

2019 年上海市宝山区中考数学二模试卷

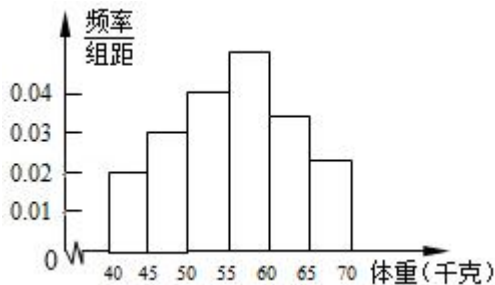
一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 32400000 用科学记数法表示为 ()
- A. 0.324×10^8 B. 32.4×10^6 C. 3.24×10^7 D. 324×10^8
2. (4 分) 若关于 x 的一元一次方程 $x - m + 2 = 0$ 的解是负数，则 m 的取值范围是 ()
- A. $m \geq 2$ B. $m > 2$ C. $m < 2$ D. $m \leq 2$
3. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 向上平移 1 个单位，平移后所得的抛物线的表达式为 ()
- A. $y = x^2 - 2x + 4$ B. $y = x^2 - 2x + 2$ C. $y = x^2 - 3x + 3$ D. $y = x^2 - x + 3$
4. (4 分) 现有甲、乙两个合唱队，队员的平均身高都是 $175cm$ ，方差分别是 $S_{甲}^2$ 、 $S_{乙}^2$ ，如果 $S_{甲}^2 > S_{乙}^2$ ，那么两个队中队员的身高较整齐的是 ()
- A. 甲队 B. 乙队
C. 两队一样整齐 D. 不能确定
5. (4 分) 已知 $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 2$ ，而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反，那么下列结论中正确的是 ()
- A. $3\vec{a} = 2\vec{b}$ B. $2\vec{a} = 3\vec{b}$ C. $3\vec{a} = -2\vec{b}$ D. $2\vec{a} = -3\vec{b}$
6. (4 分) 对于一个正多边形，下列四个命题中，错误的是 ()
- A. 正多边形是轴对称图形，每条边的垂直平分线是它的对称轴
B. 正多边形是中心对称图形，正多边形的中心是它的对称中心
C. 正多边形每一个外角都等于正多边形的中心角
D. 正多边形每一个内角都与正多边形的中心角互补

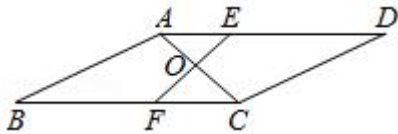
二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 计算： $a^6 \div a^3 =$ _____.
8. (4 分) 分解因式： $a^3 - a =$ _____.
9. (4 分) 已知关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为 _____.
10. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 \leq 1 \end{cases}$ 的解集是 _____.
11. (4 分) 方程 $\sqrt{2x-1} + 3 = 4$ 的解为 _____.
12. (4 分) 不透明的袋中装有 3 个大小相同的小球，其中两个为白色，一个为红色，随机地从袋中摸取一个小球后放回，再随机地摸取一个小球，两次取的小球都是红球的概率为 _____.

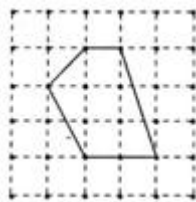
13. (4分) 为了解全区 5000 名初中毕业生的体重情况, 随机抽测了 400 名学生的体重, 频率分布如图所示 (每小组数据可含最小值, 不含最大值), 其中从左至右前四个小长方形的高依次为 0.02、0.03、0.04、0.05, 由此可估计全区初中毕业生的体重不小于 60 千克的学生人数约为_____人.



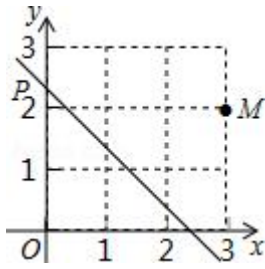
14. (4分) 经过点 $A(1, 2)$ 的反比例函数解析式是_____.
15. (4分) 如果圆 O 的半径为 3, 圆 P 的半径为 2, 且 $OP = 5$, 那么圆 O 和圆 P 的位置关系是_____.
16. (4分) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于 O , 过点 O 的线段 EF 与 AD , BC 分别交于 E , F , 若 $AB = 4$, $BC = 5$, $OE = 1.5$, 那么四边形 $EFCD$ 的周长为_____.



17. (4分) 各顶点都在方格纸横竖格子线的交错点上的多边形称为格点多边形, 奥地利数学家皮克 ($G. Pick$, 1859 ~ 1942 年) 证明了格点多边形的面积公式: $S = a + \frac{1}{2}b - 1$, 其中 a 表示多边形内部的格点数, b 表示多边形边界上的格点数, S 表示多边形的面积. 如图格点多边形的面积是_____.



18. (4分) 如图, 点 M 的坐标为 $(3, 2)$, 动点 P 从点 O 出发, 沿 y 轴以每秒 1 个单位的速度向上移动, 且过点 P 的直线 $l: y = -x + b$ 也随之移动, 若点 M 关于 l 的对称点落在坐标轴上, 设点 P 的移动时间为 t , 则 t 的值是_____.



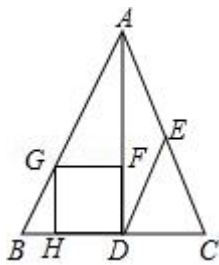
三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $(\frac{1}{2})^{-2} + (-2019)^0 - \frac{1}{2 + \cot 30^\circ} + \sqrt{(3 - \pi)^2}$.

20. (10 分) 解方程: $\frac{16}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} = \frac{x + 2}{x - 2}$

21. (10 分) 如图已知: $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的高, E 是边 AC 的中点, $BC = 11$, $AD = 12$, $DFGH$ 为边长为 4 的正方形, 其中点 F 、 G 、 H 分别在 AD 、 AB 、 BC 上.

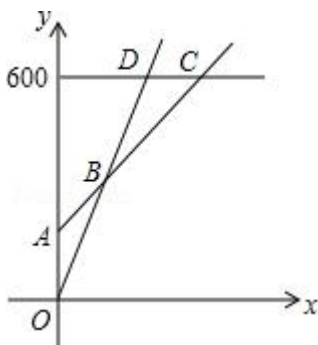
- (1) 求 BD 的长度;
- (2) 求 $\cos \angle EDC$ 的值.



22. (10 分) 某乒乓球馆普通票价 20 元/张, 暑假为了促销, 新推出两种优惠卡:

- ①金卡售价 600 元/张, 每次凭卡不再收费;
- ②银卡售价 150 元/张, 每次凭卡另收 10 元; 暑期普通票正常出售, 两种优惠卡仅限暑期使用, 不限次数. 设打乒乓 x 次时, 所需总费用为 y 元.

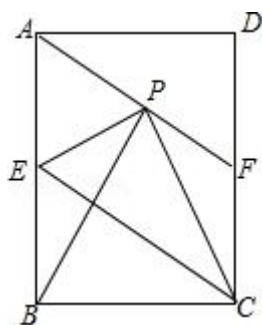
- (1) 分别写出选择银卡、普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式;
- (2) 在同一个坐标系中, 若三种消费方式对应的函数图象如图所示, 请根据函数图象, 写出选择哪种消费方式更合算.



23. (12分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 AB 边的中点, 沿 EC 对折矩形 $ABCD$, 使 B 点落在点 P 处, 折痕为 EC , 联结 AP 并延长 AP 交 CD 于 F 点,

(1) 求证: 四边形 $AECF$ 为平行四边形;

(2) 如果 $PA = PE$, 联结 BP , 求证: $\triangle APB \cong \triangle EPC$.

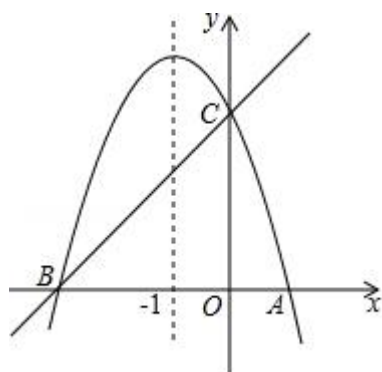


24. (12分) 如图, 已知对称轴为直线 $x = -1$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 其中 $A(1, 0)$.

(1) 求点 B 的坐标及此抛物线的表达式;

(2) 点 D 为 y 轴上一点, 若直线 BD 和直线 BC 的夹角为 15° , 求线段 CD 的长度;

(3) 设点 P 为抛物线的对称轴 $x = -1$ 上的一个动点, 当 $\triangle BPC$ 为直角三角形时, 求点 P 的坐标.



25. (14分) 如图已知: AB 是圆 O 的直径, $AB = 10$, 点 C 为圆 O 上异于点 A 、 B 的一点, 点 M 为弦 BC 的中点.

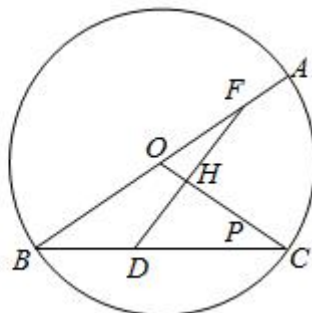
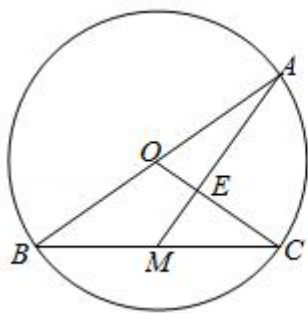
(1) 如果 AM 交 OC 于点 E , 求 $OE:CE$ 的值;

(2) 如果 $AM \perp OC$ 于点 E , 求 $\angle ABC$ 的正弦值;

(3) 如果 $AB:BC = 5:4$, D 为 BC 上一动点, 过 D 作 $DF \perp OC$, 交 OC 于点 H , 与射线 BO 交于圆内点 F , 请完成下列探究.

探究一: 设 $BD = x$, $FO = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域.

探究二: 如果点 D 在以 O 为圆心, OF 为半径的圆上, 写出此时 BD 的长度.



2019 年上海市宝山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 32400000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.324×10^8 B. 32.4×10^6 C. 3.24×10^7 D. 324×10^8

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：32400000 用科学记数法表示应记为 3.24×10^7 ，

故选：C．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

2. (4 分) 若关于 x 的一元一次方程 $x - m + 2 = 0$ 的解是负数，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \geq 2$ B. $m > 2$ C. $m < 2$ D. $m \leq 2$

【分析】根据方程的解为负数得出 $m - 2 < 0$ ，解之即可得．

【解答】解： $\because$ 方程 $x - m + 2 = 0$ 的解是负数，

$$\therefore x = m - 2 < 0,$$

解得： $m < 2$ ，

故选：C．

【点评】本题主要考查解一元一次方程和一元一次不等式的能力，根据题意列出不等式是解题的关键．

3. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 向上平移 1 个单位，平移后所得的抛物线的表达式为 ()

- A. $y = x^2 - 2x + 4$ B. $y = x^2 - 2x + 2$ C. $y = x^2 - 3x + 3$ D. $y = x^2 - x + 3$

【分析】根据向上平移纵坐标加求得结论即可．

【解答】解： $\because$ 将抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 向上平移 1 个单位，

$$\therefore \text{平移后抛物线的表达式 } y = x^2 - 2x + 4.$$

故选：A．

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目利用顶点的平移确定抛物线函

数图象的变化更简便.

4. (4分) 现有甲、乙两个合唱队, 队员的平均身高都是 175cm , 方差分别是 $S_{\text{甲}}^2$ 、 $S_{\text{乙}}^2$, 如果 $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$, 那么两个队中队员的身高较整齐的是 ()

- A. 甲队
B. 乙队
C. 两队一样整齐
D. 不能确定

【分析】根据方差的意义, 方差越小数据越稳定, 故比较方差后可以作出判断.

【解答】解: $\because S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$,

$\therefore$ 两个队中队员的身高较整齐的是: 乙队.

故选: B.

【点评】本题考查了方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量, 方差越大, 表明这组数据偏离平均数越大, 即波动越大, 数据越不稳定; 反之, 方差越小, 表明这组数据分布比较集中, 各数据偏离平均数越小, 即波动越小, 数据越稳定.

5. (4分) 已知 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, 而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反, 那么下列结论中正确的是 ()

- A. $3\vec{a}=2\vec{b}$ B. $2\vec{a}=3\vec{b}$ C. $3\vec{a}=-2\vec{b}$ D. $2\vec{a}=-3\vec{b}$

【分析】根据平行向量的性质即可解决问题.

【解答】解: $\because |\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, 而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反,

$$\therefore \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

$$\therefore 2\vec{a} = -3\vec{b},$$

故选: D.

【点评】本题考查平面向量, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

6. (4分) 对于一个正多边形, 下列四个命题中, 错误的是 ()

- A. 正多边形是轴对称图形, 每条边的垂直平分线是它的对称轴
B. 正多边形是中心对称图形, 正多边形的中心是它的对称中心
C. 正多边形每一个外角都等于正多边形的中心角
D. 正多边形每一个内角都与正多边形的中心角互补

【分析】利用正多边形的对称轴的性质、对称性、中心角的定义及中心角的性质作出判断即可.

【解答】解：A、正多边形是轴对称图形，每条边的垂直平分线是它的对称轴，正确，故此选项错误；

B、正奇数多边形多边形不是中心对称图形，错误，故本选项正确；

C、正多边形每一个外角都等于正多边形的中心角，正确，故本选项错误；

D、正多边形每一个内角都与正多边形的中心角互补，正确，故本选项错误．

故选：B．

【点评】本题考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是正确的理解正多边形的有关的定义．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $a^6 \div a^3 = \underline{a^3}$ ．

【分析】根据同底数幂相除，底数不变指数相减计算即可．

【解答】解： $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$ ．

故应填 a^3 ．

【点评】本题主要考查同底数幂的除法运算性质，熟练掌握运算性质是解题的关键．

8.（4 分）分解因式： $a^3 - a = \underline{a(a+1)(a-1)}$ ．

【分析】先提取公因式 a ，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解．

【解答】解： $a^3 - a$ ，

$$= a(a^2 - 1),$$

$$= a(a+1)(a-1).$$

故答案为： $a(a+1)(a-1)$ ．

【点评】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用平方差公式进行二次分解，注意要分解彻底．

9.（4 分）已知关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为 $\underline{-\frac{9}{4}}$ ．

【分析】根据方程有两个相等的实数根得出 $\Delta = 0$ ，求出 m 的值即可．

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 0,$$

$$\text{解得：} m = -\frac{9}{4},$$

$$\text{故答案为：} -\frac{9}{4}.$$

【点评】本题考查的是根的判别式，熟知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta =$

$b^2 - 4ac$ 的关系是解答此题的关键.

10. (4分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 \leq 1 \end{cases}$ 的解集是 $-1 < x \leq 2$.

【分析】分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

【解答】解: $\begin{cases} x+1 > 0 \text{ ①} \\ x-1 \leq 1 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①, 得 $x > -1$,

解不等式②, 得 $x \leq 2$,

所以, 这个不等式组的解集是 $-1 < x \leq 2$.

故答案为 $-1 < x \leq 2$.

【点评】主要考查了一元一次不等式解集的求法, 求不等式组解集的口诀: 同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到 (无解).

11. (4分) 方程 $\sqrt{2x-1} + 3 = 4$ 的解为 $x = 1$.

【分析】先移项, 得 $\sqrt{2x-1} = 1$, 然后方程两边平方, 得 $2x - 1 = 1$, 从而解得 $x = 1$.

【解答】解: 移项, 得 $\sqrt{2x-1} = 1$,

方程两边平方, 得 $2x - 1 = 1$,

解得 $x = 1$.

故答案为 $x = 1$.

【点评】本题考查了无理方程, 将无理方程化为一次方程是解题的关键.

12. (4分) 不透明的袋中装有 3 个大小相同的小球, 其中两个为白色, 一个为红色, 随机地从袋中摸取一个小球后放回, 再随机地摸取一个小球, 两次取的小球都是红球的概率为 $\frac{1}{9}$.

【分析】根据题意先画出树状图得出所有等情况数和两次取的小球都是红球的情况数, 再根据概率公式即可得出答案.

【解答】解: 根据题意画图如下:



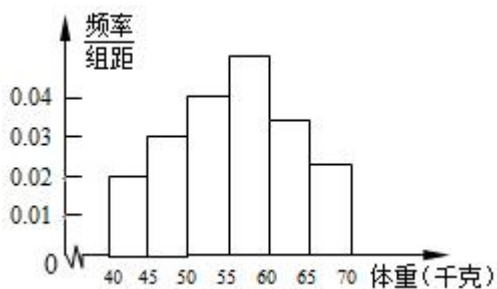
共有 9 种等可能的情况数, 其中两次取的小球都是红球的有 1 种,

则两次取的小球都是红球的概率为 $\frac{1}{9}$;

故答案为: $\frac{1}{9}$.

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

13. (4分) 为了解全区 5000 名初中毕业生的体重情况，随机抽测了 400 名学生的体重，频率分布如图所示（每小组数据可含最小值，不含最大值），其中从左至右前四个小长方形的高依次为 0.02、0.03、0.04、0.05，由此可估计全区初中毕业生的体重不小于 60 千克的学生人数约为 1500 人．



【分析】先根据频率分布直方图，得到从左至右前四组的频率，进而得出后两组的频率之和，最后根据总数 $\times$ 频率，即可得到体重不小于 60 千克的学生人数．

【解答】解： $\because$ 从左至右前四个小长方形的高依次为 0.02、0.03、0.04、0.05，
 $\therefore$ 从左至右前四组的频率依次为 $0.02 \times 5 = 0.1$ 、 $0.03 \times 5 = 0.15$ 、 $0.04 \times 5 = 0.2$ 、 $0.05 \times 5 = 0.25$ ，
 $\therefore$ 后两组的频率之和为： $1 - 0.1 - 0.15 - 0.2 - 0.25 = 0.3$ ，
 $\therefore$ 体重不小于 60 千克的学生人数约为： $5000 \times 0.3 = 1500$ 人，
 故答案为：1500．

【点评】本题考查了频数分布图和频率分布直方图的知识，根据频率、频数及样本容量之间的关系进行正确的运算是解题的关键．

14. (4分) 经过点 $A(1, 2)$ 的反比例函数解析式是 $y = \frac{2}{x}$ ．

【分析】先设 $y = \frac{k}{x}$ ，再把已知点的坐标代入可求出 k 值，即得到反比例函数的解析式．

【解答】解：设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ．

把点 $(1, 2)$ 代入解析式 $y = \frac{k}{x}$ ，得 $k = 2$ ，

所以 $y = \frac{2}{x}$ ．

故答案为: $y = \frac{2}{x}$.

【点评】本题比较简单,考查的是用待定系数法求反比例函数的解析式,是中学阶段的重点内容.

15. (4分) 如果圆 O 的半径为 3, 圆 P 的半径为 2, 且 $OP = 5$, 那么圆 O 和圆 P 的位置关系是 外切.

【分析】根据两圆的圆心距和两圆的半径之和作出判断即可.

【解答】解: $\because$ 圆 O 的半径为 3, 圆 P 的半径为 2, 且 $OP = 5$,

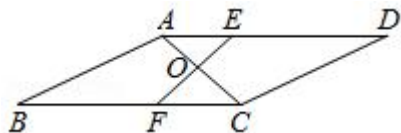
$$\therefore OP = R + r = 2 + 3 = 5,$$

$\therefore$ 两圆外切,

故答案为: 外切.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系: 圆和圆的位置与两圆的圆心距、半径的数量之间的关系: ①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$; ②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$; ③两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$); ④两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r$ ($R > r$); ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$ ($R > r$).

16. (4分) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于 O , 过点 O 的线段 EF 与 AD , BC 分别交于 E , F , 若 $AB = 4$, $BC = 5$, $OE = 1.5$, 那么四边形 $EFCD$ 的周长为 12.



【分析】根据平行四边形的性质知, $AB = CD = 4$, $AD = BC = 5$, $AO = OC$, $\angle OAD = \angle OCF$, $\angle AOE$ 和 $\angle COF$ 是对顶角相等, 所以 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$, 所以 $OF = OE = 1.5$, $CF = AE$, 所以四边形 $EFCD$ 的周长 $= ED + CD + CF + OF + OE = ED + AE + CD + OE + OF = AD + CD + OE + OF$, 由此就可以求出周长.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 平行四边形,

$$\therefore AB = CD = 4, AD = BC = 5, AO = OC, \angle OAD = \angle OCF, \angle AOE = \angle COF,$$

$$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF,$$

$$\therefore OF = OE = 1.5, CF = AE,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFCD \text{ 的周长} = ED + CD + CF + OF + OE$$

$$= ED + AE + CD + OE + OF$$

$$= AD + CD + OE + OF$$

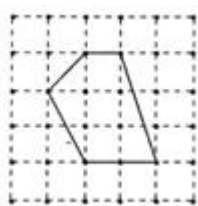
$$= 4 + 5 + 1.5 + 1.5$$

= 12.

故答案为：12.

【点评】本题利用了平行四边形的性质和已知条件先证出 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$ ，再全等三角形的性质，转化边的关系后再求解.

17. (4分) 各顶点都在方格纸横竖格子线的交错点上的多边形称为格点多边形，奥地利数学家皮克 (G. Pick, 1859 ~ 1942 年) 证明了格点多边形的面积公式： $S = a + \frac{1}{2}b - 1$ ，其中 a 表示多边形内部的格点数， b 表示多边形边界上的格点数， S 表示多边形的面积. 如图格点多边形的面积是 6.



【分析】分别统计出多边形内部的格点数 a 和边界上的格点数 b ，再代入公式 $S = a + \frac{1}{2}b - 1$ ，即可得出格点多边形的面积.

【解答】解： $\because a$ 表示多边形内部的格点数， b 表示多边形边界上的格点数， S 表示多边形的面积，

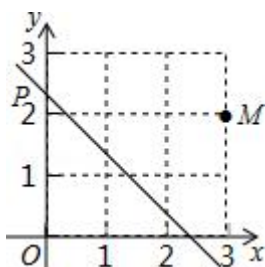
$$\therefore a = 4, b = 6,$$

$$\therefore \text{格点多边形的面积 } S = a + \frac{1}{2}b - 1 = 4 + \frac{1}{2} \times 6 - 1 = 6.$$

故答案为：6.

【点评】本题考查格点多边形面积的计算，解题的关键是根据图形正确统计出 a, b 的值.

18. (4分) 如图，点 M 的坐标为 $(3, 2)$ ，动点 P 从点 O 出发，沿 y 轴以每秒 1 个单位的速度向上移动，且过点 P 的直线 $l: y = -x + b$ 也随之移动，若点 M 关于 l 的对称点落在坐标轴上，设点 P 的移动时间为 t ，则 t 的值是 2 或 3.



【分析】找出点 M 关于直线 l 在坐标轴上的对称点 E, F ，如图所示，求出点 E, F 的坐标，然后分别求出 ME, MF 中点坐标，最后分别求出时间 t 的值.

【解答】解：如图，过点 M 作 $MF \perp$ 直线 l ，交 y 轴于点 F ，交 x 轴于点 E ，则点 E 、 F 为点 M 在坐标轴上的对称点。

过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D ，则 $OD = 3$ ， $MD = 2$ 。

由直线 $l: y = -x + b$ 可知 $\angle PDO = \angle OPD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle MED = \angle OEF = 45^\circ$ ，则 $\triangle MDE$ 与 $\triangle OEF$ 均为等腰直角三角形，

$\therefore DE = MD = 2$ ， $OE = OF = 1$ ，

$\therefore E(1, 0)$ ， $F(0, -1)$ 。

$\because M(3, 2)$ ， $F(0, -1)$ ，

$\therefore$ 线段 MF 中点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 。

直线 $y = -x + b$ 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ，则 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + b$ ，解得： $b = 2$ ，

$\therefore t = 2$ 。

$\because M(3, 2)$ ， $E(1, 0)$ ，

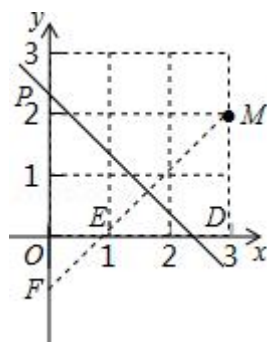
$\therefore$ 线段 ME 中点坐标为 $(2, 1)$ 。

直线 $y = -x + b$ 过点 $(2, 1)$ ，则 $1 = -2 + b$ ，解得： $b = 3$ ，

$\therefore t = 3$ 。

故点 M 关于 l 的对称点，当 $t = 2$ 时，落在 y 轴上，当 $t = 3$ 时，落在 x 轴上。

故答案为 2 或 3。



【点评】考查了一次函数的图象与几何变换．注意在 x 轴、 y 轴上均有点 M 的对称点，不要漏解；其次注意点 E 、 F 坐标以及线段中点坐标的求法。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $(\frac{1}{2})^{-2} + (-2019)^0 - \frac{1}{2 + \cot 30^\circ} + \sqrt{(3 - \pi)^2}$ 。

【分析】直接利用负指数幂的性质以及零指数幂的性质、二次根式的性质、特殊角的三角函数值分别化简得出答案。

【解答】解： $= 4 + 1 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \pi - 3$

$$= \pi + 2 - (2 - \sqrt{3})$$

$$= \pi + \sqrt{3}.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

20. (10分) 解方程： $\frac{16}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} = \frac{x + 2}{x - 2}$

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】解：去分母得： $16 + x - 2 = (x + 2)^2$,

整理方程得， $x^2 + 3x - 10 = 0$,

解得： $x_1 = -5$, $x_2 = 2$,

经检验 $x = -5$ 是原方程的解， $x = 2$ 是增根（舍去），

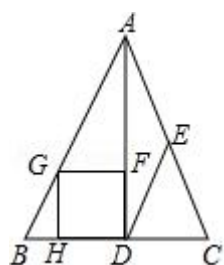
$\therefore$ 原方程的解是 $x = -5$.

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

21. (10分) 如图已知： $\triangle ABC$ 中， AD 是边 BC 上的高、 E 是边 AC 的中点， $BC = 11$, $AD = 12$, $DFGH$ 为边长为 4 的正方形，其中点 F 、 G 、 H 分别在 AD 、 AB 、 BC 上.

(1) 求 BD 的长度；

(2) 求 $\cos \angle EDC$ 的值.



【分析】(1) 由四边形 $DFGH$ 为边长为 4 的正方形得 $\frac{GF}{BD} = \frac{AF}{AD}$, 将相关线段的长度代入计算可得；

(2) 先求出 CD 、 AC 的长，再由 E 是边 AC 的中点知 $ED = EC$, 据此得 $\angle EDC = \angle ACD$, 再根据余弦函数的定义可得答案.

【解答】解：(1) $\because$ 四边形 $DFGH$ 为顶点在 $\triangle ABD$ 边长的正方形，且边长为 4，
 $\therefore GF \parallel BD$, $GF = DF = 4$,

$$\therefore \frac{GF}{BD} = \frac{AF}{AD},$$

$$\because AD = 12,$$

$$\therefore AF = 8,$$

$$\text{则 } \frac{4}{BD} = \frac{8}{12},$$

$$\text{解得: } BD = 6;$$

$$(2) \because BC = 11, BD = 6,$$

$$\therefore CD = 5,$$

$$\text{在直角 } \triangle ADC \text{ 中, } AC^2 = AD^2 + DC^2,$$

$$\therefore AC = 13,$$

$$\because E \text{ 是边 } AC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore ED = EC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ACD,$$

$$\therefore \cos \angle EDC = \cos \angle ACD = \frac{5}{13}.$$

【点评】 本题主要考查正方形的性质，解题的关键是掌握正方形的性质、勾股定理、三角函数的应用及直角三角形的性质等．

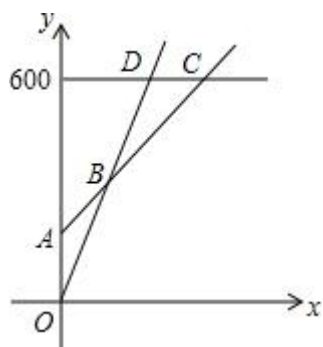
22. (10 分) 某乒乓球馆普通票价 20 元/张，暑假为了促销，新推出两种优惠卡：

①金卡售价 600 元/张，每次凭卡不再收费；

②银卡售价 150 元/张，每次凭卡另收 10 元；暑期普通票正常出售，两种优惠卡仅限暑期使用，不限次数．设打乒乓 x 次时，所需总费用为 y 元．

(1) 分别写出选择银卡、普通票消费时， y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 在同一个坐标系中，若三种消费方式对应的函数图象如图所示，请根据函数图象，写出选择哪种消费方式更合算．



【分析】(1) 根据题意可以直接写出选择银卡、普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式;
 (2) 根据函数图象和 (1) 中的函数解析式可以分别求得普通票消费和银卡消费相等的情况, 银卡消费和金卡消费相等的情况, 再根据图象即可解答本题.

【解答】解: (1) 由题意可得,
 选择银卡消费时, y 与 x 之间的函数关系式为: $y = 10x + 150$,
 选择普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式为: $y = 20x$;

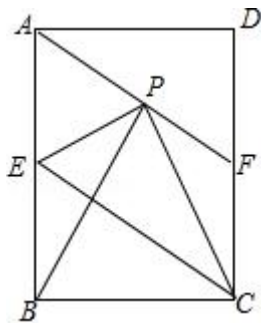
(2) 当 $10x + 150 = 20x$ 时, 得 $x = 15$,
 当 $10x + 150 = 600$ 时, 得 $x = 45$,

答: 当打球次数不足 15 次时, 选择普通票最合算, 当打球次数介于 15 次到 45 次之间时, 选择银卡最合算, 当打球次数超过 45 次时, 选择金卡最合算, 当打球次数恰为 15 次时, 选择普通票或银卡同为最合算, 当打球次数恰为 45 次时, 选择金卡或银卡同为最合算.

【点评】本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

23. (12 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 AB 边的中点, 沿 EC 对折矩形 $ABCD$, 使 B 点落在点 P 处, 折痕为 EC , 联结 AP 并延长 AP 交 CD 于 F 点,

- (1) 求证: 四边形 $AECF$ 为平行四边形;
- (2) 如果 $PA = PE$, 联结 BP , 求证: $\triangle APB \cong \triangle EPC$.



【分析】(1) 由折叠的性质和中位线以及平行四边形的判定解答;
 (2) 根据三角形 AEP 为等边三角形, 得到三条边相等, 三内角相等, 再由折叠的性质及邻补角定义得到一对角相等, 根据同角的余角相等得到一对角相等, 再由 $AP = EB$, 利用 AAS 即可得证.

【解答】证明: (1) 由折叠得到 EC 垂直平分 BP ,
 设 EC 与 BP 交于 Q ,
 $\therefore BQ = EQ$

$\because E$ 为 AB 的中点,

$\therefore AE = EB$,

$\therefore EQ$ 为 $\triangle ABP$ 的中位线,

$\therefore AF \parallel EC$,

$\therefore AE \parallel FC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形;

(2) $\because AF \parallel EC$,

$\therefore \angle APB = \angle EQB = 90^\circ$,

由翻折性质 $\angle EPC = \angle EBC = 90^\circ$, $\angle PEC = \angle BEC$

$\because E$ 为直角 $\triangle APB$ 斜边 AB 的中点, 且 $AP = EP$,

$\therefore \triangle AEP$ 为等边三角形, $\angle BAP = \angle AEP = 60^\circ$,

$$\angle CEP = \angle CEB = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\text{在 } \triangle ABP \text{ 和 } \triangle EPC \text{ 中, } \begin{cases} \angle BAP = \angle CEP \\ \angle APB = \angle EPC \\ AP = EP \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle EPC$ (AAS)

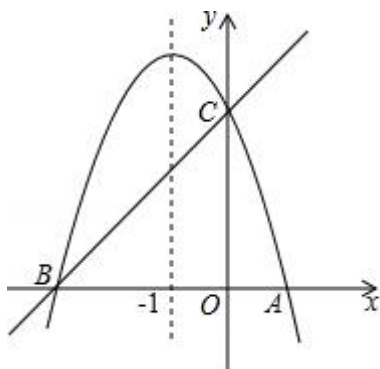
【点评】 此题考查全等三角形的判定与性质, 折叠的性质, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解本题的关键.

24. (12分) 如图, 已知对称轴为直线 $x = -1$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 其中 $A(1, 0)$.

(1) 求点 B 的坐标及此抛物线的表达式;

(2) 点 D 为 y 轴上一点, 若直线 BD 和直线 BC 的夹角为 15° , 求线段 CD 的长度;

(3) 设点 P 为抛物线的对称轴 $x = -1$ 上的一个动点, 当 $\triangle BPC$ 为直角三角形时, 求点 P 的坐标.



【分析】(1) 由抛物线解析式得出 $c=3$, $C(0, 3)$, 把对称轴和 A 点的坐标代入抛物线

解析式得出方程组, 解方程组 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$, 得出抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$, 由对称轴

即可求出点 B 的坐标;

(2) 由点 B 和 C 的坐标得 $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形, $\angle CBO = 45^\circ$, 求出 $\angle DBO = 30^\circ$ 或 $\angle DBO = 60^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中, 由三角函数得出 DO 的长, 即可得出 CD 的长;

(3) 设 $P(-1, t)$, 由题意得出 $OB = OC = 3$, 由勾股定理得: $BC^2 = 18$, $PB^2 = (-1+3)^2 + t^2 = 4+t^2$, $PC^2 = (-1)^2 + (t-3)^2 = t^2 - 6t + 10$, 分情况讨论:

①若点 B 为直角顶点, 则 $BC^2 + PB^2 = PC^2$, 得出方程, 解方程即可;

②若点 C 为直角顶点, 则 $BC^2 + PC^2 = PB^2$, 得出方程, 解方程即可;

③若点 P 为直角顶点, 则 $PB^2 + PC^2 = BC^2$, 得出方程, 解方程即可; 即可得出答案.

【解答】解: (1) $\because$ 对称轴为直线 $x = -1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 y 轴交于 C 点,

$$\therefore c = 3, C(0, 3),$$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 A 点, A 点的坐标为 $(1, 0)$,

$$\therefore a+b+c=0, \text{ 即: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ a+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$,

$\because$ 对称轴为 $x = -1$,

且抛物线经过 $A(1, 0)$,

$$\therefore B(-3, 0);$$

(2) $\because B(-3, 0), C(0, 3)$,

$\therefore \triangle BOC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CBO = 45^\circ,$$

$\because$ 直线 BD 和直线 BC 的夹角为 15° ,

$$\therefore \angle DBO = 30^\circ \text{ 或 } \angle DBO = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中, $DO = BO \cdot \tan \angle DBO$,

$$\because BO = 3,$$

当 $\angle DBO = 30^\circ$ 时, 如图 1 所示:

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore DO = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = OC - DO = 3 - \sqrt{3};$$

当 $\angle DBO = 60^\circ$ 时, 如图 2 所示:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, DO = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = DO - OC = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore CD \text{ 的长度为 } 3 - \sqrt{3} \text{ 或 } 3\sqrt{3} - 3;$$

(3) 设 $P(-1, t)$, $\because B(-3, 0), C(0, 3)$,

$$\therefore OB = OC = 3,$$

由勾股定理得: $BC^2 = 18$, $PB^2 = (-1+3)^2 + t^2 = 4 + t^2$, $PC^2 = (-1)^2 + (t-3)^2 = t^2 - 6t + 10$,

分情况讨论: 如图 3 所示:

①若点 B 为直角顶点, 则 $BC^2 + PB^2 = PC^2$,

$$\text{即: } 18 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 10, \text{ 解得: } t = -2;$$

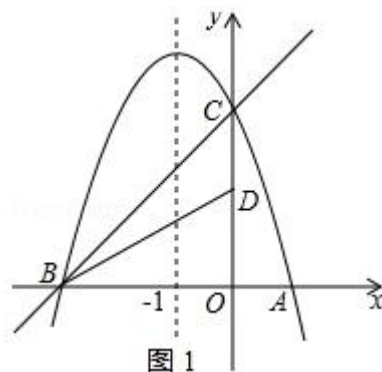
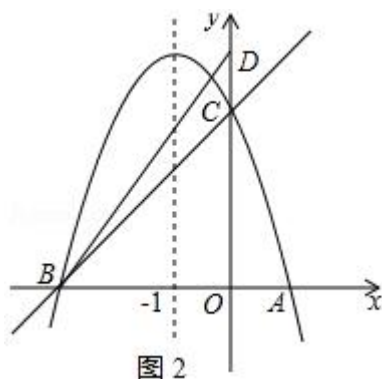
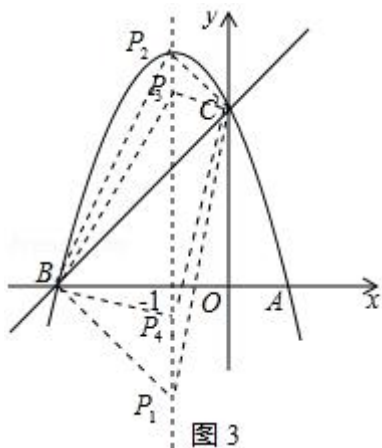
②若点 C 为直角顶点, 则 $BC^2 + PC^2 = PB^2$,

$$\text{即: } 18 + t^2 - 6t + 10 = 4 + t^2, \text{ 解得: } t = 4;$$

③若点 P 为直角顶点, 则 $PB^2 + PC^2 = BC^2$,

$$\text{即: } 4 + t^2 + t^2 - 6t + 10 = 18, \text{ 解得: } t_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, t_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2};$$

综上所述, 当 $\triangle BPC$ 为直角三角形时, 点 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(-1, 4)$ 或 $(-1, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ 或 $(-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$.



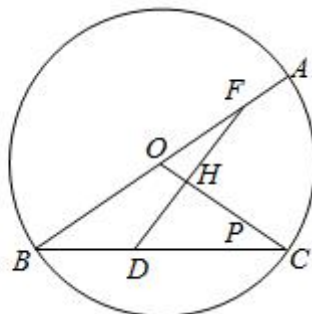
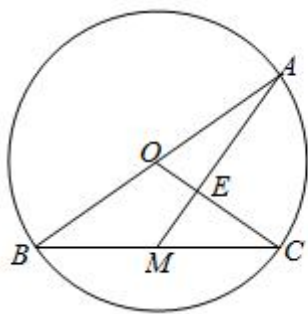
【点评】本题是二次函数综合题目，考查了待定系数法求二次函数的解析式，方程组的解法、二次函数的图象与性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理、三角函数以及分类讨论；本题综合性强，有一定难度，注意分类讨论．

25. (14 分) 如图已知：AB 是圆 O 的直径，AB = 10，点 C 为圆 O 上异于点 A、B 的一点，点 M 为弦 BC 的中点．

- (1) 如果 AM 交 OC 于点 E，求 OE : CE 的值；
- (2) 如果 $AM \perp OC$ 于点 E，求 $\angle ABC$ 的正弦值；
- (3) 如果 $AB : BC = 5 : 4$ ，D 为 BC 上一动点，过 D 作 $DF \perp OC$ ，交 OC 于点 H，与射线 BO 交于圆内点 F，请完成下列探究．

探究一：设 $BD = x$ ， $FO = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域．

探究二：如果点 D 在以 O 为圆心， OF 为半径的圆上，写出此时 BD 的长度．



【分析】（1）如图 1，过点 O 作 $ON \parallel BC$ 交 AM 于点 N ，根据三角形的中位线的性质得到 $ON = \frac{1}{2}BM$ ，根据平行线分线段成比例定理即可得到结论；

（2）如图 1，连接 OM ，根据垂径定理得到 $OM \perp BC$ ，根据余角的性质得到 $\angle OME = \angle MCE$ ，根据相似三角形的性质得到 $ME^2 = OE \cdot CE$ ，设 $OE = x$ ，则 $CE = 2x$ ， $ME = \sqrt{2x}$ ，解直角三角形即可得到结论；

（3）探究一：如图 2，过点 D 作 $DL \perp DF$ 交 BO 于点 L ，根据平行线的性质得到 $\angle LDB = \angle C = \angle B$ ，根据等腰三角形的判定定理得到 $BL = DL$ ，设 $BD = x$ ，则 $CD = 8 - x$ ， $BL = DL = \frac{5}{8}x$ ， $CH = \frac{4}{5}(8 - x)$ ， $OH = OC - CH = 5 - \frac{4}{5}(8 - x)$ ，根据平行线成线段成比例定理得到 $y = \frac{20x - 35}{7}$ （其中 $\frac{7}{4} < x < \frac{7}{2}$ ）；

探究二：根据题意得到 $OF = OD$ ，根据等腰三角形的性质得到 $DF \perp OC$ ，根据直角三角形的性质得到 $FO = OL$ ，列方程即可得到结论．

【解答】解：（1）如图 1，过点 O 作 $ON \parallel BC$ 交 AM 于点 N ，

$\because$ 点 O 是 AB 的中点，

$\therefore$ 点 N 是 AM 的中点，

$$\therefore ON = \frac{1}{2}BM,$$

$\because$ 点 M 为弦 BC 的中点，

$$\therefore BM = CM,$$

$$\therefore ON = \frac{1}{2}CM,$$

$\because ON \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{OE}{CE} = \frac{ON}{CM} = \frac{1}{2};$$

(2) 如图 1, 连接 OM ,

$\because$ 点 M 为弦 BC 的中点,

$\therefore OM \perp BC$,

$\because AM \perp OC$ 于点 E ,

$\therefore \angle OME + \angle CME = \angle CME + \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle OME = \angle MCE$,

$\therefore \triangle OME \sim \triangle MCE$,

$\therefore ME^2 = OE \cdot CE$,

设 $OE = x$, 则 $CE = 2x$, $ME = \sqrt{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle MCE$ 中, $CM = \sqrt{ME^2 + CE^2} = \sqrt{6}x$,

$$\therefore \sin \angle ECM = \frac{ME}{MC} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{6}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

(3) 探究一: 如图 2, 过点 D 作 $DL \perp DF$ 交 BO 于点 L ,

$\because DF \perp OC$,

$\therefore DL \parallel OC$,

$\therefore \angle LDB = \angle C = \angle B$,

$\therefore BL = DL$,

$\because AB = 10$, $AB:BC = 5:4$,

设 $BD = x$, 则 $CD = 8 - x$, $BL = DL = \frac{5}{8}x$, $CH = \frac{4}{5}(8 - x)$, $OH = OC - CH = 5 - \frac{4}{5}(8 - x)$,

$\because OH \parallel DL$,

$$\therefore \frac{OH}{LD} = \frac{OF}{FL},$$

$$\therefore \frac{\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}}{\frac{5}{8}x} = \frac{y}{y + 5 - \frac{5}{8}x},$$

$$\therefore y = \frac{20x - 35}{7} \quad \left(\text{其中 } \frac{7}{4} < x < \frac{7}{2} \right);$$

探究二: $\because$ 以 O 为圆心, OF 为半径的圆经过 D ,

$\therefore OF = OD$,

$$\because DF \perp OC,$$

$$\therefore OC \text{ 垂直平分 } DF, FO = OL,$$

$$\therefore y = 5 - \frac{5}{8}x,$$

$$\therefore \frac{20x-35}{7} = 5 - \frac{5}{8}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{112}{39},$$

$$\therefore BD = \frac{112}{39}.$$

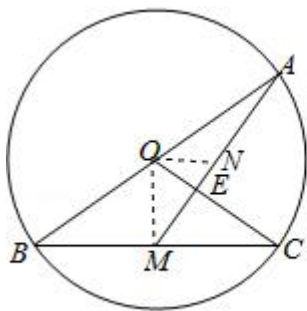
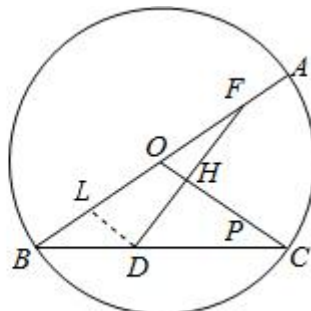


图1



【点评】 本题考查了垂径定理，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，解直角三角形，正确的作出辅助线是解题的关键．