

2019 年上海市嘉定区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 拒绝“餐桌浪费”，刻不容缓．节约一粒米的帐：一个人一日三餐少浪费一粒米，全国一年就可以节省 32400000 斤，这些粮食可供 9 万人吃一年．“32400000”这个数据用科学记数法表示为（ ）
- A. 324×10^5 B. 32.4×10^6 C. 3.24×10^7 D. 0.32×10^8
2. (4 分) 如果关于 x 的方程 $x - m + 2 = 0$ (m 为常数) 的解是 $x = -1$ ，那么 m 的值是（ ）
- A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. $m = 1$ D. $m = -1$
3. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 - 2x - 1$ 向上平移 1 个单位，平移后所得抛物线的表达式是（ ）
- A. $y = x^2 - 2x$ B. $y = x^2 - 2x - 2$ C. $y = x^2 - x - 1$ D. $y = x^2 - 3x - 1$
4. (4 分) 现有甲、乙两个合唱队，队员的平均身高都是 175cm，方差分别是 $S_{\text{甲}}^2$ 、 $S_{\text{乙}}^2$ ，如果 $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$ ，那么两个队中队员的身高较整齐的是（ ）
- A. 甲队 B. 乙队
C. 两队一样整齐 D. 不能确定
5. (4 分) 已知 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 3$ ，而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反，那么下列结论中正确的是（ ）
- A. $\vec{a} = 3\vec{b}$ B. $\vec{a} = -3\vec{b}$ C. $\vec{b} = 3\vec{a}$ D. $\vec{b} = -3\vec{a}$
6. (4 分) 对于一个正多边形，下列四个命题中，错误的是（ ）
- A. 正多边形是轴对称图形，每条边的垂直平分线是它的对称轴
B. 正多边形是中心对称图形，正多边形的中心是它的对称中心
C. 正多边形每一个外角都等于正多边形的中心角
D. 正多边形每一个内角都与正多边形的中心角互补

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

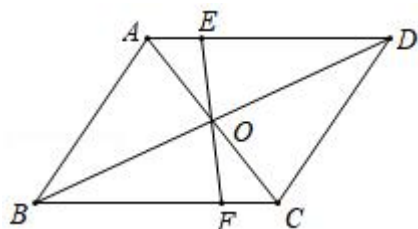
7. (4 分) 计算： $a^6 \div a^3 =$ _____.
8. (4 分) 分解因式： $2a^2 - 4a =$ _____.
9. (4 分) 已知关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为_____.
10. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 < 1 \end{cases}$ 的解集是_____.
11. (4 分) 方程 $\sqrt{2x-1} = 1$ 的根是_____.
12. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{2k+1}{x}$ 的图象经过点 $(2, -1)$ ，那么 k 的值是_____.

13. (4分) 不透明的袋中装有8个小球, 这些小球除了有红白两种颜色外其它都一样, 其中2个小球为红色, 6个小球为白色, 随机地从袋中摸取一个小球是红球的概率为_____.

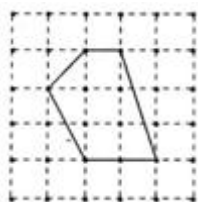
14. (4分) 在一次有12人参加的测试中, 得100分、95分、90分、85分、75分的人数分别是1、4、3、2、2, 那么这组数据的众数是_____分.

15. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$, 以点 A 为圆心作圆 A , 要使 B 、 C 两点中的一点在圆 A 外, 另一点在圆 A 内, 那么圆 A 的半径长 r 的取值范围是_____.

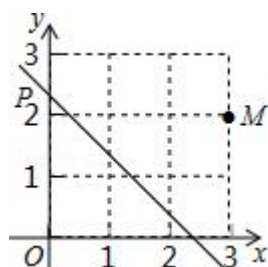
16. (4分) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , 过点 O 的线段 EF 与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F , 如果 $AB = 4$, $BC = 5$, $OE = \frac{3}{2}$, 那么四边形 $EFCD$ 的周长为_____.



17. (4分) 各顶点都在方格纸横竖格子线的交错点上的多边形称为格点多边形, 奥地利数学家皮克 ($G. Pick$, 1859~1942年) 证明了格点多边形的面积公式: $S = a + \frac{1}{2}b - 1$, 其中 a 表示多边形内部的格点数, b 表示多边形边界上的格点数, S 表示多边形的面积. 如图格点多边形的面积是_____.



18. (4分) 如图, 点 M 的坐标为 $(3, 2)$, 点 P 从原点 O 出发, 以每秒1个单位的速度沿 y 轴向上移动, 同时过点 P 的直线 l 也随之上下平移, 且直线 l 与直线 $y = -x$ 平行, 如果点 M 关于直线 l 的对称点落在坐标轴上, 如果点 P 的移动时间为 t 秒, 那么 t 的值可以是_____.



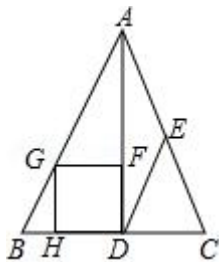
三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $(-2018)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \frac{1}{2+\tan 60^\circ} + \sqrt{(3-\pi)^2}$.

20. (10 分) 解方程： $\frac{16}{x^2-4} = \frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.

21. (10 分) 如图已知：△ABC 中，AD 是边 BC 上的高、E 是边 AC 的中点，BC = 11，AD = 12，DFGH 为边长为 4 的正方形，其中点 F、G、H 分别在 AD、AB、BC 上.

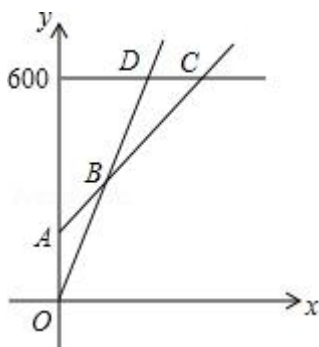
- (1) 求 BD 的长度；
(2) 求 $\cos \angle EDC$ 的值.



22. (10 分) 某乒乓球馆普通票价 20 元/张，暑假为了促销，新推出两种优惠卡：

- ①金卡售价 600 元/张，每次凭卡不再收费；
②银卡售价 150 元/张，每次凭卡另收 10 元；暑期普通票正常出售，两种优惠卡仅限暑期使用，不限次数. 设打乒乓 x 次时，所需总费用为 y 元.

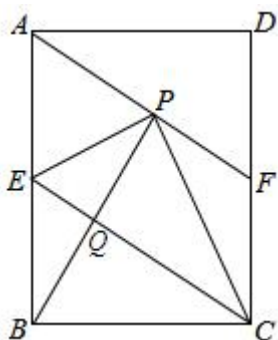
- (1) 分别写出选择银卡、普通票消费时， y 与 x 之间的函数关系式；
(2) 在同一个坐标系中，若三种消费方式对应的函数图象如图所示，请根据函数图象，写出选择哪种消费方式更合算.



23. (12 分) 如图，在矩形 ABCD 中，点 E 是边 AB 的中点，△EBC 沿直线 EC 翻折，使 B 点落在矩形 ABCD 内部的点 P 处，联结 AP 并延长 AP 交 CD 于点 F，联结 BP 交 CE 于点 Q.

- (1) 求证：四边形 AECF 是平行四边形；

(2) 如果 $PA = PE$, 求证: $\triangle APB \cong \triangle EPC$.

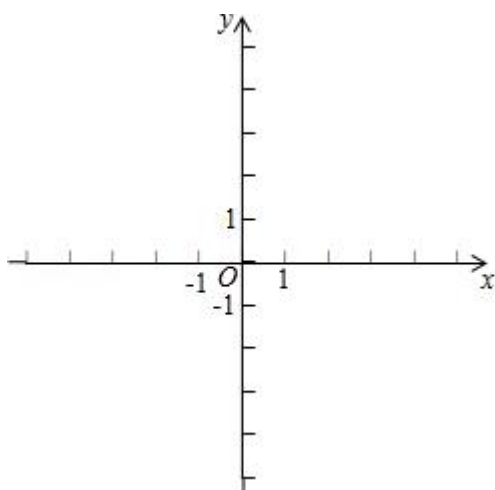


24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 抛物线 $y = mx^2 - 2x + n$ (m 、 n 是常数) 经过点 $A(-2, 3)$ 、 $B(-3, 0)$, 与 y 轴的交点为点 C .

(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 点 D 为 y 轴上一点, 如果直线 BD 和直线 BC 的夹角为 15° , 求线段 CD 的长度;

(3) 设点 P 为此抛物线的对称轴上的一个动点, 当 $\triangle BPC$ 为直角三角形时, 求点 P 的坐标.



25. (14 分) 在圆 O 中, AB 是圆 O 的直径, $AB = 10$, 点 C 是圆 O 上一点 (与点 A 、 B 不重合), 点 M 是弦 BC 的中点.

(1) 如图 1, 如果 AM 交 OC 于点 E , 求 $OE:CE$ 的值;

(2) 如图 2, 如果 $AM \perp OC$ 于点 E , 求 $\sin \angle ABC$ 的值;

(3) 如图 3, 如果 $AB:BC = 5:4$, 点 D 为弦 BC 上一动点, 过点 D 作 $DF \perp OC$, 交半径 OC 于点 H , 与射线 BO 交于圆内点 F . 探究一: 如果设 $BD = x$, $FO = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域; 探究二: 如果以点 O 为圆心, OF 为半径的圆经过点 D , 直接写出此时 BD 的长度; 请你完成上述两个探究.

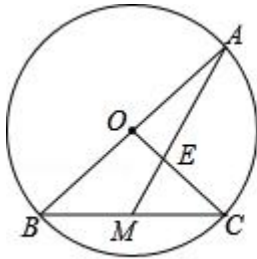


图1

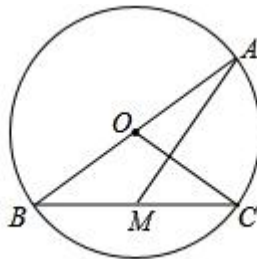


图2

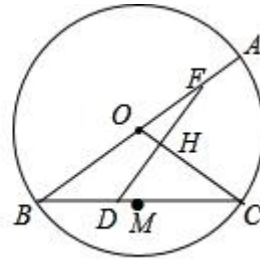


图3

2019 年上海市嘉定区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

- 1.（4 分）拒绝“餐桌浪费”，刻不容缓．节约一粒米的帐：一个人一日三餐少浪费一粒米，全国一年就可以节省 32400000 斤，这些粮食可供 9 万人吃一年．“32400000”这个数据用科学记数法表示为（ ）

A. 324×10^5 B. 32.4×10^6 C. 3.24×10^7 D. 0.32×10^8

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可．

【解答】解：32400000 = 3.24×10^7 元．

故选：C．

【点评】此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键．

- 2.（4 分）如果关于 x 的方程 $x - m + 2 = 0$ （ m 为常数）的解是 $x = -1$ ，那么 m 的值是（ ）

A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

【分析】理解一元一次的解和解一元一次方程的概念是解此题的关键．

【解答】解：把 $x = -1$ ，代入方程关于 x 的方程 $x - m + 2 = 0$ （ m 为常数）得：

$$-1 - m + 2 = 0,$$

$$\text{解得：} m = 1,$$

故选：C．

【点评】本题考查了一元一次方程两个概念，重点是理解一元一次方程的解和会解一元一次方程．

- 3.（4 分）将抛物线 $y = x^2 - 2x - 1$ 向上平移 1 个单位，平移后所得抛物线的表达式是（ ）

A. $y = x^2 - 2x$ B. $y = x^2 - 2x - 2$ C. $y = x^2 - x - 1$ D. $y = x^2 - 3x - 1$

【分析】根据向上平移纵坐标加求得结论即可．

【解答】解： $\because$ 将抛物线 $y = x^2 - 2x - 1$ 向上平移 1 个单位，

$\therefore$ 平移后抛物线的表达式 $y = x^2 - 2x - 1 + 1$ ，即 $y = x^2 - 2x$ ．

故选：A．

【解答】解：A、正多边形是轴对称图形，每条边的垂直平分线是它的对称轴，正确，故此选项错误；

B、正奇数多边形多边形不是中心对称图形，错误，故本选项正确；

C、正多边形每一个外角都等于正多边形的中心角，正确，故本选项错误；

D、正多边形每一个内角都与正多边形的中心角互补，正确，故本选项错误．

故选：B．

【点评】本题考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是正确的理解正多边形的有关的定义．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $a^6 \div a^3 = \underline{a^3}$ ．

【分析】根据同底数幂相除，底数不变指数相减计算即可．

【解答】解： $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$ ．

故应填 a^3 ．

【点评】本题主要考查同底数幂的除法运算性质，熟练掌握运算性质是解题的关键．

8.（4 分）分解因式： $2a^2 - 4a = \underline{2a(a-2)}$ ．

【分析】观察原式，找到公因式 $2a$ ，提出即可得出答案．

【解答】解： $2a^2 - 4a = 2a(a-2)$ ．

故答案为： $2a(a-2)$ ．

【点评】本题考查了因式分解的基本方法——提公因式法．本题只要将原式的公因式 $2a$ 提出即可．

9.（4 分）已知关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为 $\underline{-\frac{9}{4}}$ ．

【分析】根据方程有两个相等的实数根得出 $\Delta = 0$ ，求出 m 的值即可．

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 0,$$

$$\text{解得：} m = -\frac{9}{4},$$

$$\text{故答案为：} -\frac{9}{4}.$$

【点评】本题考查的是根的判别式，熟知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系是解答此题的关键．

10. (4分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 < 1 \end{cases}$ 的解集是 $-1 \leq x < 2$.

【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可.

【解答】解： $\begin{cases} x+1 \geq 0 \text{ ①} \\ x-1 < 1 \text{ ②} \end{cases}$

由①得： $x \geq -1$,

由②得： $x < 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 \leq x < 2$.

故答案为 $-1 \leq x < 2$.

【点评】此题考查了一元一次不等式组的解法，不等式组取解集的方法为：同大取大；同小取小；大小小大去中间；大大小小无解.

11. (4分) 方程 $\sqrt{2x-1} = 1$ 的根是 1 .

【分析】本题思路是两边平方后去根号，解方程.

【解答】解：两边平方得 $2x - 1 = 1$ ，解得 $x = 1$.

经检验 $x = 1$ 是原方程的根.

故本题答案为： $x = 1$.

【点评】平方时可能产生增根，要验根.

12. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{2k+1}{x}$ 的图象经过点 $(2, -1)$ ，那么 k 的值是 $k = -\frac{3}{2}$.

【分析】根据点的坐标与函数解析式的关系，将点的坐标代入，可以得到 $-1 = \frac{2k+1}{2}$,

然后解方程，便可以得到 k 的值.

【解答】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2k+1}{x}$ 的图象经过点 $(2, -1)$,

$$\therefore -1 = \frac{2k+1}{2}$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2};$$

$$\text{故填 } k = -\frac{3}{2}.$$

【点评】本题侧重考查利用待定系数法求函数的解析式的方法，可以结合代入法进行解答

13. (4分) 不透明的袋中装有 8 个小球，这些小球除了有红白两种颜色外其它都一样，其中 2 个小球为红色，6 个小球为白色，随机地从袋中摸取一个小球是红球的概率为 $\frac{1}{4}$.

【分析】用红色小球的个数除以球的总个数即可得.

【解答】解：∵袋子中共有 8 个小球，其中红色小球有 2 个，

∴随机地从袋中摸取一个小球是红球的概率为 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ．

【点评】本题主要考查概率公式，解题的关键是掌握随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ ．

14. (4 分) 在一次有 12 人参加的测试中，得 100 分、95 分、90 分、85 分、75 分的人数分别是 1、4、3、2、2，那么这组数据的众数是 95 分．

【分析】根据众数的定义即众数是一组数据中出现次数最多的数据，即可得出答案．

【解答】解：∵95 分出现了 4 次，出现的次数最多，

∴这组数据的众数是 95 分；

故答案为：95．

【点评】此题考查了众数，熟练掌握众数的定义是解题的关键，众数是一组数据中出现次数最多的数．

15. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 3\sqrt{3}$ ，以点 A 为圆心作圆 A ，要使 B 、 C 两点中的一点在圆 A 外，另一点在圆 A 内，那么圆 A 的半径长 r 的取值范围是 $3 < r \leq 6$ ．

【分析】熟记“设点到圆心的距离为 d ，则当 $d = r$ 时，点在圆上；当 $d > r$ 时，点在圆外；当 $d < r$ 时，点在圆内”即可求解，

【解答】解：∵ $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 3\sqrt{3}$ ，

∴ $AB = 6$ ，

如果以点 A 为圆心作圆，使点 C 在圆 A 内，则 $r > 3$ ，

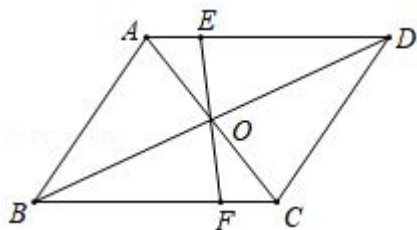
点 B 在圆 A 外，则 $r < 6$ ，

因而圆 A 半径 r 的取值范围为 $3 < r < 6$ ．

故答案为 $3 < r < 6$ ；

【点评】本题考查了对点与圆的位置关系的判断．设点到圆心的距离为 d ，则当 $d = r$ 时，点在圆上；当 $d > r$ 时，点在圆外；当 $d < r$ 时，点在圆内．

16. (4 分) 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ，过点 O 的线段 EF 与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F ，如果 $AB = 4$ ， $BC = 5$ ， $OE = \frac{3}{2}$ ，那么四边形 $EFCD$ 的周长为 12 ．



【分析】根据平行四边形的性质知， $AB = CD = 4$ ， $AD = BC = 5$ ， $AO = OC$ ， $\angle OAD = \angle OCF$ ， $\angle AOE$ 和 $\angle COF$ 是对顶角相等，根据全等三角形的性质得到 $OF = OE = 1.5$ ， $CF = AE$ ，所于是得到结论．

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 平行四边形，

$\therefore AB = CD = 4$ ， $AD = BC = 5$ ， $AO = OC$ ， $\angle OAD = \angle OCF$ ， $\angle AOE = \angle COF$ ，

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ (AAS)，

$\therefore OF = OE = 1.5$ ， $CF = AE$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 的周长 $= ED + CD + CF + OF + OE$

$= ED + AE + CD + OE + OF$

$= AD + CD + OE + OF$

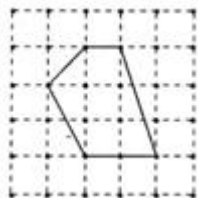
$= 4 + 5 + 1.5 + 1.5$

$= 12$ ．

故答案为：12．

【点评】本题利用了平行四边形的性质，由已知条件先证出 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$ ，再全等三角形的性质，转化边的关系后再求解．

17. (4分) 各顶点都在方格纸横竖格子线的交错点上的多边形称为格点多边形，奥地利数学家皮克 (G. Pick, 1859 ~ 1942 年) 证明了格点多边形的面积公式： $S = a + \frac{1}{2}b - 1$ ，其中 a 表示多边形内部的格点数， b 表示多边形边界上的格点数， S 表示多边形的面积．如图格点多边形的面积是 6 ．



【分析】分别统计出多边形内部的格点数 a 和边界上的格点数 b ，再代入公式 $S = a + \frac{1}{2}b - 1$ ，即可得出格点多边形的面积．

【解答】解： $\because a$ 表示多边形内部的格点数， b 表示多边形边界上的格点数， S 表示多边形

形的面积,

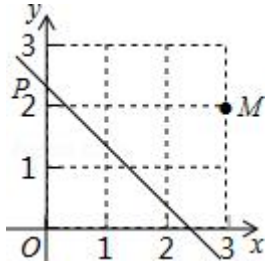
$$\therefore a = 4, b = 6,$$

$$\therefore \text{格点多边形的面积 } S = a + \frac{1}{2}b - 1 = 4 + \frac{1}{2} \times 6 - 1 = 6.$$

故答案为: 6.

【点评】 本题考查格点多边形面积的计算, 解题的关键是根据图形正确统计出 a, b 的值.

18. (4分) 如图, 点 M 的坐标为 $(3, 2)$, 点 P 从原点 O 出发, 以每秒 1 个单位的速度沿 y 轴向上移动, 同时过点 P 的直线 l 也随之上下平移, 且直线 l 与直线 $y = -x$ 平行, 如果点 M 关于直线 l 的对称点落在坐标轴上, 如果点 P 的移动时间为 t 秒, 那么 t 的值可以是 2 或 3 (答一个即可).



【分析】 找出点 M 关于直线 l 在坐标轴上的对称点 E, F , 如图所示. 求出点 E, F 的坐标, 然后分别求出 ME, MF 中点坐标, 最后分别求出时间 t 的值.

【解答】 解: 设直线 $l: y = -x + b$.

如图, 过点 M 作 $MF \perp$ 直线 l , 交 y 轴于点 F , 交 x 轴于点 E , 则点 E, F 为点 M 在坐标轴上的对称点.

过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D , 则 $OD = 3, MD = 2$.

由直线 $l: y = -x + b$ 可知 $\angle PDO = \angle OPD = 45^\circ$,

$\therefore \angle MED = \angle OEF = 45^\circ$, 则 $\triangle MDE$ 与 $\triangle OEF$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore DE = MD = 2, OE = OF = 1,$$

$$\therefore E(1, 0), F(0, -1).$$

$$\because M(3, 2), F(0, -1),$$

$$\therefore \text{线段 } MF \text{ 中点坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

直线 $y = -x + b$ 过点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则 $-\frac{3}{2} + b$, 解得: $b = 2$,

$$\therefore t = 2.$$

$$\because M(3, 2), E(1, 0),$$

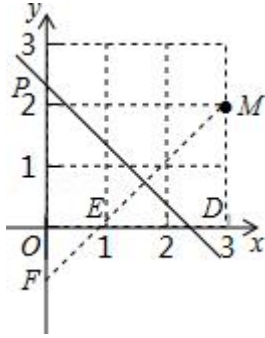
∴ 线段 ME 中点坐标为 $(2, 1)$.

直线 $y = -x + b$ 过点 $(2, 1)$, 则 $1 = -2 + b$, 解得: $b = 3$,

∴ $t = 3$.

故点 M 关于 l 的对称点, 当 $t = 2$ 时, 落在 y 轴上, 当 $t = 3$ 时, 落在 x 轴上.

故答案为: 2 或 3 (答一个即可).



【点评】 考查了一次函数的图象与几何变换. 注意在 x 轴、 y 轴上均有点 M 的对称点, 不要漏解; 其次注意点 E 、 F 坐标以及线段中点坐标的求法.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(-2018)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \frac{1}{2 + \tan 60^\circ} + \sqrt{(3 - \pi)^2}$.

【分析】 原式利用零指数幂、负整数指数幂法则, 特殊角的三角函数值, 以及二次根式性质计算即可求出值.

【解答】 解: 原式 $= 1 + 4 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \pi - 3 = \pi + \sqrt{3}$.

【点评】 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算是解本题的关键.

20. (10 分) 解方程: $\frac{16}{x^2 - 4} = \frac{x + 2}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}$.

【分析】 先把分式方程转化成整式方程, 求出方程的解, 再进行检验即可.

【解答】 解: 方程两边同乘以 $(x + 2)(x - 2)$ 得:

$$16 = (x + 2)^2 - (x - 2),$$

$$\text{整理得: } x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$\text{解此方程得: } x_1 = -5, x_2 = 2,$$

经检验 $x_1 = -5$ 是原方程的解, $x_2 = 2$ 是增根 (舍去),

所以原方程的解是: $x = -5$.

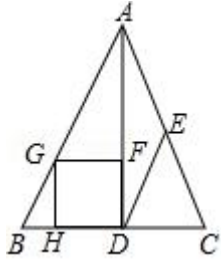
【点评】 本题考查了解分式方程, 能把分式方程转化成整式方程是解此题的关键.

21. (10 分) 如图已知: $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的高、 E 是边 AC 的中点, $BC = 11$, AD

$= 12$, $DFGH$ 为边长为 4 的正方形, 其中点 F 、 G 、 H 分别在 AD 、 AB 、 BC 上.

(1) 求 BD 的长度;

(2) 求 $\cos \angle EDC$ 的值.



【分析】 (1) 由四边形 $DFGH$ 为边长为 4 的正方形得 $\frac{GF}{BD} = \frac{AF}{AD}$, 将相关线段的长度代入计算可得;

(2) 先求出 CD 、 AC 的长, 再由 E 是边 AC 的中点知 $ED = EC$, 据此得 $\angle EDC = \angle ACD$, 再根据余弦函数的定义可得答案.

【解答】 解: (1) $\because$ 四边形 $DFGH$ 为边长为 4 的正方形, 且边长为 4,

$$\therefore GF \parallel BD, GF = DF = 4,$$

$$\therefore \frac{GF}{BD} = \frac{AF}{AD},$$

$$\because AD = 12,$$

$$\therefore AF = 8,$$

$$\text{则 } \frac{4}{BD} = \frac{8}{12},$$

$$\text{解得: } BD = 6;$$

$$(2) \because BC = 11, BD = 6,$$

$$\therefore CD = 5,$$

$$\text{在直角 } \triangle ADC \text{ 中, } AC^2 = AD^2 + DC^2,$$

$$\therefore AC = 13,$$

$$\because E \text{ 是边 } AC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore ED = EC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ACD,$$

$$\therefore \cos \angle EDC = \cos \angle ACD = \frac{5}{13}.$$

【点评】 本题主要考查正方形的性质, 解题的关键是掌握正方形的性质、勾股定理、三

角函数的应用及直角三角形的性质等.

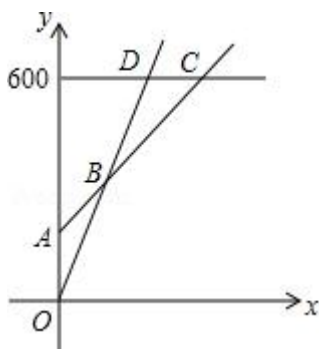
22. (10分) 某乒乓球馆普通票价 20 元/张, 暑假为了促销, 新推出两种优惠卡:

①金卡售价 600 元/张, 每次凭卡不再收费;

②银卡售价 150 元/张, 每次凭卡另收 10 元; 暑期普通票正常出售, 两种优惠卡仅限暑期使用, 不限次数. 设打乒乓 x 次时, 所需总费用为 y 元.

(1) 分别写出选择银卡、普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 在同一个坐标系中, 若三种消费方式对应的函数图象如图所示, 请根据函数图象, 写出选择哪种消费方式更合算.



【分析】(1) 根据题意可以直接写出选择银卡、普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 根据函数图象和(1)中的函数解析式可以分别求得普通票消费和银卡消费相等的情况, 银卡消费和金卡消费相等的情况, 再根据图象即可解答本题.

【解答】解: (1) 由题意可得,

选择银卡消费时, y 与 x 之间的函数关系式为: $y = 10x + 150$,

选择普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式为: $y = 20x$;

(2) 当 $10x + 150 = 20x$ 时, 得 $x = 15$,

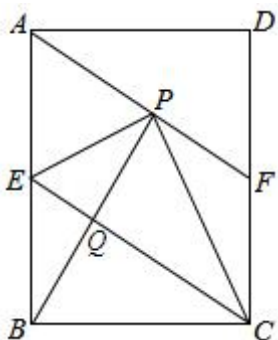
当 $10x + 150 = 600$ 时, 得 $x = 45$,

答: 当打球次数不足 15 次时, 选择普通票最合算, 当打球次数介于 15 次到 45 次之间时, 选择银卡最合算, 当打球次数超过 45 次时, 选择金卡最合算, 当打球次数恰为 15 次时, 选择普通票或银卡同为最合算, 当打球次数恰为 45 次时, 选择金卡或银卡同为最合算.

【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

23. (12分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AB 的中点, $\triangle EBC$ 沿直线 EC 翻折, 使 B 点落在矩形 $ABCD$ 内部的点 P 处, 联结 AP 并延长 AP 交 CD 于点 F , 联结 BP 交 CE 于点 Q .

(2) 如果 $PA = PE$, 求证: $\triangle APB \cong \triangle EPC$.



(2) 根据三角形 AEP 为等边三角形, 得到三条边相等, 三内角相等, 再由折叠的性质及邻补角定义得到一对角相等, 根据同角的余角相等得到一对角相等, 再由 $AP = EB$, 利用 AAS 即可得证.

设 EC 与 BP 交于 Q ,

$$\therefore BQ = EQ$$

$$\therefore AE = EB,$$
$$\therefore AF \parallel EC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形;

$$\therefore \angle APB = \angle EQB = 90^\circ \quad ,$$

$\because E$ 为直角 $\triangle APB$ 斜边 AB 的中点, 且 $AP = EP$,

$\therefore \triangle AEP$ 为等边三角形, $\angle BAP = \angle AEP = 60^\circ$,

$$\angle CEP = \angle CEB = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ,$$

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle EPC$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAP = \angle CEP \\ \angle APB = \angle EPC, \\ AP = EP \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle EPC$ (AAS).

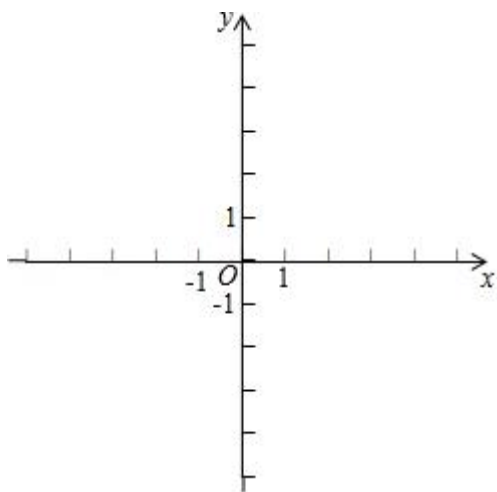
【点评】此题考查全等三角形的判定与性质, 折叠的性质, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解本题的关键.

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 抛物线 $y = mx^2 - 2x + n$ (m 、 n 是常数) 经过点 $A(-2, 3)$ 、 $B(-3, 0)$, 与 y 轴的交点为点 C .

(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 点 D 为 y 轴上一点, 如果直线 BD 和直线 BC 的夹角为 15° , 求线段 CD 的长度;

(3) 设点 P 为此抛物线的对称轴上的一个动点, 当 $\triangle BPC$ 为直角三角形时, 求点 P 的坐标.



【分析】(1) 将点 A 和点 B 坐标代入解析式求解可得;

(2) 先求出点 C 坐标, 从而得出 $OC = OB = 3$, $\angle CBO = 45^\circ$, 据此知 $\angle DBO = 30^\circ$ 或 60° , 依据 $DO = BO \cdot \tan \angle DBO$ 求出得 $DO = \sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$, 从而得出答案;

(3) 设 $P(-1, t)$, 知 $BC^2 = 18$, $PB^2 = 4 + t^2$, $PC^2 = t^2 - 6t + 10$, 再分点 B 、点 C 和点 P 为直角顶点三种情况分别求解可得.

【解答】解: (1) 依题意得:
$$\begin{cases} 4m + 4 + n = 3 \\ 9m + 6 + n = 0 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 与 y 轴交点为点 C ,

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0, 3)$,

又点 B 的坐标是 $(-3, 0)$,

$\therefore OC = OB = 3, \angle CBO = 45^\circ$,

$\therefore \angle DBO = 30^\circ$ 或 60° .

在直角 $\triangle BOD$ 中, $DO = BO \cdot \tan \angle DBO$,

$\therefore DO = \sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$,

$\therefore CD = 3 - \sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3} - 3$.

(3) 由抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 得: 对称轴是直线 $x = -1$,

根据题意: 设 $P(-1, t)$,

又点 C 的坐标是 $(0, 3)$, 点 B 的坐标是 $(-3, 0)$,

$\therefore BC^2 = 18, PB^2 = (-1+3)^2 + t^2 = 4 + t^2, PC^2 = (-1)^2 + (t-3)^2 = t^2 - 6t + 10$,

①若点 B 为直角顶点, 则 $BC^2 + PB^2 = PC^2$ 即: $18 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 10$, 解之得: $t = -2$,

②若点 C 为直角顶点, 则 $BC^2 + PC^2 = PB^2$ 即: $18 + t^2 - 6t + 10 = 4 + t^2$, 解之得: $t = 4$,

③若点 P 为直角顶点, 则 $PB^2 + PC^2 = BC^2$ 即: $4 + t^2 + t^2 - 6t + 10 = 18$, 解之得: $t_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$,

$t_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

综上所述 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(-1, 4)$ 或 $(-1, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ 或 $(-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$.

【点评】 本题是二次函数的综合问题, 解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、等腰三角形的性质、两点间的距离公式及直角三角形的性质等知识点.

25. (14分) 在圆 O 中, AB 是圆 O 的直径, $AB = 10$, 点 C 是圆 O 上一点 (与点 A 、 B 不重合), 点 M 是弦 BC 的中点.

(1) 如图 1, 如果 AM 交 OC 于点 E , 求 $OE:CE$ 的值;

(2) 如图 2, 如果 $AM \perp OC$ 于点 E , 求 $\sin \angle ABC$ 的值;

(3) 如图 3, 如果 $AB:BC = 5:4$, 点 D 为弦 BC 上一动点, 过点 D 作 $DF \perp OC$, 交半径 OC 于点 H , 与射线 BO 交于圆内点 F . 探究一: 如果设 $BD = x$, $FO = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域; 探究二: 如果以点 O 为圆心, OF 为半径的圆经过点 D , 直接写出此时 BD 的长度; 请你完成上述两个探究.

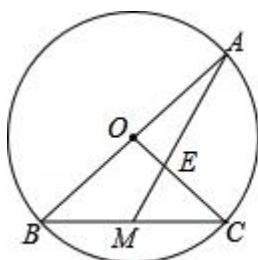


图1

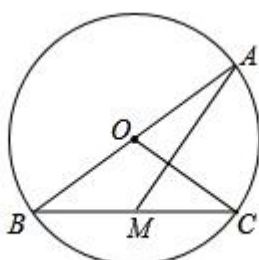


图2

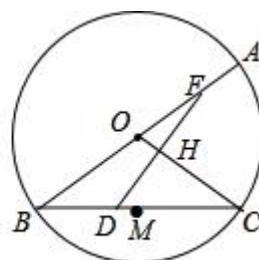


图3

【分析】(1) 如图 1, 过点 O 作 $ON \parallel BC$ 交 AM 于点 N , 根据三角形的中位线的性质得到 $ON = \frac{1}{2}BM$, 根据平行线分线段成比例定理即可得到结论;

(2) 如图 1, 连接 OM , 根据垂径定理得到 $OM \perp BC$, 根据余角的性质得到 $\angle OME = \angle MCE$, 根据相似三角形的性质得到 $ME^2 = OE \cdot CE$, 设 $OE = x$, 则 $CE = 2x$, $ME = \sqrt{2}x$, 解直角三角形即可得到结论;

(3) 探究一: 如图 2, 过点 D 作 $DL \perp DF$ 交 BO 于点 L , 根据平行线的性质得到 $\angle LDB = \angle C = \angle B$, 根据等腰三角形的判定定理得到 $BL = DL$, 设 $BD = x$, 则 $CD = 8 - x$, $BL = DL = \frac{5}{8}x$, $CH = \frac{4}{5}(8 - x)$, $OH = OC - CH = 5 - \frac{4}{5}(8 - x)$, 根据平行线成线段成比例定理得到 $y = \frac{20x - 35}{7}$ (其中 $\frac{7}{4} \leq x < \frac{7}{2}$);

探究二: 根据题意得到 $OF = OD$, 根据等腰三角形的性质得到 $DF \perp OC$, 根据直角三角形的性质得到 $FO = OL$, 列方程即可得到结论.

【解答】解: (1) 过点 O 作 $ON \parallel BC$ 交 AM 于点 N , 如图 1

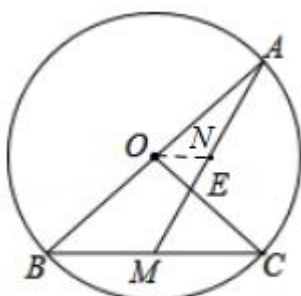


图1

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{ON}{BM}, \frac{ON}{MC} = \frac{OE}{CE},$$

$$\because AO = BO = \frac{1}{2}AB$$

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{ON}{BM} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 点 M 是弦 BC 的中点 $\therefore BM = MC$

$$\therefore \frac{OE}{CE} = \frac{ON}{BM},$$

$$\therefore OE:CE = 1:2;$$

(2) 联结 OM , 如图 2

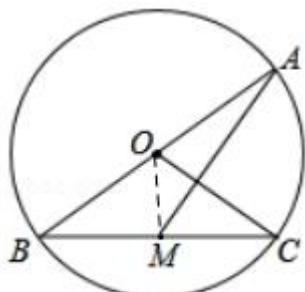


图2

$\because$ 点 M 是弦 BC 的中点, OM 经过圆心 O

$$\therefore OM \perp BC, \angle OMC = 90^\circ,$$

$$\because AM \perp OC, \therefore \angle MEO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OMC = \angle MEO = 90^\circ \text{ 又 } \angle MOC = \angle EOM$$

$$\therefore \triangle MOC \sim \triangle EOM;$$

$$\therefore \frac{OM}{OE} = \frac{OC}{OM},$$

$$\therefore OE:CE = 1:2$$

$$\therefore OM = \frac{\sqrt{3}}{3} OC,$$

$$\because OB = OC$$

$$\therefore \angle ABC = \angle OCM$$

$$\text{在直角 } \triangle MOC \text{ 中, } \sin \angle OCM = \frac{OM}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

(3) 探究一: 如图 3, 过点 D 作 $DL \perp DF$ 交 BO 于点 L , 取 BC 中点 M , 连接 OM

$\therefore OC$ 垂直平分 DF , $FO = OL$,

$$\therefore y = 5 - \frac{5}{8}x,$$

$$\therefore \frac{20}{7}x - 5 = 5 - \frac{5}{8}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{112}{39},$$

$$\therefore BD = \frac{112}{39}.$$

【点评】 本题考查了垂径定理，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，解直角三角形，正确的作出辅助线是解题的关键．