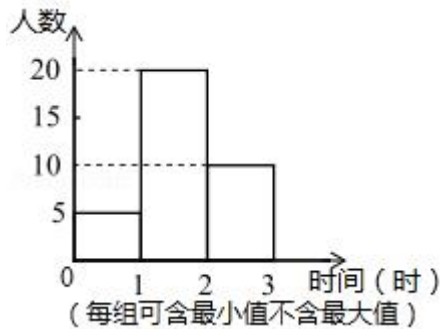
一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 下列各数不是 4 的因数是 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. (4 分) 如果分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 有意义，则 x 与 y 必须满足 ()
A. $x = -y$ B. $x \neq -y$ C. $x = y$ D. $x \neq y$
3. (4 分) 直线 $y = 2x - 7$ 不经过 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
4. (4 分) 某运动队在一次队内选拔比赛中，甲、乙、丙、丁四位运动员的平均成绩相等，方差分别为 0.85、1.23、5.01、3.46，那么这四位运动员中，发挥较稳定的是 ()
A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁
5. (4 分) 在线段、等边三角形、等腰梯形、平行四边形中，一定是轴对称图形的个数有 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
6. (4 分) 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AO = CO$ ，如果添加下列一个条件后，就能判定这个四边形是菱形的是 ()
A. $BO = DO$ B. $AB = BC$ C. $AB = CD$ D. $AB \parallel CD$

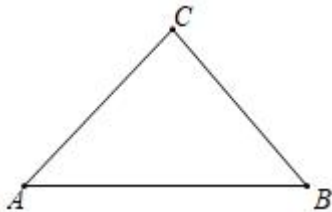
二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4 分) $\frac{5}{2}$ 的相反数是_____.
8. (4 分) 分解因式： $a^2 - 2ab + b^2 - 4 =$ _____.
9. (4 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x+6}$ ，那么 $f(-2) =$ _____.
10. (4 分) 如果关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有两个实数根，那么 m 的取值范围是_____.
11. (4 分) 已知一个正多边形的中心角为 30 度，边长为 x 厘米 ($x > 0$)，周长为 y 厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式为_____.
12. (4 分) 从 1、2、3 这三个数中任选两个组成两位数，在组成的所有两位数中任意抽取一个数，这个数恰好是偶数的概率是_____.
13. (4 分) 在四边形 $ABCD$ 中，向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 满足 $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{CD}$ ，那么线段 AB 与 CD 的位置关系是_____.

14. (4分) 某校有 560 名学生, 为了解这些学生每天做作业所用的时间, 调查人员在这所学校的全体学生中随机抽取了部分学生进行问卷调查, 并把结果制成如图的统计图, 根据这个统计图可以估计这个学校全体学生每天做作业时间不少于 2 小时的人数约为_____名.



15. (4分) 已知一个角的度数为 50 度, 那么这个角的补角等于_____.
16. (4分) 已知梯形的上底长为 5 厘米, 下底长为 9 厘米, 那么这个梯形的中位线长等于_____厘米.
17. (4分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle A = 45^\circ$, 将这个三角形绕点 B 旋转, 使点 A 落在射线 AC 上的点 A_1 处, 点 C 落在点 C_1 处, 那么 $AC_1 =$ _____.



18. (4分) 定义: 如果 P 是圆 O 所在平面内的一点, Q 是射线 OP 上一点, 且线段 OP 、 OQ 的比例中项等于圆 O 的半径, 那么我们称点 P 与点 Q 为这个圆的一对反演点. 已知点 M 、 N 为圆 O 的一对反演点, 且点 M 、 N 到圆心 O 的距离分别为 4 和 9, 那么圆 O 上任意一点到点 M 、 N 的距离之比 $\frac{AM}{AN} =$ _____.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $(-3)^0 - 9^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} + |2 - \sqrt{3}|$.

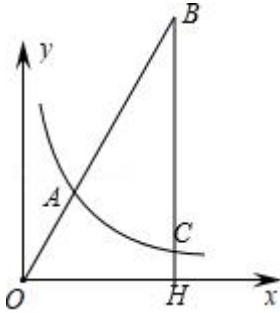
20. (10分) 解不等式组: $\begin{cases} 2x+5 \geq 3 \\ \frac{5}{6}x-2 < \frac{1}{3}x \end{cases}$, 并写出这个不等式组的自然数解.

21. (10分) 已知: 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 经过第一象限内的点 A ,

延长 OA 到点 B ，使得 $BA = 2AO$ ，过点 B 作 $BH \perp x$ 轴，垂足为点 H ，交双曲线于点 C ，点 B 的横坐标为 6.

求：(1) 点 A 的坐标；

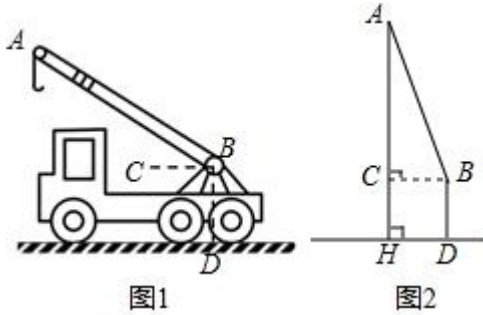
(2) 将直线 AB 平移，使其经过点 C ，求平移后直线的表达式.



22. (10 分) 如图 1，一辆吊车工作时的吊臂 AB 最长为 20 米，吊臂与水平线的夹角 $\angle ABC$ 最大为 70° ，旋转中心点 B 离地面的距离 BD 为 2 米.

(1) 如图 2，求这辆吊车工作时点 A 离地面的最大距离 AH (参考数据： $\sin 70^\circ \approx 0.94$ ， $\cos 70^\circ \approx 0.34$ ， $\tan 70^\circ \approx 2.75$)；

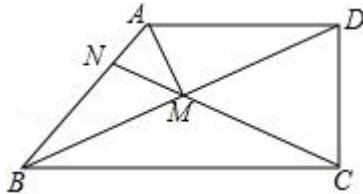
(2) 一天，王师傅接到紧急通知，要求将这辆吊车立即开到 40 千米远的某工地，因此王师傅以每小时比平时快 20 千米的速度匀速行驶，结果提前 20 分钟到达，求这次王师傅所开的吊车速度.



23. (12 分) 已知：如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $DC \perp BC$ ， $AB = AD$ ， $AM \perp BD$ ，垂足为点 M ，连接 CM 并延长，交线段 AB 于点 N .

求证：(1) $\angle ABD = \angle BCM$ ；

(2) $BC \cdot BN = CN \cdot DM$.



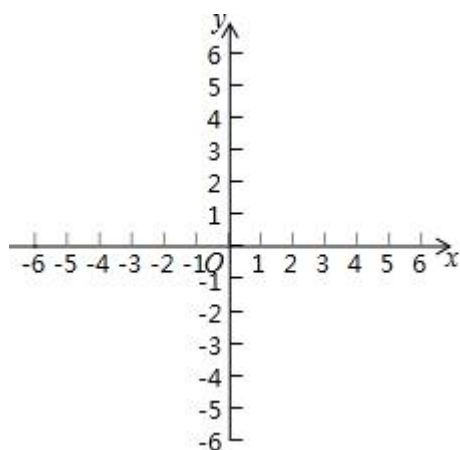
24. (12分) 已知抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 $M(3, -4)$, 与 x 轴相交于点 $A(-3, 0)$

和点 B , 与 y 轴相交于点 C .

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 如果 P 是这条抛物线对称轴上一点, $PC = BC$, 求点 P 的坐标;

(3) 在第(2)小题的条件下, 当点 P 在 x 轴上方时, 求 $\angle PCB$ 的正弦值.

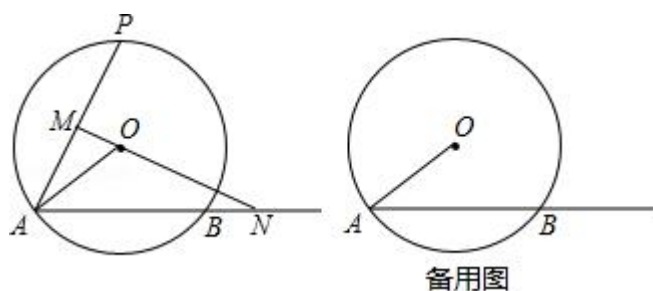


25. (14分) 已知 AB 是圆 O 的一条弦, P 是圆 O 上一点, 过点 O 作 $MN \perp AP$, 垂足为点 M , 并交射线 AB 于点 N , 圆 O 的半径为 5, $AB = 8$.

(1) 当 P 是优弧 $\widehat{AB}$ 的中点时 (如图), 求弦 AP 的长;

(2) 当点 N 与点 B 重合时, 试判断: 以圆 O 为圆心, $\frac{3}{2}$ 为半径的圆与直线 AP 的位置关系, 并说明理由;

(3) 当 $\angle BNO = \angle BON$, 且圆 N 与圆 O 相切时, 求圆 N 半径的长.



2019 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列各数不是 4 的因数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】根据求一个数的因数的方法，判断出所给的各数不是 4 的因数是哪些即可．

【解答】解： $\because$ 4 的因数有：1、2、4，

$\therefore$ 各数不是 4 的因数是 3．

故选：C．

【点评】此题主要考查了求一个数因数的方法，要熟练掌握，应有顺序的写，做到不重不漏．

2.（4 分）如果分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 有意义，则 x 与 y 必须满足（ ）

- A. $x = -y$ B. $x \neq -y$ C. $x = y$ D. $x \neq y$

【分析】根据分式有意义的条件是 $x - y \neq 0$ ，可得 $x - y \neq 0$ ，进而可得答案．

【解答】解：由题意得： $x - y \neq 0$ ，

即： $x \neq y$ ，

故选：D．

【点评】此题主要考查了分式有意义的条件，关键是掌握分式分母不为零．

3.（4 分）直线 $y = 2x - 7$ 不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据题目中的函数解析式和一次函数的性质可以解答本题．

【解答】解： $\because$ 直线 $y = 2x - 1$ ， $k = 2 > 0$ ， $b = -1$ ，

$\therefore$ 该直线经过第一、三、四象限，不经过第二象限，

故选：B．

【点评】本题考查一次函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质解答．

4.（4 分）某运动队在一次队内选拔比赛中，甲、乙、丙、丁四位运动员的平均成绩相等，

方差分别为 0.85、1.23、5.01、3.46，那么这四位运动员中，发挥较稳定的是（ ）

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【分析】根据方差的意义求解可得.

【解答】解：由题意知甲的方差最小，成绩最稳定，

故选：A.

【点评】本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

5. (4 分) 在线段、等边三角形、等腰梯形、平行四边形中，一定是轴对称图形的个数有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】根据轴对称图形的概念对各图形分析判断即可得解.

【解答】解：①线段是轴对称图形，

②等边三角形是轴对称图形，

③等腰梯形是轴对称图形，

④平行四边形不是轴对称图形，

综上所述，一定是轴对称图形的是①②③共 3 个.

故选：C.

【点评】本题考查了轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

6. (4 分) 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AO = CO$ ，如果添加下列一个条件后，就能判定这个四边形是菱形的是（ ）

- A. $BO = DO$ B. $AB = BC$ C. $AB = CD$ D. $AB \parallel CD$

【分析】根据平行线的性质得到 $\angle ADB = \angle CBD$ ，根据全等三角形的性质得到 $AD = BC$ ，于是得到四边形 $ABCD$ 是平行四边形，根据菱形的判定定理即可得到即可.

【解答】解： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle CBD,$$

$$\text{在 } \triangle ADO \text{ 与 } \triangle CBO \text{ 中, } \begin{cases} \angle ADB = \angle CBD \\ \angle AOD = \angle COB, \\ OA = CO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CBO \text{ (AAS),}$$

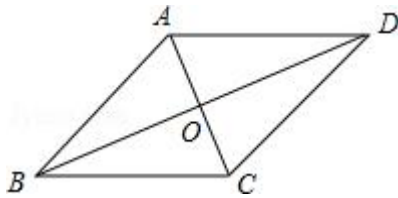
$$\therefore AD = CB,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∵ $AB = BC$

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形; 故 B 正确;

故选: B .



【点评】 本题考查了菱形的判定, 全等三角形的判定与性质, 熟练掌握菱形的判定定理是解题的关键,

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) $\frac{5}{2}$ 的相反数是 $-\frac{5}{2}$.

【分析】 根据只有符号不同的两个数叫做互为相反数可得答案.

【解答】 解: $\frac{5}{2}$ 的相反数是 $-\frac{5}{2}$,

故答案为: $-\frac{5}{2}$.

【点评】 此题主要考查了相反数, 关键是掌握相反数定义.

8. (4 分) 分解因式: $a^2 - 2ab + b^2 - 4 = (a - b + 2)(a - b - 2)$.

【分析】 首先将前三项分组进而利用完全平方公式和平方差公式分解因式得出即可.

【解答】 解: $a^2 - 2ab + b^2 - 4$

$$= (a - b)^2 - 4$$

$$= (a - b + 2)(a - b - 2).$$

故答案为: $(a - b + 2)(a - b - 2)$.

【点评】 此题主要考查了分组分解法因式分解, 正确分组得出是解题关键.

9. (4 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x+6}$, 那么 $f(-2) = 2$.

【分析】 根据已知直接将 $x = -2$ 代入求出答案.

【解答】 解: ∵ $f(x) = \sqrt{x+6}$,

$$\therefore f(-2) = \sqrt{-2+6} = 2.$$

故答案为: 2.

【点评】 此题主要考查了函数值, 正确将已知数据代入是解题关键, 本题属于基础题.

10. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个实数根, 那么 m 的取值范围是 $m \leq 1$.

【分析】若一元二次方程有两个实数根, 则根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 建立关于 m 的不等式, 求出 m 的取值范围.

【解答】解: $\because$ 方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times m = 4 - 4m \geq 0,$$

解得: $m \leq 1$.

故答案为: $m \leq 1$.

【点评】考查了根的判别式, 总结: 一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系:

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根;

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根;

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

11. (4分) 已知一个正多边形的中心角为 30 度, 边长为 x 厘米 ($x > 0$), 周长为 y 厘米, 那么 y 关于 x 的函数解析式为 $y = 12x$.

【分析】由正多边形的中心角的度数, 根据圆心角定理求出正多边形的边数, 即可得出结果.

【解答】解: $\because$ 正多边形的中心角为 30 度,

$$\therefore \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12,$$

$\therefore$ 正多边形为正十二边形,

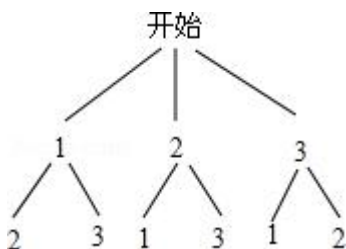
设边长为 x 厘米 ($x > 0$), 周长为 y 厘米, 则 y 关于 x 的函数解析式为: $y = 12x$;

故答案为: $y = 12x$.

【点评】本题考查了正多边形和圆、圆心角定理、函数关系式等知识, 熟练掌握由正多边形的中心角求正多边形的边数是关键.

12. (4分) 从 1、2、3 这三个数中任选两个组成两位数, 在组成的所有两位数中任意抽取一个数, 这个数恰好是偶数的概率是 $\frac{1}{3}$.

【分析】列举出所有情况, 看末位是 2 的情况占所有情况的多少即可.



【解答】解: 2 3 1 3 1 2

共有 6 种情况，是偶数的有 2 种情况，所以组成的两位数是偶数的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$ 。

【点评】此题主要考查了树状图法求概率，如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ ，注意本题是不放回实验。

13. (4 分) 在四边形 $ABCD$ 中，向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 满足 $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{CD}$ ，那么线段 AB 与 CD 的位置关系是 平行。

【分析】根据共线向量的定义即可求出答案。

【解答】解： $\because \overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{CD}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，

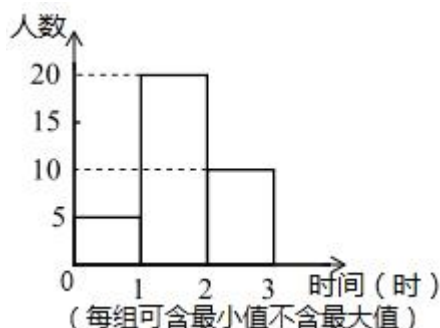
由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 没有公共点，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

故答案为：平行。

【点评】本题考查共线向量，解题的关键是熟练运用共线向量的定义，本题属于基础题型。

14. (4 分) 某校有 560 名学生，为了解这些学生每天做作业所用的时间，调查人员在这所学校的全体学生中随机抽取了部分学生进行问卷调查，并把结果制成如图的统计图，根据这个统计图可以估计这个学校全体学生每天做作业时间不少于 2 小时的人数约为 160 名。



【分析】利用总人数 560 乘以每天做作业时间不少于 2 小时的同学所占的比例即可求解。

【解答】解：根据题意结合统计图知：

估计这个学校全体学生每天做作业时间不少于 2 小时的人数约为 $560 \times \frac{10}{5+20+10} = 160$ 人,

故答案为: 160.

【点评】 本题考查的是用样本估计总体的知识. 读懂统计图, 从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据.

15. (4 分) 已知一个角的度数为 50° , 那么这个角的补角等于 130° .

【分析】 根据如果两个角的和等于 180° , 那么这两个角叫互为补角计算即可.

【解答】 解: $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

故这个角的补角等于 130° .

故答案为: 130° .

【点评】 本题考查的是余角和补角的定义, 如果两个角的和是一个直角, 那么称这两个角互为余角. 如果两个角的和是一个平角, 那么这两个角叫互为补角. 其中一个角叫做另一个角的补角.

16. (4 分) 已知梯形的上底长为 5 厘米, 下底长为 9 厘米, 那么这个梯形的中位线长等于 7 厘米.

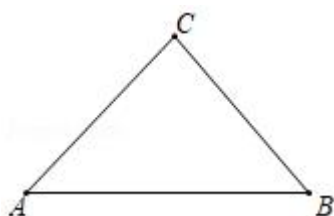
【分析】 根据梯形中位线定理计算, 得到答案.

【解答】 解: 梯形的中位线长 $= \frac{1}{2} \times (5+9) = 7$ (厘米)

故答案为: 7.

【点评】 本题考查的是梯形中位线的计算, 梯形中位线定理: 梯形的中位线平行于两底, 并且等于两底和的一半.

17. (4 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle A = 45^\circ$, 将这个三角形绕点 B 旋转, 使点 A 落在射线 AC 上的点 A_1 处, 点 C 落在点 C_1 处, 那么 $AC_1 = \underline{\sqrt{22}}$.



【分析】 连接 AC_1 , 由旋转的性质先证 $\triangle ABA_1$ 为等腰直角三角形, 再证 $\triangle AA_1C_1$ 为直角三角形, 利用勾股定理可求 AC_1 的长度.

【解答】 解: 如图, 连接 AC_1 ,

由旋转知, $\triangle ABC \cong \triangle A_1BC_1$,

$$\therefore AB = A_1B = 3, AC = A_1C_1 = 2, \angle CAB = \angle C_1A_1B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CA_1B = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABA_1 \text{ 为等腰直角三角形, } \angle AA_1C_1 = \angle CA_1B + \angle C_1A_1B = 90^\circ,$$

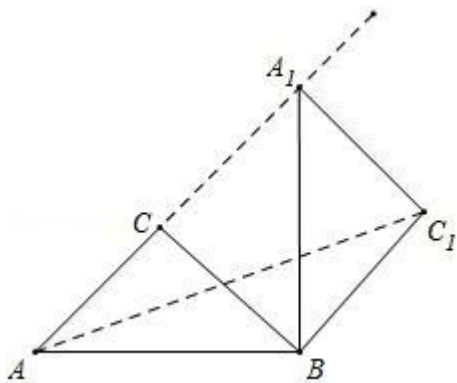
在等腰直角三角形 ABA_1 中,

$$AA_1 = \sqrt{2}AB = 3\sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle AA_1C_1$ 中,

$$AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1C_1^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{22},$$

故答案为: $\sqrt{22}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质, 等腰直角三角形的性质, 勾股定理等, 解题的关键是能够根据题意画出图形.

18. (4分) 定义: 如果 P 是圆 O 所在平面内的一点, Q 是射线 OP 上一点, 且线段 OP 、 OQ 的比例中项等于圆 O 的半径, 那么我们称点 P 与点 Q 为这个圆的一对反演点. 已知点 M 、 N 为圆 O 的一对反演点, 且点 M 、 N 到圆心 O 的距离分别为 4 和 9, 那么圆 O 上任意一点到点 M 、 N 的距离之比 $\frac{AM}{AN} = \frac{2}{3}$.

【分析】 分三种情形分别求解即可解决问题.

【解答】 解: 由题意 $\odot O$ 的半径 $r^2 = 4 \times 9 = 36$,

$$\therefore r > 0,$$

$$\therefore r = 6,$$

当点 A 在 NO 的延长线上时, $AM = 6 + 4 = 10$, $AN = 6 + 9 = 15$,

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

当点 A'' 是 ON 与 $\odot O$ 的交点时, $A''M = 2$, $A''N = 3$,

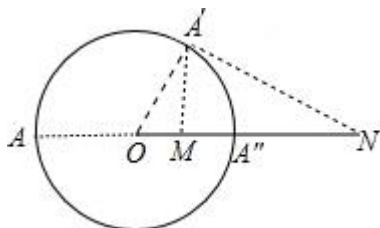
$$\therefore \frac{A''M}{A''N} = \frac{2}{3},$$

当点 A' 是 $\odot O$ 上异与 A, A'' 两点时, 易证 $\triangle OA'M \sim \triangle ONA'$,

$$\therefore \frac{A'M}{A'N} = \frac{OA'}{ON} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

综上所述, $\frac{AM}{AN} = \frac{2}{3}$.

故答案为: $\frac{2}{3}$.



【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质, 解题的关键是理解题意, 学会用分类讨论的思想思考问题, 属于中考常考题型.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(-3)^0 - 9^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} + |2 - \sqrt{3}|$.

【分析】 本题涉及零指数幂、分母有理化、绝对值、二次根式化简 4 个考点. 在计算时, 需要针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】 解: 原式 $= 1 - 3 + \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = -1$.

【点评】 本题主要考查了实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟练掌握零指数幂、分母有理化、绝对值、二次根式化简等考点的运算.

20. (10 分) 解不等式组: $\begin{cases} 2x+5 \geq 3 \\ \frac{5}{6}x-2 < \frac{1}{3}x \end{cases}$, 并写出这个不等式组的自然数解.

【分析】 先分别解答不等式组中的两个不等式的解集, 然后求其交集即为不等式组的解集, 再根据不等式组的解集来取自然数解.

【解答】 解: $\begin{cases} 2x+5 \geq 3 \text{ ①} \\ \frac{5}{6}x-2 < \frac{1}{3}x \text{ ②} \end{cases}$,

由①得: $x \geq -1$,

由②得: $x < 4$.

故不等式组的解集是： $-1 \leq x < 4$.

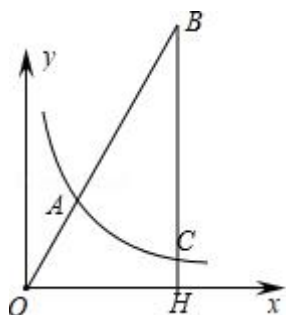
故这个不等式组的自然数解是： $0, 1, 2, 3$.

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组、一元一次不等式组的整数解．求不等式的公共解，要遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了．

21. (10 分) 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 经过第一象限内的点 A ，延长 OA 到点 B ，使得 $BA = 2AO$ ，过点 B 作 $BH \perp x$ 轴，垂足为点 H ，交双曲线于点 C ，点 B 的横坐标为 6.

求：(1) 点 A 的坐标；

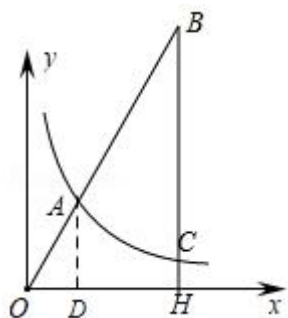
(2) 将直线 AB 平移，使其经过点 C ，求平移后直线的表达式．



【分析】 (1) 作 $AD \perp x$ 轴，垂足为 D ，易得 $AD \parallel BH$ ，根据平行线分线段成比例可得点 A 的横坐标，再根据双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 经过第一象限内的点 A ，可得点 A 的纵坐标；

(2) 根据点 C 的坐标求出直线 AB 的表达式，再运用待定系数法即可求出平移后直线的表达式．

【解答】 解：(1) 作 $AD \perp x$ 轴，垂足为 D ，



$\because BH \perp x$ 轴， $AD \perp x$ 轴， $\therefore \angle BHO = \angle ADO = 90^\circ$ ， $\therefore AD \parallel BH$ ，

$\because BA = 2AO$ ， $\therefore \frac{OD}{DH} = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{2}$ ，

$\because$ 点 B 的横坐标为 6， $\therefore OH = 6$ ， $\therefore OD = 2$ ，

$\because$ 双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 经过第一象限内的点 A ，可得点 A 的纵坐标为 3，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 3)$ ；

(2) $\because$ 双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上点 C 的横坐标为 6， $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(6, 1)$ ，

由题意得，直线 AB 的表达式为 $y = \frac{3}{2}x$ ，

$\therefore$ 设平移后直线的表达式为 $y = \frac{3}{2}x + b$ ，

$\because$ 平移后直线 $y = \frac{3}{2}x + b$ 经过点 $C(6, 1)$ ， $\therefore 1 = \frac{3}{2} \times 6 + b$ ，

解得 $b = -8$ ，

$\therefore$ 平移后直线的表达式 $y = \frac{3}{2}x - 8$ 。

【点评】 此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，反比例函数图象上点的坐标特征，解本题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型。

22. (10 分) 如图 1，一辆吊车工作时的吊臂 AB 最长为 20 米，吊臂与水平线的夹角 $\angle ABC$ 最大为 70° ，旋转中心点 B 离地面的距离 BD 为 2 米。

(1) 如图 2，求这辆吊车工作时点 A 离地面的最大距离 AH (参考数据： $\sin 70^\circ \approx 0.94$ ， $\cos 70^\circ \approx 0.34$ ， $\tan 70^\circ \approx 2.75$)；

(2) 一天，王师傅接到紧急通知，要求将这辆吊车立即开到 40 千米远的某工地，因此王师傅以每小时比平时快 20 千米的速度匀速行驶，结果提前 20 分钟到达，求这次王师傅所开的吊车速度。

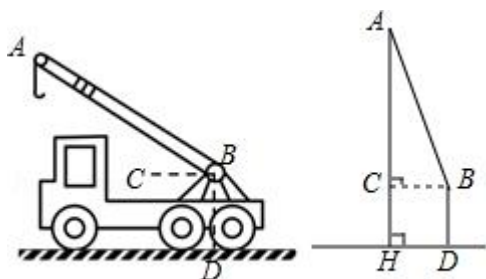


图1

图2

【分析】 (1) 解 $Rt\triangle ABC$ 求出 AC 的长度，便可求得 AH ；

(2) 设这次王师傅所开的吊车的速度为每小时 x 千米，根据快速行驶时间比平时行驶时间少 20 秒，列出分式方程便可。

【解答】 解：(1) 根据题意，得 $AB = 20$ ， $\angle ABC = 70^\circ$ ， $CH = BD = 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AC = AB \cdot \sin 70^\circ = 20 \times 0.94 = 18.8,$$

$$\therefore AH = 20.8.$$

答: 这辆吊车工作时点 A 离地面的最大距离 AH 为 20.8 米;

(2) 设这次王师傅所开的吊车的速度为每小时 x 千米, 由题意, 得

$$\frac{40}{x-20} - \frac{40}{x} = \frac{1}{3},$$

解得, $x_1 = 60$, $x_2 = -40$,

经检验: $x_1 = 60$, $x_2 = -40$ 都是原方程的解, 但 $x_2 = -40$ 符合题意, 舍去,

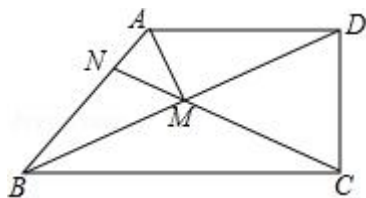
答: 这次王师傅所开的吊车的速度为每小时 60 千米.

【点评】 本题是解直角三角形与分式方程应用的综合题, 主要考查了解直角三角形, 列分式方程解应用题, (1) 题的关键是解直角三角形求出 AC , (2) 小题的关键是找出等量关系列出分式方程.

23. (12 分) 已知: 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $DC \perp BC$, $AB = AD$, $AM \perp BD$, 垂足为点 M , 连接 CM 并延长, 交线段 AB 于点 N .

求证: (1) $\angle ABD = \angle BCM$;

(2) $BC \cdot BN = CN \cdot DM$.



【分析】 (1) 利用等腰三角形的性质得到 $\angle ABD = \angle ADB$, $BM = DM$, 再利用平行线的性质得到 $\angle ABD = \angle MBC$, 利用直角三角形斜边上的中线性质的性质得到 $CM = BM = DM$, 则 $\angle MBC = \angle BCM$, 从而得到 $\angle ABD = \angle BCM$;

(2) 先证明 $\triangle NBM \sim \triangle NCB$, 则 $BN: CN = BM: BC$, 然后利用 $BM = DM$ 和比例性质可得到结论.

【解答】 证明: (1) $\because AB = AD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle MBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle MBC,$$

$$\because AB = AD, AM \perp BD,$$

$$\therefore BM = DM,$$

$$\because DC \perp BC,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore CM = BM = DM,$$

$$\therefore \angle MBC = \angle BCM,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BCM;$$

$$(2) \because \angle BNM = \angle CNB, \angle NBM = \angle NCB,$$

$$\therefore \triangle NBM \sim \triangle NCB,$$

$$\therefore BN: CN = BM: BC,$$

$$\text{而 } BM = DM,$$

$$\therefore BN: CN = DM: BC,$$

$$\therefore BC \cdot BN = CN \cdot DM.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形．灵活运用相似三角形的性质进行几何计算．

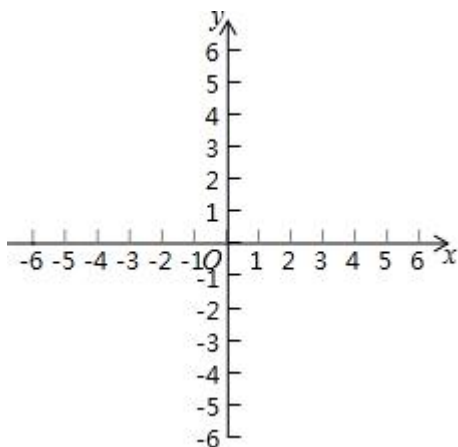
24. (12分) 已知抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 $M(3, -4)$ ，与 x 轴相交于点 $A(-3, 0)$

和点 B ，与 y 轴相交于点 C ．

(1) 求这条抛物线的表达式；

(2) 如果 P 是这条抛物线对称轴上一点， $PC = BC$ ，求点 P 的坐标；

(3) 在第(2)小题的条件下，当点 P 在 x 轴上方时，求 $\angle PCB$ 的正弦值．



【分析】（1）根据待定系数法即可求得；

（2）根据 A 、 B 的坐标求得对称轴为 $x = 1$ ，设点 P 的坐标为 (l, y) 。由 $PC = BC$ 根据勾股定理列出 $1^2 + (y+5)^2 = 5^2 + 5^2$ ，解得即可；

（3）作 $PH \perp BC$ ，垂足为点 H ，根据勾股定理求得 BC ，然后求得直线 BC 的解析式，进而求得 D 的坐标，然后根据 $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PBD}$ ，列出 $\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \cdot PH = \frac{1}{2} \times 6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 6 \times 4$ ，求得 PH ，解正弦函数即可。

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 $M(3, -4)$ ， $A(-3, 0)$ ，

$$\begin{cases} -4 = 3 + 3b + c \\ 0 = 3 - 3b + c \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ c = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 这条抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 5$ ；

（2） $\because A(-3, 0)$ ， $B(5, 0)$ ，

$\therefore$ 这条抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ 。

设点 P 的坐标为 (l, y) 。

$\because PC = BC$ ，点 B 的坐标为 $(5, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, 5)$ 。

$$\therefore PC^2 = BC^2.$$

$$1^2 + (y+5)^2 = 5^2 + 5^2.$$

解得 $y = 2$ 或 $y = -12$ 。

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, 2)$ 或 $(1, -12)$ ；

（3）作 $PH \perp BC$ ，垂足为点 H 。

$\because$ 点 $B(5, 0)$ ，点 $C(0, 5)$ ，点 $P(1, 2)$ ，

$$\therefore PC = BC = 5\sqrt{2}.$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx - 5$,

代入 $B(5, 0)$ 解得 $k = 1$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = x - 5$,

把 $x = 1$ 代入得, $y = -4$,

$\therefore$ 直线 BC 与对称轴相交于点 $D(1, -4)$,

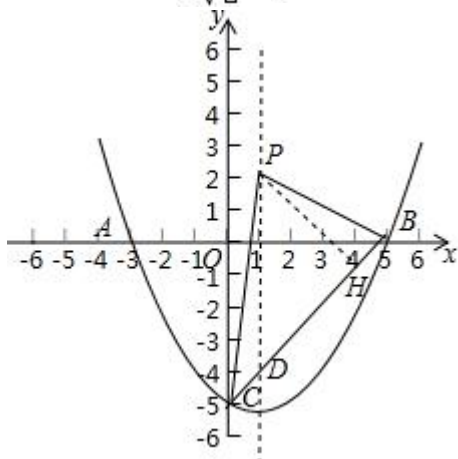
$$\therefore PD = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PBD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \cdot PH = \frac{1}{2} \times 6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 6 \times 4.$$

解得 $PH = 3\sqrt{2}$.

$$\therefore \sin \angle PCB = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5}.$$



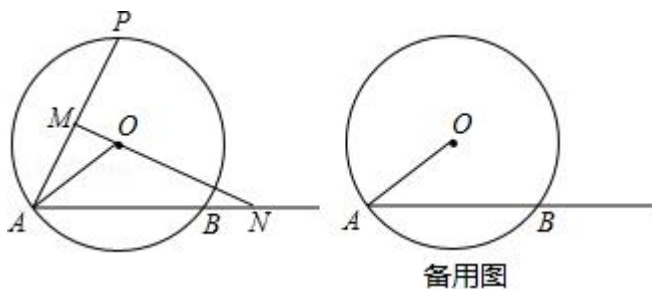
【点评】 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 解答本题主要应用了待定系数法求一次函数、二次函数的解析式、锐角三角函数的定义, 三角形面积等, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题, 灵活运用三角形面积公式, 属于中考常考题型.

25. (14分) 已知 AB 是圆 O 的一条弦, P 是圆 O 上一点, 过点 O 作 $MN \perp AP$, 垂足为点 M , 并交射线 AB 于点 N , 圆 O 的半径为 5, $AB = 8$.

(1) 当 P 是优弧 $\widehat{AB}$ 的中点时 (如图), 求弦 AP 的长;

(2) 当点 N 与点 B 重合时, 试判断: 以圆 O 为圆心, $\frac{3}{2}$ 为半径的圆与直线 AP 的位置关系, 并说明理由;

(3) 当 $\angle BNO = \angle BON$, 且圆 N 与圆 O 相切时, 求圆 N 半径的长.



【分析】(1) 连接 PO 并延长交弦 AB 于点 H ，由垂径定理得出 $PH \perp AB$ ， $AH = BH$ ，由勾股定理得出 $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = 3$ ，在 $\triangle APH$ 中， $\angle AHP = 90^\circ$ ， $PH = OP + OH = 8$ ，由勾股定理求出 AP 即可；

(2) 作 $OG \perp AB$ 于 G ，先证明 $\triangle OBG \sim \triangle ABM$ ，得出 $\frac{BM}{AB} = \frac{BG}{OB}$ ，求出 $BM = \frac{32}{5}$ ，得出 $OM = \frac{7}{5}$ ，由 $\frac{7}{5} < \frac{3}{2}$ ，即可的距离；

(3) 分情况讨论：①当圆 N 与圆 O 相外切时，作 $OD \perp AB$ 于 D ，由勾股定理求出 $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = 3$ ，证出 $BN = OB = 5$ ，得出 DN 的长，再由勾股定理求出 ON ，然后由相切两圆的性质即可得出圆 N 的半径；

当圆 N 与圆 O 相内切时，由相切两圆的性质即可得出结果．

②当点 N 在线段 AB 上时，此时点 P 在弦 AB 的下方，点 N 在圆 O 内部，只存在圆 N 与圆 O 相内切，作 $OE \perp AB$ 于 E ，则 $AE = BE = 4$ ，证出 $BN = OB = 5$ ， $EN = BN - BE = 1$ ，由勾股定理求出 $OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = 3$ ，在 $\text{Rt} \triangle OEN$ 中，再由勾股定理得： $ON = \sqrt{OE^2 + EN^2} = \sqrt{10}$ ，即可得出结果．

【解答】解：(1) 连接 PO 并延长交弦 AB 于点 H ，如图 1 所示：

$\because P$ 是优弧 $\widehat{AB}$ 的中点， PH 经过圆心 O ，

$\therefore PH \perp AB$ ， $AH = BH$ ，

在 $\triangle AOH$ 中， $\angle AHO = 90^\circ$ ， $AH = \frac{1}{2}AB = 4$ ， $AO = 5$ ，

$\therefore OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

在 $\triangle APH$ 中， $\angle AHP = 90^\circ$ ， $PH = OP + OH = 5 + 3 = 8$ ，

$\therefore AP = \sqrt{PH^2 + AH^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ ；

(2) 当点 N 与点 B 重合时，以点 O 为圆心， $\frac{3}{2}$ 为半径的圆与直线 AP 相交；理由如下：

作 $OG \perp AB$ 于 G ，如图 2 所示：

$$\because \angle OBG = \angle ABM, \angle OGB = \angle AMB,$$

$$\therefore \triangle OBG \sim \triangle ABM,$$

$$\therefore \frac{BG}{AB} = \frac{OB}{BM}, \text{ 即 } \frac{BM}{8} = \frac{4}{5},$$

$$\text{解得: } BM = \frac{32}{5},$$

$$\therefore OM = \frac{32}{5} - 5 = \frac{7}{5},$$

$$\therefore \frac{7}{5} < \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 当点 N 与点 B 重合时，以点 O 为圆心， $\frac{3}{2}$ 为半径的圆与直线 AP 相交；

(3) ①当点 N 在线段 AB 延长线上时，

当圆 N 与圆 O 相外切时，作 $OD \perp AB$ 于 D ，如图 3 所示：

$$\because OA = OB = 5,$$

$$\therefore AD = DB = \frac{1}{2}AB = 4,$$

$$\therefore OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because \angle BNO = \angle BON,$$

$$\therefore BN = OB = 5,$$

$$\therefore DN = DB + BN = 9,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ODN \text{ 中, 由勾股定理得: } ON = \sqrt{OD^2 + DN^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10},$$

$\therefore$ 圆 N 与圆 O 相切，

$$\therefore \text{圆 } N \text{ 半径} = ON - 5 = 3\sqrt{10} - 5;$$

$$\text{当圆 } N \text{ 与圆 } O \text{ 相内切时, 圆 } N \text{ 半径} = ON + 5 = 3\sqrt{10} + 5;$$

②当点 N 在线段 AB 上时，此时点 P 在弦 AB 的下方，点 N 在圆 O 内部，只存在圆 N 与圆 O 相内切，如图 4 所示：

$$\text{作 } OE \perp AB \text{ 于 } E, \text{ 则 } AE = BE = 4, OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = 3,$$

$$\because \angle BNO = \angle BON,$$

$$\therefore BN = OB = 5,$$

$$\therefore EN = BN - BE = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle OEN$ 中, 由勾股定理得: $ON = \sqrt{OE^2 + EN^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

$\therefore$ 圆 N 半径 $= 5 - ON = 5 - \sqrt{10}$;

综上所述, 当 $\angle BNO = \angle BON$, 且圆 N 与圆 O 相切时, 圆 N 半径的长为 $3\sqrt{10} - 5$ 或 $3\sqrt{10} + 5$ 或 $5 - \sqrt{10}$.

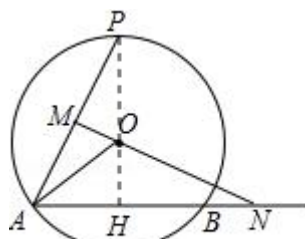


图 1

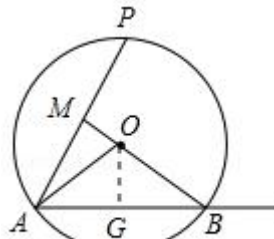


图 2

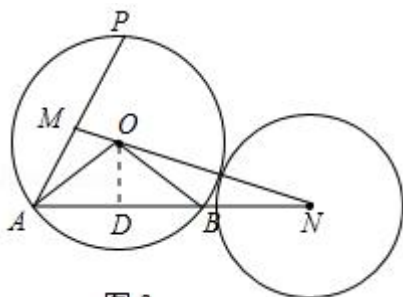


图 3

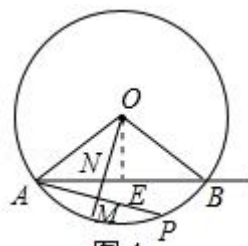


图 4

【点评】 本题是圆的综合题目, 考查了垂径定理、直线与圆的位置关系、相切两圆的性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定、勾股定理等知识; 本题综合性强, 熟练掌握直线与圆的位置关系、相切两圆的性质是解题的关键.