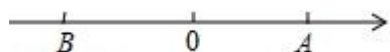


2019 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1. (4 分) 如图，已知数轴上的点 A 、 B 表示的实数分别为 a 、 b ，那么下列等式成立的是（ ）



- A. $|a+b| = a - b$ B. $|a+b| = -a - b$ C. $|a+b| = b - a$ D. $|a+b| = a+b$

2. (4 分) 下列关于 x 的方程一定有实数解的是（ ）

- A. $x^2 - mx - 1 = 0$ B. $ax = 3$ C. $\sqrt{x-6} \cdot \sqrt{4-x} = 0$ D. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

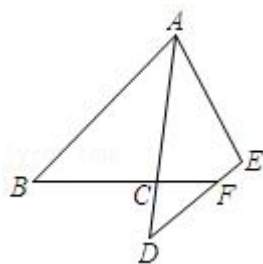
3. (4 分) 如果 $k < 0$ ， $b > 0$ ，那么一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过（ ）

- A. 第一、二、三象限 B. 第二、三、四象限
C. 第一、三、四象限 D. 第一、二、四象限

4. (4 分) 为了解某校初三学生的体重情况，从中随机抽取了 80 名初三学生的体重进行统计分析。在此问题中，样本是指（ ）

- A. 80
B. 被抽取的 80 名初三学生
C. 被抽取的 80 名初三学生的体重
D. 该校初三学生的体重

5. (4 分) 如图，已知 $\triangle ADE$ 是 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转所得，其中点 D 在射线 AC 上，设旋转角为 α ，直线 BC 与直线 DE 交于点 F ，那么下列结论不正确的是（ ）



- A. $\angle BAC = \alpha$ B. $\angle DAE = \alpha$ C. $\angle CFD = \alpha$ D. $\angle FDC = \alpha$

6. (4 分) 在下列条件中，能够判定一个四边形是平行四边形的是（ ）

- A. 一组对边平行，另一组对边相等
B. 一组对边相等，一组对角相等
C. 一组对边平行，一条对角线平分另一条对角线

D. 一组对边相等，一条对角线平分另一条对角线

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $(y^3)^2 \div y^5 =$ _____.

8.（4 分）分解因式： $a^2 - 2ab + b^2 - 1 =$ _____.

9.（4 分）方程 $x - 1 = \sqrt{1-x}$ 的解为：_____.

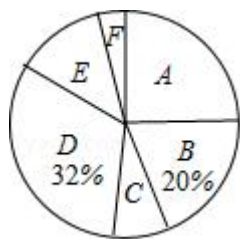
10.（4 分）如果正比例函数 $y = (k - 2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，且它的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象没有公共点，那么 k 的取值范围是_____.

11.（4 分）从 -5 ， $-\frac{10}{3}$ ， $-\sqrt{6}$ ， -1 ， 0 ， 2 ， π 这七个数中随机抽取一个数，恰好为负整数的概率为_____.

12.（4 分）某校为了解学生最喜欢的球类运动情况，随机选取该校部分学生进行调查，要求每名同学只写一类最喜欢的球类运动. 以下是根据调查结果绘制的统计图表的一部分.

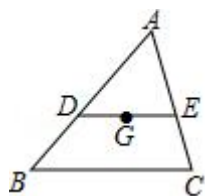
类别	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
类型	足球	羽毛球	乒乓球	篮球	排球	其他
人数		10	4		6	2

那么，其中最喜欢足球的学生数占被调查总人数的百分比为_____%.



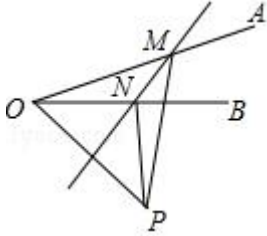
13.（4 分）甲、乙两名学生练习打字，甲打 135 个字所用时间与乙打 180 个字所用时间相同，已知甲平均每分钟比乙少打 20 个字，如果设甲平均每分钟打字的个数为 x ，那么符合题意的方程为：_____.

14.（4 分）如图， $\triangle ABC$ 中，过重心 G 的直线平行于 BC ，且交边 AB 于点 D ，交边 AC 于点 E ，如果设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{GE}$ ，那么 $\overrightarrow{GE} =$ _____.



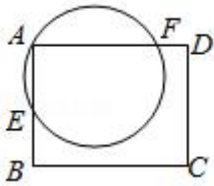
15.（4 分）正八边形的中心角为_____度.

16. (4分) 如图, 点 M 、 N 分别在 $\angle AOB$ 的边 OA 、 OB 上, 将 $\angle AOB$ 沿直线 MN 翻折, 设点 O 落在点 P 处, 如果当 $OM=4$, $ON=3$ 时, 点 O 、 P 的距离为 4, 那么折痕 MN 的长为_____.



17. (4分) 如果当 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 且 $a \neq b$ 时, 将直线 $y = ax + b$ 和直线 $y = bx + a$ 称为一对“对偶直线”, 把它们的公共点称为该对“对偶直线”的“对偶点”, 那么请写出“对偶点”为 $(1, 4)$ 的一对“对偶直线”: _____.

18. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 过点 A 的圆 O 交边 AB 于点 E , 交边 AD 于点 F , 已知 $AD=5$, $AE=2$, $AF=4$. 如果以点 D 为圆心, r 为半径的圆 D 与圆 O 有两个公共点, 那么 r 的取值范围是_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

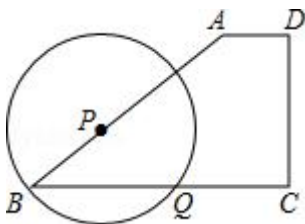
19. (10分) 计算: $\sqrt{(-3)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - (3\sqrt{2})^0 - 4\cos 30^\circ + \frac{6}{\sqrt{3}}$.

20. (10分) 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=1, \\ a^2x-b^2y=ab+3 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$, 求 a, b 的值.

21. (10分) 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB=BC$, $DC \perp BC$, 且 $AD=1$, $DC=3$, 点 P 为边 AB 上一动点, 以 P 为圆心, BP 为半径的圆交边 BC 于点 Q .

(1) 求 AB 的长;

(2) 当 BQ 的长为 $\frac{40}{9}$ 时, 请通过计算说明圆 P 与直线 DC 的位置关系.

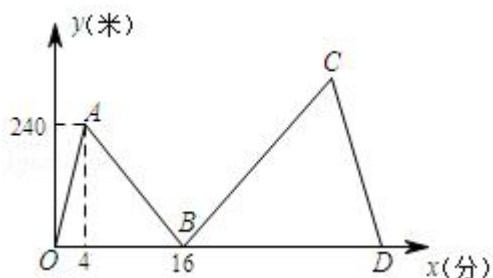


22. (10分) 甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行 2400 米，先到终点的人原地休息. 已知甲先出发 4 分钟，在整个步行过程中，甲、乙两人间的距离 y (米) 与甲出发的时间 x (分) 之间的关系如图中折线 $OA-AB-BC-CD$ 所示.

(1) 求线段 AB 的表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 求乙的步行速度；

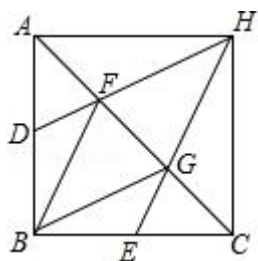
(3) 求乙比甲早几分钟到达终点？



23. (12分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，点 F 、 G 是边 AC 的三等分点， DF 、 EG 的延长线相交于点 H ，连接 HA 、 HC 。

求证：(1) 四边形 $FBGH$ 是菱形；

(2) 四边形 $ABCH$ 是正方形。

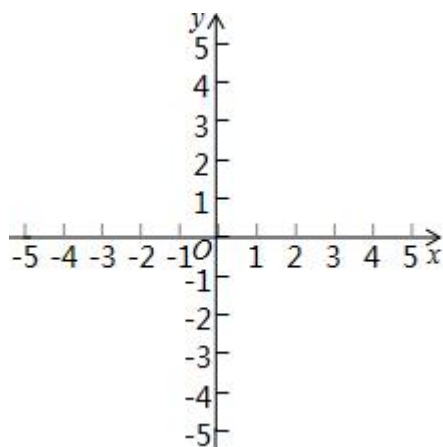


24. (12分) 已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 2$ 与 y 轴的交点为 A ，顶点为 B ，对称轴与 x 轴的交点为 C ，点 A 与点 D 关于对称轴对称，直线 BD 与 x 轴交于点 M ，直线 AB 与直线 OD 交于点 N 。

(1) 求点 D 的坐标；

(2) 求点 M 的坐标 (用含 a 的代数式表示)；

(3) 当点 N 在第一象限，且 $\angle OMB = \angle ONA$ 时，求 a 的值。



25. (14分) 已知圆 O 的半径长为 2，点 A 、 B 、 C 为圆 O 上三点，弦 $BC = AO$ ，点 D 为 BC 的中点，

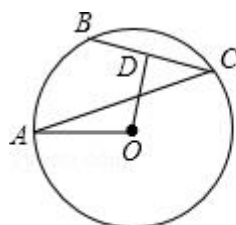


图1

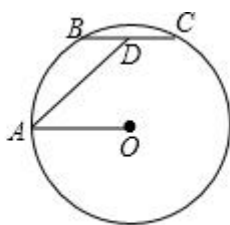
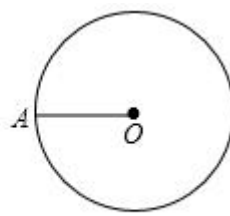


图2



(备用图)

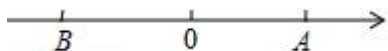
- (1) 如图 1，连接 AC 、 OD ，设 $\angle OAC = \alpha$ ，请用 α 表示 $\angle AOD$ ；
- (2) 如图 2，当点 B 为 $\widehat{AC}$ 的中点时，求点 A 、 D 之间的距离；
- (3) 如果 AD 的延长线与圆 O 交于点 E ，以 O 为圆心， AD 为半径的圆与以 BC 为直径的圆相切，求弦 AE 的长。

2019 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1. (4 分) 如图，已知数轴上的点 A 、 B 表示的实数分别为 a 、 b ，那么下列等式成立的是()



- A. $|a+b| = a - b$ B. $|a+b| = -a - b$ C. $|a+b| = b - a$ D. $|a+b| = a+b$

【分析】根据图示，可得： $b < 0 < a$ ， $|b| > |a|$ ，据此判断即可．

【解答】解： $\because b < 0 < a$ ， $|b| > |a|$ ，

$$\therefore a+b < 0,$$

$$\therefore |a+b| = -a - b.$$

故选：B．

【点评】此题主要考查了实数与数轴的特征和应用，以及绝对值的含义和求法，要熟练掌握．

2. (4 分) 下列关于 x 的方程一定有实数解的是()

- A. $x^2 - mx - 1 = 0$ B. $ax = 3$ C. $\sqrt{x-6} \cdot \sqrt{4-x} = 0$ D. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

【分析】根据一元二次方程根的判别式、二次根式有意义的条件、分式方程的增根逐一判断即可得．

【解答】解：A. $x^2 - mx - 1 = 0$ 中 $\Delta = m^2 + 4 > 0$ ，一定有两个不相等的实数根，符合题意；

B. $ax = 3$ 中当 $a = 0$ 时，方程无解，不符合题意；

C. 由 $\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$ 知此方程组无解，不符合题意；

D. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ 有增根 $x = 1$ ，此方程无解，不符合题意；

故选：A．

【点评】本题主要考查无理方程，解题的关键是掌握一元二次方程根的判别式、二次根式有意义的条件、分式方程的增根．

3. (4 分) 如果 $k < 0$ ， $b > 0$ ，那么一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过()

- A. 第一、二、三象限 B. 第二、三、四象限

C. 第一、三、四象限

D. 第一、二、四象限

【分析】根据 k 、 b 的符号来求确定一次函数 $y = kx + b$ 的图象所经过的象限.

【解答】解: $\because k < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、四象限.

又 $\because b > 0$ 时,

$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 y 轴交与正半轴.

综上所述, 该一次函数图象经过第一、二、四象限.

故选: D.

【点评】本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解: 直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限. $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限. $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交. $b = 0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

4. (4 分) 为了解某校初三学生的体重情况, 从中随机抽取了 80 名初三学生的体重进行统计分析. 在此问题中, 样本是指 ()

A. 80

B. 被抽取的 80 名初三学生

C. 被抽取的 80 名初三学生的体重

D. 该校初三学生的体重

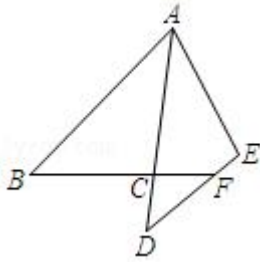
【分析】总体是指考查的对象的全体, 个体是总体中的每一个考查的对象, 样本是总体中所抽取的一部分个体, 而样本容量则是指样本中个体的数目. 我们在区分总体、个体、样本、样本容量, 这四个概念时, 首先找出考查的对象. 从而找出总体、个体. 再根据被收集数据的这一部分对象找出样本, 最后再根据样本确定出样本容量.

【解答】解: 样本是被抽取的 80 名初三学生的体重,

故选: C.

【点评】此题考查了总体、个体、样本、样本容量, 解题要分清具体问题中的总体、个体与样本, 关键是明确考查的对象. 总体、个体与样本的考查对象是相同的, 所不同的是范围的大小. 样本容量是样本中包含的个体的数目, 不能带单位.

5. (4 分) 如图, 已知 $\triangle ADE$ 是 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转所得, 其中点 D 在射线 AC 上, 设旋转角为 α , 直线 BC 与直线 DE 交于点 F , 那么下列结论不正确的是 ()



- A. $\angle BAC = \alpha$ B. $\angle DAE = \alpha$ C. $\angle CFD = \alpha$ D. $\angle FDC = \alpha$

【分析】利用旋转不变性即可解决问题.

【解答】解: $\because \triangle DAE$ 是由 $\triangle BAC$ 旋转得到,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE = \alpha, \angle B = \angle D,$$

$$\because \angle ACB = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle BAC = \alpha,$$

故 A, B, C 正确,

故选: D.

【点评】本题考查旋转的性质, 解题的关键是熟练掌握旋转不变性解决问题, 属于中考常考题型.

6. (4 分) 在下列条件中, 能够判定一个四边形是平行四边形的是 ()

- A. 一组对边平行, 另一组对边相等
B. 一组对边相等, 一组对角相等
C. 一组对边平行, 一条对角线平分另一条对角线
D. 一组对边相等, 一条对角线平分另一条对角线

【分析】根据平行四边形的判定方法以及全等三角形的判定方法一一判断即可.

【解答】解: A、错误. 这个四边形有可能是等腰梯形.

B、错误. 不满足三角形全等的条件, 无法证明相等的一组对边平行.

C、正确. 可以利用三角形全等证明平行的一组对边相等. 故是平行四边形.

D、错误. 不满足三角形全等的条件, 无法证明相等的一组对边平行.

故选: C.

【点评】本题考查平行四边形的判定、全等三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是记住全等三角形的判定方法以及平行四边形的判定方法, 属于中考常考题型.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $(y^3)^2 \div y^5 = \underline{y}$.

【分析】根据幂的乘方，底数不变指数相乘；同底数幂相除，底数不变指数相减的运算性质计算即可.

【解答】解： $(y^3)^2 \div y^5$ ，
 $= y^6 \div y^5$ ，
 $= y$.

【点评】本题主要考查幂的乘方，同底数幂的除法的性质，熟练掌握运算性质是解题的关键.

8. (4分) 分解因式： $a^2 - 2ab + b^2 - 1 = \underline{(a - b + 1)(a - b - 1)}$.

【分析】当被分解的式子是四项时，应考虑运用分组分解法进行分解，前三项 $a^2 - 2ab + b^2$ 可组成完全平方公式，可把前三项分为一组.

【解答】解： $a^2 - 2ab + b^2 - 1$ ，
 $= (a - b)^2 - 1$ ，
 $= (a - b + 1)(a - b - 1)$.

【点评】本题考查用分组分解法进行因式分解. 难点是采用两两分组还是三一分组. 本题前三项可组成完全平方公式，可把前三项分为一组.

9. (4分) 方程 $x - 1 = \sqrt{1 - x}$ 的解为： $\underline{1}$.

【分析】两边平方解答即可.

【解答】解：原方程可化为： $(x - 1)^2 = 1 - x$ ，

解得： $x_1 = 0$ ， $x_2 = 1$ ，

经检验， $x = 1$ 是原方程的解，

故答案为：1.

【点评】此题考查无理方程的解法，关键是把两边平方解答.

10. (4分) 如果正比例函数 $y = (k - 2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，且它的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象没有公共点，那么 k 的取值范围是 $\underline{0 < k < 2}$.

【分析】先根据正比例函数 $y = (k - 2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，可知 $k - 2 < 0$ ；再根据它的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象没有公共点，说明反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过一、三象限， $k > 0$ ，从而可以求出 k 的取值范围.

【解答】解： $\because y = (k - 2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，

$\therefore k - 2 < 0$

$$\therefore k < 2$$

而 $y = (k - 2)x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象没有公共点,

$$\therefore k > 0$$

综合以上可知: $0 < k < 2$.

故答案为 $0 < k < 2$.

【点评】 本题考查的是一次函数与反比例函数的相关性质, 清楚掌握函数中的 k 的意义是解决本题的关键.

11. (4分) 从 -5 , $-\frac{10}{3}$, $-\sqrt{6}$, -1 , 0 , 2 , π 这七个数中随机抽取一个数, 恰好为负整数的概率为 $\frac{2}{7}$.

【分析】 从 7 个数中, 找出负整数的个数, 再根据概率公式即可得出答案.

【解答】 解: 在 -5 , $-\frac{10}{3}$, $-\sqrt{6}$, -1 , 0 , 2 , π 这七个数中, 为负整数的有 -5 , -1 ,

共 2 个数,

则恰好为负整数的概率为 $\frac{2}{7}$;

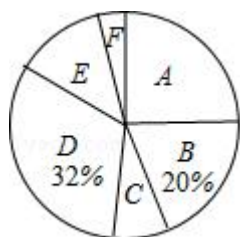
故答案为 $\frac{2}{7}$.

【点评】 本题考查随机事件的概率的计算方法, 能准确找出负整数的个数, 并熟悉等可能事件的概率计算公式是关键.

12. (4分) 某校为了解学生最喜欢的球类运动情况, 随机选取该校部分学生进行调查, 要求每名同学只写一类最喜欢的球类运动. 以下是根据调查结果绘制的统计图表的一部分.

类别	A	B	C	D	E	F
类型	足球	羽毛球	乒乓球	篮球	排球	其他
人数		10	4		6	2

那么, 其中最喜欢足球的学生数占被调查总人数的百分比为 24 %.



【分析】 依据最喜欢羽毛球的学生数以及占被调查总人数的百分比, 即可得到被调查总

人数,进而得出最喜欢篮球的学生数以及最喜欢足球的学生数占被调查总人数的百分比.

【解答】解: $\because$ 被调查学生的总数为 $10 \div 20\% = 50$ 人,

$\therefore$ 最喜欢篮球的有 $50 \times 32\% = 16$ 人,

则最喜欢足球的学生数占被调查总人数的百分比 $= \frac{50-10-4-16-6-2}{50} \times 100\% = 24\%$,

故答案为: 24.

【点评】 本题主要考查扇形统计图, 扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分数. 通过扇形统计图可以很清楚地表示出各部分数量同总数之间的关系.

13. (4分) 甲、乙两名学生练习打字, 甲打 135 个字所用时间与乙打 180 个字所用时间相同, 已知甲平均每分钟比乙少打 20 个字, 如果设甲平均每分钟打字的个数为 x , 那么符合题意的方程为: $\frac{135}{x} = \frac{180}{x+20}$.

【分析】 设甲平均每分钟打 x 个字, 则乙平均每分钟打 $(x+20)$ 个字, 根据工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率结合甲打 135 个字所用时间与乙打 180 个字所用时间相同, 即可得出关于 x 的分式方程.

【解答】 解: $\because$ 甲平均每分钟打 x 个字,

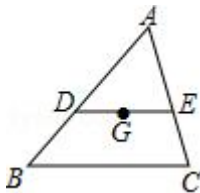
$\therefore$ 乙平均每分钟打 $(x+20)$ 个字,

根据题意得: $\frac{135}{x} = \frac{180}{x+20}$,

故答案为: $\frac{135}{x} = \frac{180}{x+20}$.

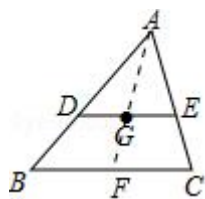
【点评】 本题考查了分式方程的应用, 找准等量关系, 正确列出分式方程是解题的关键.

14. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 过重心 G 的直线平行于 BC , 且交边 AB 于点 D , 交边 AC 于点 E , 如果设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{GE}$, 那么 $\overrightarrow{GE} = -\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$.



【分析】 连接 AG , 延长 AG 交 BC 于 F . 首先证明 $DG = GE$, 再利用三角形法则求出 $\overrightarrow{DE}$ 即可解决问题.

【解答】 解: 连接 AG , 延长 AG 交 BC 于 F .



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, $DE \parallel BC$,

$$\therefore BF = CF,$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DG}{BF} = \frac{AD}{AB}, \frac{GE}{CF} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \frac{DG}{BF} = \frac{GE}{CF},$$

$$\because BF = CF,$$

$$\therefore DG = GE,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{a}, \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

【点评】 本题考查三角形的重心, 平行线的性质, 平面向量等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

15. (4分) 正八边形的中心角为 45 度.

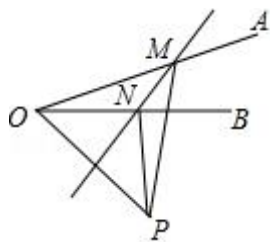
【分析】 根据中心角是正多边形相邻的两个半径的夹角来解答.

【解答】 解: 正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$;

故答案为 45.

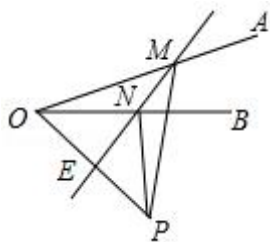
【点评】 本题考查了正多边形和圆的知识, 解题的关键是牢记中心角的定义及求法.

16. (4分) 如图, 点 M 、 N 分别在 $\angle AOB$ 的边 OA 、 OB 上, 将 $\angle AOB$ 沿直线 MN 翻折, 设点 O 落在点 P 处, 如果当 $OM = 4$, $ON = 3$ 时, 点 O 、 P 的距离为 4, 那么折痕 MN 的长为 $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$.



【分析】由折叠的性质可得 $MN \perp OP$, $EO = EP = 2$, 由勾股定理可求 ME , NE 的长, 即可求 MN 的长.

【解答】解: 设 MN 与 OP 交于点 E ,



$\because$ 点 O 、 P 的距离为 4,

$\therefore OP = 4$

$\because$ 折叠

$\therefore MN \perp OP$, $EO = EP = 2$,

在 $Rt\triangle OME$ 中, $ME = \sqrt{OM^2 - OE^2} = 2\sqrt{3}$

在 $Rt\triangle ONE$ 中, $NE = \sqrt{ON^2 - OE^2} = \sqrt{5}$

$\therefore MN = ME - NE = 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$

故答案为: $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$

【点评】本题考查了翻折变换, 勾股定理, 利用勾股定理求线段的长度是本题的关键.

17. (4 分) 如果当 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 且 $a \neq b$ 时, 将直线 $y = ax + b$ 和直线 $y = bx + a$ 称为一对“对偶直线”, 把它们的公共点称为该对“对偶直线”的“对偶点”, 那么请写出“对偶点”为 $(1, 4)$ 的一对“对偶直线”: 直线 $y = x + 3$ 和直线 $y = 3x + 1$.

【分析】设一对“对偶直线”为 $y = ax + b$ 和 $y = bx + a$, 再把 $(1, 4)$ 代入得 $a + b = 4$, 然后取一对 a 、 b 的值即可得到满足条件的一对“对偶直线”.

【解答】解: 设一对“对偶直线”为 $y = ax + b$ 和 $y = bx + a$,

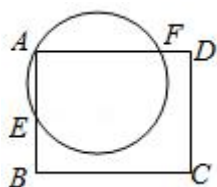
把 $(1, 4)$ 代入得 $a + b = 4$,

设 $a = 1$, $b = 3$, 则满足条件的一对“对偶直线”为直线 $y = x + 3$ 和直线 $y = 3x + 1$.

故答案为直线 $y = x + 3$ 和直线 $y = 3x + 1$.

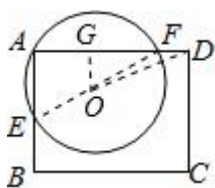
【点评】 本题考查了两条直线的交点或平行问题：两条直线的交点坐标，就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解．

18. (4分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，过点 A 的圆 O 交边 AB 于点 E ，交边 AD 于点 F ，已知 $AD=5$ ， $AE=2$ ， $AF=4$ ．如果以点 D 为圆心， r 为半径的圆 D 与圆 O 有两个公共点，那么 r 的取值范围是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}<r<\sqrt{10}+\sqrt{5}$ ．



【分析】 连接 EF ，知 EF 是 $\odot O$ 的直径，取 EF 的中点 O ，连接 OD ，作 $OG \perp AF$ ，知点 G 是 AF 的中点，据此可得 $GF = \frac{1}{2}AF = 2$ ， $OG = \frac{1}{2}AE = 1$ ，继而求得 $OF = \sqrt{OG^2 + GF^2} = \sqrt{5}$ ， $OD = \sqrt{OG^2 + DG^2} = \sqrt{10}$ ，最后根据两圆的位置关系可得答案．

【解答】 解：如图，连接 EF ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ，

则 EF 是 $\odot O$ 的直径，

取 EF 的中点 O ，连接 OD ，作 $OG \perp AF$ ，

则点 G 是 AF 的中点，

$\therefore GF = \frac{1}{2}AF = 2$ ，

$\therefore OG$ 是 $\triangle AEF$ 的中位数，

$\therefore OG = \frac{1}{2}AE = 1$ ，

$\therefore OF = \sqrt{OG^2 + GF^2} = \sqrt{5}$ ， $OD = \sqrt{OG^2 + DG^2} = \sqrt{10}$ ，

$\because$ 圆 D 与圆 O 有两个公共点，

$\therefore \sqrt{10} - \sqrt{5} < r < \sqrt{10} + \sqrt{5}$ ，

故答案为： $\sqrt{10} - \sqrt{5} < r < \sqrt{10} + \sqrt{5}$ ．

【点评】 本题主要考查圆与圆的位置关系，解题的关键是掌握圆周角定理、圆心角定理、三角形中位线定理、勾股定理、矩形的性质及圆与圆的位置关系等知识点.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $\sqrt{(-3)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - (3\sqrt{2})^0 - 4\cos 30^\circ + \frac{6}{\sqrt{3}}.$

【分析】 根据零指数幂、负整数指数幂、特殊角的三角函数值进行计算.

【解答】 解: 原式 $= 3 + 8 - 1 - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}$

$$= 10 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$= 10.$$

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算: 先把二次根式化为最简二次根式, 然后进行二次根式的乘除运算, 再合并即可. 在二次根式的混合运算中, 如能结合题目特点, 灵活运用二次根式的性质, 选择恰当的解题途径, 往往能事半功倍.

20. (10 分) 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=1, \\ a^2x-b^2y=ab+3 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$, 求 a, b

的值.

【分析】 把 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 代入二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=1, \\ a^2x-b^2y=ab+3 \end{cases}$ 得到关于 a, b 的方程组, 经

过整理, 得到关于 b 的一元二次方程, 解之即可得到 b 的值, 把 b 的值代入一个关于 a, b 的二元一次方程, 求出 a 的值, 即可得到答案.

【解答】 解: 把 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 代入二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=1, \\ a^2x-b^2y=ab+3 \end{cases}$ 得:

$$\begin{cases} a-b=1 & \text{①} \\ a^2+b^2=ab+3 & \text{②} \end{cases},$$

由①得: $a = 1+b$,

把 $a = 1+b$ 代入②, 整理得:

$$b^2+b-2=0,$$

解得: $b = -2$ 或 $b = 1$,

把 $b = -2$ 代入①得: $a+2=1$,

解得: $a = -1$,

把 $b = 1$ 代入①得:

$$a - 1 = 1,$$

解得： $a = 2$,

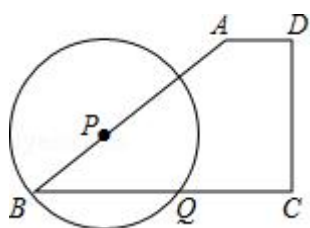
$$\text{即} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

【点评】 本题考查了二元一次方程组的解，正确掌握代入法是解题的关键.

21. (10 分) 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $DC \perp BC$, 且 $AD = 1$, $DC = 3$, 点 P 为边 AB 上一动点, 以 P 为圆心, BP 为半径的圆交边 BC 于点 Q .

(1) 求 AB 的长;

(2) 当 BQ 的长为 $\frac{40}{9}$ 时, 请通过计算说明圆 P 与直线 DC 的位置关系.



【分析】 (1) 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 根据矩形的性质得到 $CE = AD = 1$, $AE = CD = 3$, 根据勾股定理即可得到结论;

(2) 过 P 作 $PF \perp BQ$ 于 F , 根据相似三角形的性质得到 $PB = \frac{25}{9}$, 得到 $PA = AB - PB = \frac{20}{9}$, 过 P 作 $PG \perp CD$ 于 G 交 AE 于 M , 根据相似三角形的性质得到 $PM = \frac{16}{9}$, 根据切线的判定定理即可得到结论.

【解答】 解: (1) 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ,
则四边形 $AECD$ 是矩形,

$$\therefore CE = AD = 1, AE = CD = 3,$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore BE = AB - 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\because AB^2 = AE^2 + BE^2$,

$$\therefore AB^2 = 3^2 + (AB - 1)^2,$$

解得: $AB = 5$;

(2) 过 P 作 $PF \perp BQ$ 于 F ,

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BQ = \frac{20}{9},$$

$$\therefore \triangle PBF \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{BF}{BE},$$

$$\therefore \frac{PB}{5} = \frac{\frac{20}{9}}{4},$$

$$\therefore PB = \frac{25}{9},$$

$$\therefore PA = AB - PB = \frac{20}{9},$$

过 P 作 $PG \perp CD$ 于 G 交 AE 于 M ,

$$\therefore GM = AD = 1, PG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle APM \sim \triangle ABE,$$

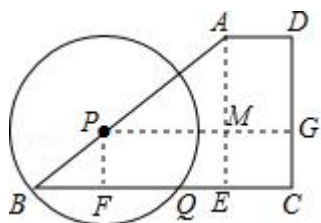
$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PM}{BE},$$

$$\therefore \frac{\frac{20}{9}}{5} = \frac{PM}{4},$$

$$\therefore PM = \frac{16}{9},$$

$$\therefore PG = PM + MG = \frac{25}{9} = PB,$$

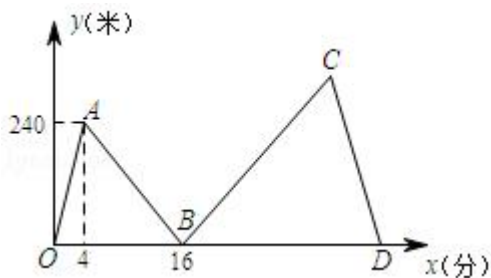
$\therefore$ 圆 P 与直线 DC 相切.



【点评】 本题考查了直线与圆的位置关系，矩形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

22. (10 分) 甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行 2400 米，先到终点的人原地休息. 已知甲先出发 4 分钟，在整个步行过程中，甲、乙两人间的距离 y (米) 与甲出发的时间 x (分) 之间的关系如图中折线 $OA - AB - BC - CD$ 所示.

- (1) 求线段 AB 的表达式，并写出自变量 x 的取值范围；
- (2) 求乙的步行速度；
- (3) 求乙比甲早几分钟到达终点？



【分析】(1) 根据图示, 设线段 AB 的表达式为: $y = kx + b$, 把 $(4, 240)$, $(16, 0)$ 代入得到关于 k, b 的二元一次方程组, 解之, 即可得到答案,

(2) 根据线段 OA , 求出甲的速度, 根据图示可知: 乙在点 B 处追上甲, 根据速度 = 路程 $\div$ 时间, 计算求值即可,

(3) 根据图示, 求出二者相遇时与出发点的距离, 进而求出与终点的距离, 结合(2)的结果, 分别计算出相遇后, 到达终点甲和乙所用的时间, 二者的时间差即可所求答案.

【解答】解: (1) 根据题意得:

设线段 AB 的表达式为: $y = kx + b$ ($4 \leq x \leq 16$),

把 $(4, 240)$, $(16, 0)$ 代入得:

$$\begin{cases} 4k + b = 240 \\ 16k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -20 \\ b = 320 \end{cases},$$

即线段 AB 的表达式为: $y = -20x + 320$ ($4 \leq x \leq 16$),

(2) 又线段 OA 可知: 甲的速度为: $\frac{240}{4} = 60$ (米/分),

乙的步行速度为: $\frac{240 + (16 - 4) \times 60}{16 - 4} = 80$ (米/分),

答: 乙的步行速度为 80 米/分,

(3) 在 B 处甲乙相遇时, 与出发点的距离为: $240 + (16 - 4) \times 60 = 960$ (米),

与终点的距离为: $2400 - 960 = 1440$ (米),

相遇后, 到达终点甲所用的时间为: $\frac{1440}{60} = 24$ (分),

相遇后, 到达终点乙所用的时间为: $\frac{1440}{80} = 18$ (分),

$24 - 18 = 6$ (分),

答: 乙比甲早 6 分钟到达终点.

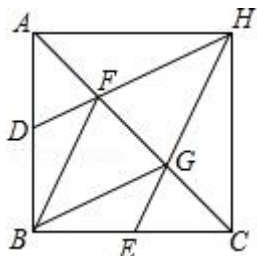
【点评】 本题考查了一次函数的应用, 正确掌握分析函数图象是解题的关键.

23. (12 分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D 、 E 分别是边 AB 、

BC 的中点，点 F 、 G 是边 AC 的三等分点， DF 、 EG 的延长线相交于点 H ，连接 HA 、 HC 。

求证：（1）四边形 $FBGH$ 是菱形；

（2）四边形 $ABCH$ 是正方形。



【分析】（1）由三角形中位线知识可得 $DF \parallel BG$ ， $GH \parallel BF$ ，根据菱形的判定的判定可得四边形 $FBGH$ 是菱形；

（2）连结 BH ，交 AC 于点 O ，利用平行四边形的对角线互相平分可得 $OB = OH$ ， $OF = OG$ ，又 $AF = CG$ ，所以 $OA = OC$ 。再根据对角线互相垂直平分的平行四边形得证四边形 $ABCH$ 是菱形，再根据一组邻边相等的菱形即可求解。

【解答】证明：（1） $\because$ 点 F 、 G 是边 AC 的三等分点，

$$\therefore AF = FG = GC.$$

又 $\because$ 点 D 是边 AB 的中点，

$$\therefore DH \parallel BG.$$

同理： $EH \parallel BF$ 。

$\therefore$ 四边形 $FBGH$ 是平行四边形，

连结 BH ，交 AC 于点 O ，

$$\therefore OF = OG,$$

$$\therefore AO = CO,$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore BH \perp FG,$$

$\therefore$ 四边形 $FBGH$ 是菱形；

（2） $\because$ 四边形 $FBGH$ 是平行四边形，

$$\therefore BO = HO, FO = GO.$$

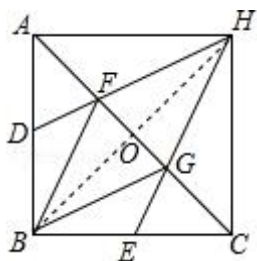
又 $\because AF = FG = GC$ ，

$$\therefore AF + FO = GC + GO, \text{ 即: } AO = CO.$$

∴ 四边形 $ABCH$ 是平行四边形.

∵ $AC \perp BH$, $AB = BC$,

∴ 四边形 $ABCH$ 是正方形.



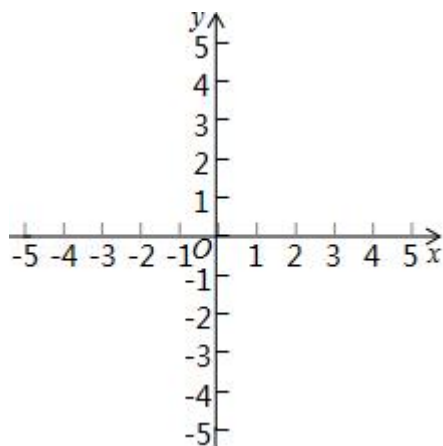
【点评】 本题考查正方形的判定，菱形的判定和性质，三角形的中位线，熟练掌握正方形的判定和性质是解题的关键.

24. (12 分) 已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 2$ 与 y 轴的交点为 A ，顶点为 B ，对称轴与 x 轴的交点为 C ，点 A 与点 D 关于对称轴对称，直线 BD 与 x 轴交于点 M ，直线 AB 与直线 OD 交于点 N .

(1) 求点 D 的坐标;

(2) 求点 M 的坐标 (用含 a 的代数式表示);

(3) 当点 N 在第一象限，且 $\angle OMB = \angle ONA$ 时，求 a 的值.



【分析】 (1) 令 $x = 0$ ，求得点 A 的坐标，根据抛物线的对称轴公式，求出点 C 的坐标，点 A 与点 D 关于对称轴对称，求出点 D 的坐标.

(2) 设 BD 的解析式，待定系数法求函数解析式，令 $y = 0$ ，求得点 M 的坐标.

(3) 根据 $\angle OMB = \angle ONA$ ， $\angle ODM = \angle BDN$ ，可推出 $\angle DBG = 45^\circ$ ，过 D 作 DG 垂直于 AN ，再利用 $\angle DAG$ 的正切值列出等量关系，即可求出 a 的值.

【解答】 解: (1) 令 $x = 0$, $y = 2$,

∴ $A(0, 2)$,

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2a} = 1, \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } y=2-a,$$

$$\therefore B(1, 2-a), C(1, 0),$$

$\therefore$ 点 A 与点 D 关于对称轴对称, 对称轴为直线 $x=1$,

$$\therefore D(2, 2).$$

(2) 设直线 BD 的解析式为 $y=kx+b$, 代入点 B 、 D ,

$$\begin{cases} 2=2k+b \\ 2-a=k+b \end{cases},$$

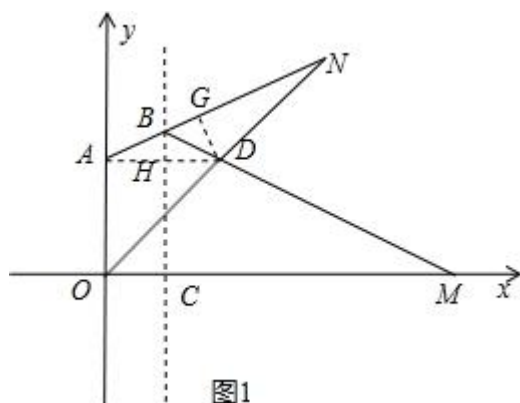
$$\text{解得} \begin{cases} k=a \\ b=2-2a \end{cases},$$

$$\therefore y=ax+2-2a,$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 解得 } x=2-\frac{2}{a},$$

$$\therefore M(2-\frac{2}{a}, 0).$$

(3) 如图 1 所示,



$$\because \angle OMB = \angle ONA, \angle ODM = \angle BDN$$

$$\therefore \angle NBD = \angle DOM = 45^\circ,$$

作 DG 垂直 AN 于点 G , 设 $DG=m$, 则 $BG=m$,

$$\therefore AB=BD=\sqrt{2}m,$$

$$\because \tan \angle DAG = \frac{DG}{AG} = \frac{m}{\sqrt{2}m+m} = \sqrt{2}-1,$$

$$\therefore \frac{BH}{AH} = \tan \angle DAG,$$

$$\because B(1, 2-a), H(1, 2)$$

$$\therefore BH = -a, AH = 1,$$

$$\text{即 } \frac{-a}{1} = \sqrt{2}-1,$$

$$\therefore a = 1 - \sqrt{2}.$$

【点评】此题考查了抛物线的性质，待定系数法求函数解析式，几何图形与二次函数结合问题，考查了学生自己动手画图的能力.

25. (14分) 已知圆 O 的半径长为 2，点 A 、 B 、 C 为圆 O 上三点，弦 $BC = AO$ ，点 D 为 BC 的中点，

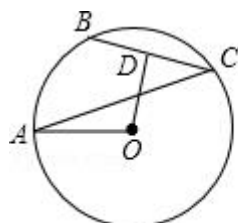


图1

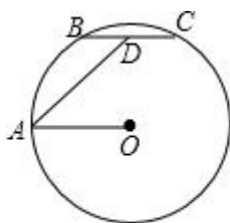
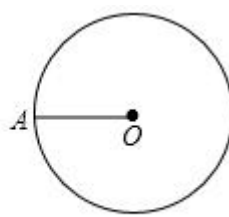


图2



(备用图)

(1) 如图 1，连接 AC 、 OD ，设 $\angle OAC = \alpha$ ，请用 α 表示 $\angle AOD$ ；

(2) 如图 2，当点 B 为 $\widehat{AC}$ 的中点时，求点 A 、 D 之间的距离；

(3) 如果 AD 的延长线与圆 O 交于点 E ，以 O 为圆心， AD 为半径的圆与以 BC 为直径的圆相切，求弦 AE 的长.

【分析】(1) 连接 OB 、 OC . 首先证明 OBC 是等边三角形，根据 $\angle AOD = \angle AOC - \angle COD$ 计算即可.

(2) 连接 AB 、 OB 、 OC 、 OD . 证明 $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOD = 90^\circ$ ，利用勾股定理计算即可.

(3) 如图，作直线 OD 交 $\odot D$ 于 M 、 N . 分两种情形：当 $AD = OM = \sqrt{3} - 1$ 时，以 O 为圆心， AD 为半径的圆与以 BC 为直径的圆外切. 当 $AD = ON = \sqrt{3} + 1$ 时，以 O 为圆心， AD 为半径的圆与以 BC 为直径的圆内切，

【解答】解：(1) 连接 OB 、 OC .

$$\because OB = OC = OA = BC$$

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ$$

$\because D$ 为 BC 中点

$$\therefore \angle COD = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ$$

$$\because OA = OC$$

$$\therefore \angle OCA = \angle OAC = \alpha$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\therefore \angle AOD = \angle AOC - \angle COD = 180^\circ - 2\alpha - 30^\circ = 150^\circ - 2\alpha$$

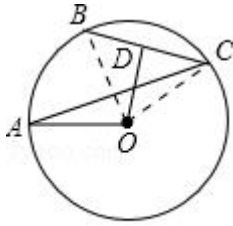


图1

(2) 连接 AB 、 OB 、 OC 、 OD

$\because B$ 为 $\widehat{AC}$ 的中点

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$$

$$\therefore AB = BC$$

$$\because BC = AO = 2$$

$$\therefore OA = AB = OB = BC = OC = 2$$

$\therefore \triangle AOB$ 与 $\triangle BOC$ 是等边三角形

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$$

$\because D$ 是 BC 中点

$$\therefore \angle BOD = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ, \quad BD = \frac{1}{2} BC = 1$$

$$\therefore OD^2 = OB^2 - BD^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore \angle AOD = \angle AOB + \angle BOD = 90^\circ$$

$$\therefore AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$$

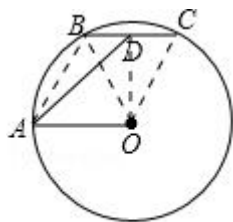


图2

(3) 如图 3 中，作直线 OD 交 $\odot D$ 于 M 、 N 。


$$\because BD = CD = 1,$$
$$\therefore OD \perp BC,$$
$$\therefore OD = \sqrt{3},$$
$$\therefore AD \cdot DE = BD \cdot CD,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$\because AD \cdot DE = BD \cdot CD,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{3\sqrt{3}+1}{2},$$

综上所述满足条件的 AE 的值为 $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

第 24 页 (共 24 页)