

2019 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）如果两个相似三角形对应边的比为 4：5，那么它们对应中线的比是（ ）

- A. $2:\sqrt{5}$ B. 2: 5 C. 4: 5 D. 16: 25

2.（4 分）已知，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

3.（4 分）在平面直角坐标系中，如果把抛物线 $y = -2x^2$ 向上平移 1 个单位，那么得到的抛物线的表达式是（ ）

- A. $y = -2(x+1)^2$ B. $y = -2(x-1)^2$ C. $y = -2x^2+1$ D. $y = -2x^2-1$

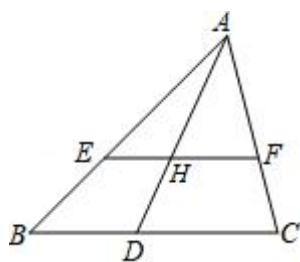
4.（4 分）已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量. 下列条件中，不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是（ ）

- A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ B. $\vec{a} = 3\vec{b}$ C. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$ D. $\vec{a} = 2\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$

5.（4 分）已知某条传送带和地面所成斜坡的坡度为 1：2，如果它把一物体从地面送到离地面 9 米高的地方，那么该物体所经过的路程是（ ）

- A. 18 米 B. 4.5 米 C. $9\sqrt{3}$ 米 D. $9\sqrt{5}$ 米.

6.（4 分）如图，已知点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点，且 $EF \parallel BC$ ，点 D 是 BC 边上的点， AD 与 EF 交于点 H ，则下列结论中，错误的是（ ）



- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{HF}$ C. $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ D. $\frac{AE}{AB} = \frac{HF}{CD}$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如果线段 $a = 4$ 厘米， $c = 9$ 厘米，那么线段 a 、 c 的比例中项 $b =$ _____ 厘米.

8.（4 分）如果向量 $\vec{c}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且长度为 2，那么向量 $\vec{c} =$ _____（用单位向量 $\vec{e}$ 表示）.

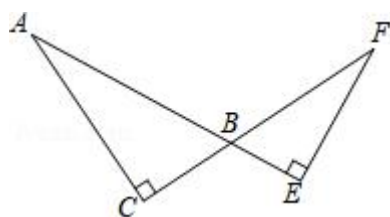
9. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 6$, $\cos B = \frac{2}{3}$, 则 BC 的长为_____.

10. (4分) 已知两个三角形相似, 如果其中一个三角形的两个内角分别是 45° 、 60° , 那么另外一个三角形的最大内角是_____°.

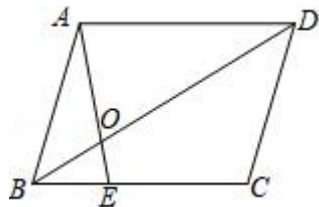
11. (4分) 抛物线 $y = x^2 - 4x + 8$ 的顶点坐标是_____.

12. (4分) 如果点 $A(-1, m)$ 、 $B(\frac{1}{2}, n)$ 是抛物线 $y = -(x-1)^2 + 3$ 上的两个点, 那么 m 和 n 的大小关系是 m _____ n (填 “>” 或 “<” 或 “=”).

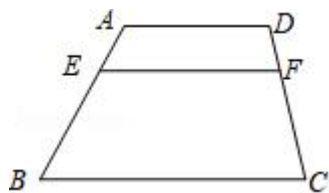
13. (4分) 如图, 已知 AE 与 CF 相交于点 B , $\angle C = \angle E = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, $BE = 2$, 则 $BF =$ _____.



14. (4分) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是 BC 边上的点, $BE:EC = 1:2$, AE 与 BD 交于点 O , 如果 $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AO} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



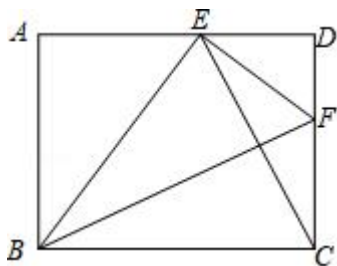
15. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别是腰 AB 、 CD 上的点, $AD \parallel EF \parallel BC$, 如果 $AD:EF:BC = 5:6:9$, 那么 $\frac{AE}{EB} =$ _____.



16. (4分) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 如果 $\cos C = \frac{1}{4}$, 那么 $\tan A =$ _____.

17. (4分) 已知抛物线 $y = (x+1)^2 + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, $AB = 4$, 点 C 是抛物线上一点, 如果线段 AC 被 y 轴平分, 那么点 C 的坐标为_____.

18. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AD 上的点, $EF \perp BE$, 交边 CD 于点 F , 联结 CE 、 BF , 如果 $\tan \angle ABE = \frac{3}{4}$, 那么 $CE:BF =$ _____.



三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $2\cos^2 45^\circ + \frac{\tan 60^\circ}{\cot 45^\circ + \cos 30^\circ} - \tan 45^\circ$.

20. (10 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表：

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$-\frac{5}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	...

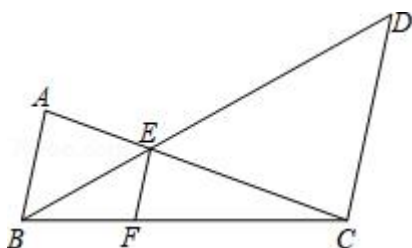
(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 已知点 $E(4, y)$ 是该抛物线上的点，点 E 关于抛物线的对称轴对称的点为点 F ，求点 E 和点 F 的坐标.

21. (10 分) 如图, 已知 $AB \parallel CD$, AC 与 BD 相交于点 E , 点 F 在线段 BC 上, $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$, $\frac{BF}{CF} = \frac{1}{2}$.

(1) 求证: $AB \parallel EF$;

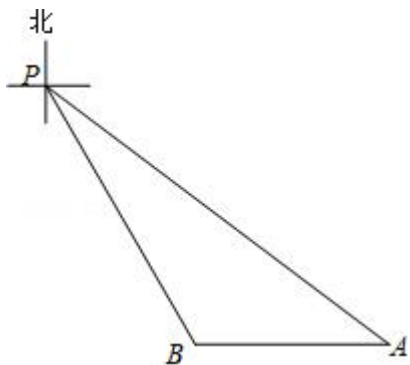
(2) 求 $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle EBC} : S_{\triangle ECD}$.



22. (10 分) 如图, P 点是某海域内的一座灯塔的位置, 船 A 停泊在灯塔 P 的南偏东 53° 方向的 50 海里处, 船 B 位于船 A 的正西方向且与灯塔 P 相距 $20\sqrt{3}$ 海里. (本题参考数据 $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$.)

(1) 试问船 B 在灯塔 P 的什么方向?

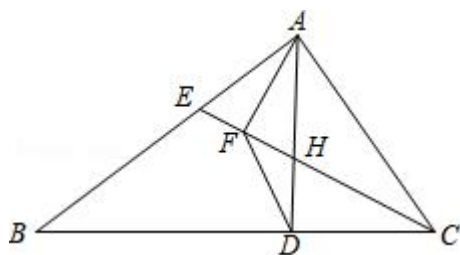
(2) 求两船相距多少海里? (结果保留根号)



23. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle CAD = \angle B$, 点 E 在边 AB 上, 联结 CE 交 AD 于点 H , 点 F 在 CE 上, 且满足 $CF \cdot CE = CD \cdot BC$.

(1) 求证: $\triangle ACF \sim \triangle ECA$;

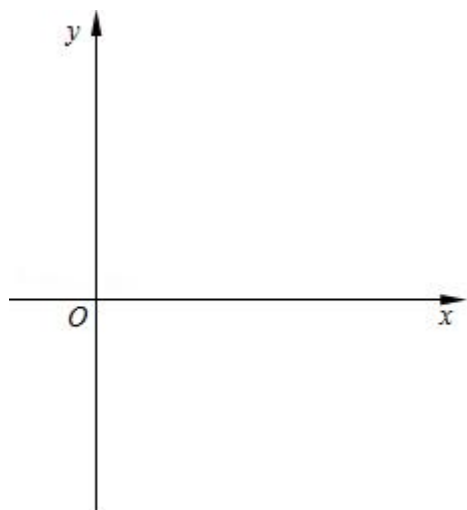
(2) 当 CE 平分 $\angle ACB$ 时, 求证: $\frac{S_{\triangle CDH}}{S_{\triangle CAE}} = \frac{CD}{BC}$.



24. (12分) 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 抛物线的顶点为点 D , 对称轴为直线 $x = 1$, 交 x 轴于点 E , $\tan \angle BDE = \frac{1}{2}$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若点 P 是对称轴上一点, 且 $\angle DCP = \angle BDE$, 求点 P 的坐标.

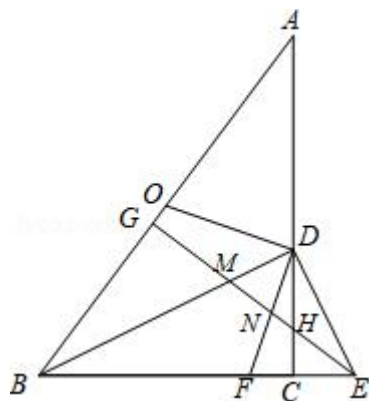


25. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, 点 O 是 AB 的中点, 点 D 是边 AC 上一点, $DE \perp BD$, 交 BC 的延长线于点 E , $OD \perp DF$, 交 BC 边于点 F , 过点 E 作 $EG \perp AB$, 垂足为点 G , EG 分别交 BD 、 DF 、 DC 于点 M 、 N 、 H .

(1) 求证: $\frac{DE}{DB} = \frac{NE}{OB}$;

(2) 设 $CD = x$, $NE = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域;

(3) 当 $\triangle DEF$ 是以 DE 为腰的等腰三角形时, 求线段 CD 的长.



2019 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）如果两个相似三角形对应边的比为 4：5，那么它们对应中线的比是（ ）

- A. $2:\sqrt{5}$ B. 2：5 C. 4：5 D. 16：25

【分析】根据相似三角形对应中线的比等于相似比解答.

【解答】解： $\because$ 两个相似三角形对应边的比为 4：5，

$\therefore$ 它们对应中线的比为 4：5，

故选：C.

【点评】本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形对应中线的比等于相似比是解题的关键.

2.（4 分）已知，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【分析】根据勾股定理，可得 AB 的长，根据角的正弦，等于角的对边比斜边，可得答案.

【解答】解：由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

故选：D.

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义，先求出斜边，再求出正弦值.

3.（4 分）在平面直角坐标系中，如果把抛物线 $y = -2x^2$ 向上平移 1 个单位，那么得到的抛物线的表达式是（ ）

- A. $y = -2(x+1)^2$ B. $y = -2(x-1)^2$ C. $y = -2x^2+1$ D. $y = -2x^2-1$

【分析】直接利用二次函数平移规律进而得出答案.

【解答】解：把抛物线 $y = -2x^2$ 向上平移 1 个单位，则得到的抛物线的表达式是： $y = -2x^2+1$.

故选：C.

【点评】此题主要考查了二次函数图象与几何变换，正确得出平移规律是解题关键.

4. (4分) 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量. 下列条件中, 不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

- A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ B. $\vec{a} = 3\vec{b}$ C. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$ D. $\vec{a} = 2\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$

【分析】根据平行向量的定义 (两个向量方向相同或相反, 即为平行向量) 分析求解即可求得答案.

【解答】解: A、 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 只能说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模相等, 不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项符合题意.

B、 $\vec{a} = 3\vec{b}$ 说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同, 能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项不符合题意.

C、 $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, 能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项不符合题意.

D、 $\vec{a} = 2\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$ 说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反, 能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项不符合题意.

故选: A.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握平行向量与向量的模的定义是解此题的关键.

5. (4分) 已知某条传送带和地面所成斜坡的坡度为 1:2, 如果它把一物体从地面送到离地面 9 米高的地方, 那么该物体所经过的路程是 ()

- A. 18 米 B. 4.5 米 C. $9\sqrt{3}$ 米 D. $9\sqrt{5}$ 米.

【分析】首先根据题意画出图形, 根据坡度的定义, 由勾股定理即可求得答案.

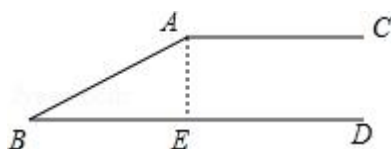
【解答】解: 如图: 由题意得: 斜坡 AB 的坡度: $i = 1:2$, $AE = 9$ 米, $AE \perp BD$,

$$\therefore i = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BE = 18 \text{ 米},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 9\sqrt{5} \text{ (米)}.$$

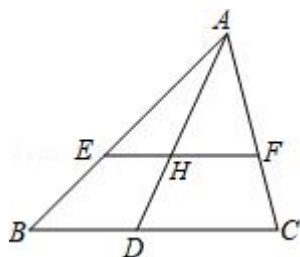
故选: D.



【点评】此题考查了坡度坡角问题. 此题比较简单, 注意掌握数形结合思想的应用, 注意理解坡度的定义.

6. (4分) 如图, 已知点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点, 且 $EF \parallel BC$, 点 D 是 BC

边上的点， AD 与 EF 交于点 H ，则下列结论中，错误的是（ ）



- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{HF}$ C. $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ D. $\frac{AE}{AB} = \frac{HF}{CD}$

【分析】利用平行线分线段成比例定理即可一一判断.

【解答】解：∵ $EF \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}, \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}, \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{FH}{CD},$$

∴ 选项 A, C, D 正确,

故选: B.

【点评】本题考查平行线分线段成比例定理, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果线段 $a = 4$ 厘米, $c = 9$ 厘米, 那么线段 a 、 c 的比例中项 $b = \underline{6}$ 厘米.

【分析】根据比例中项的定义得到 $a : b = b : c$, 然后利用比例性质计算即可.

【解答】解: ∵ 线段 a 和 c 的比例中项为 b ,

$$\therefore a : b = b : c,$$

$$\text{即 } 4 : b = b : 9,$$

$$\therefore b = \pm 6 \text{ (负值舍去)}.$$

故答案为: 6.

【点评】本题考查了比例线段: 对于四条线段 a 、 b 、 c 、 d , 如果其中两条线段的比 (即它们的长度比) 与另两条线段的比相等, 如 $a : b = c : d$ (即 $ad = bc$), 我们就说这四条线段是成比例线段, 简称比例线段. 判定四条线段是否成比例, 只要把四条线段按大小顺序排列好, 判断前两条线段之比与后两条线段之比是否相等即可.

8. (4 分) 如果向量 $\vec{c}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且长度为 2, 那么向量 $\vec{c} = \underline{-2\vec{e}}$ (用单位向量 $\vec{e}$ 表示).

【分析】根据向量的表示方法可直接进行解答.

【解答】解：∵ $\vec{c}$ 的长度为 2，向量 $\vec{e}$ 是单位向量，

$$\therefore a = 2e,$$

∵ $\vec{c}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反，

$$\therefore \vec{c} = -2\vec{e}.$$

故答案为： $-2\vec{e}$.

【点评】 本题考查的是平面向量的知识，即长度不为 0 的向量叫做非零向量，向量包括长度及方向，而长度等于 1 个单位长度的向量叫做单位向量，注意单位向量只规定大小没规定方向.

9. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $\cos B = \frac{2}{3}$ ， 则 BC 的长为 4 .

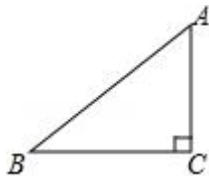
【分析】 根据题意画出图形，进而利用锐角三角函数关系得出答案.

【解答】 解： 如图所示： ∵ $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $\cos B = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{6} = \frac{2}{3},$$

解得： $BC = 4$.

故答案为： 4 .



【点评】 此题主要考查了锐角三角函数关系，正确记忆边角关系是解题关键.

10. (4 分) 已知两个三角形相似，如果其中一个三角形的两个内角分别是 45° 、 60° ，那么另外一个三角形的最大内角是 75° .

【分析】 根据三角形内角和定理，相似三角形的性质定理计算即可.

【解答】 解： 由三角形内角和定理可知，两个内角分别是 45° 、 60° 的三角形的第三个内角为： $180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ ，

∵ 两个三角形相似，

∴ 另外一个三角形的最大内角是 75° ，

故答案为： 75 .

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质，三角形内角和定理，掌握相似三角形的对应

角相等是解题的关键.

11. (4分) 抛物线 $y = x^2 - 4x + 8$ 的顶点坐标是 (2, 4).

【分析】用配方法将抛物线的一般式转化为顶点式, 可求顶点坐标.

【解答】解: $\because y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$,

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 (2, 4).

故答案为 (2, 4).

【点评】此题主要考查了配方法求二次函数顶点坐标, 注意将解析式化为顶点式 $y = a(x - h)^2 + k$, 顶点坐标是 (h, k) , 对称轴是 $x = h$.

12. (4分) 如果点 $A(-1, m)$ 、 $B(\frac{1}{2}, n)$ 是抛物线 $y = -(x - 1)^2 + 3$ 上的两个点, 那么 m 和 n 的大小关系是 m < n (填 “>” 或 “<” 或 “=”).

【分析】利用二次函数的性质得到当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 然后利用自变量的大小关系得到 m 与 n 的大小关系.

【解答】解: 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

而抛物线开口向下,

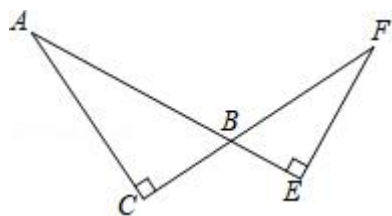
所以当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

所以 $m < n$.

故答案为 <.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了二次函数的性质.

13. (4分) 如图, 已知 AE 与 CF 相交于点 B , $\angle C = \angle E = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, $BE = 2$, 则 $BF = \frac{10}{3}$.



【分析】三心两意勾股定理求出 AB , 由 $\triangle ABC \sim \triangle FBE$, 可得 $\frac{AB}{BF} = \frac{CB}{BE}$, 由此即可解决问题;

【解答】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because AC = 4$, $BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\because \angle C = \angle E = 90^\circ, \quad \angle ABC = \angle FBE,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FBE,$$

$$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{CB}{BE},$$

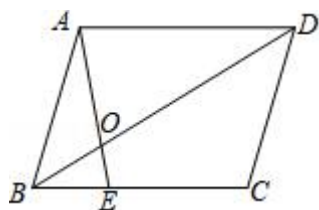
$$\therefore \frac{5}{BF} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BF = \frac{10}{3},$$

$$\text{故答案为 } \frac{10}{3}.$$

【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型。

14. (4分) 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 边上的点， $BE:EC=1:2$ ， AE 与 BD 交于点 O ，如果 $\overrightarrow{BE}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}(\vec{a}-\vec{b})$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)。



【分析】由平行四边形的性质得到 $AD \parallel BC$ ，然后结合平行线截线段成比例求得 $AO = \frac{2}{3}AE$ ，所以由三角形法则解答即可。

【解答】解： $\because \overrightarrow{BE}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ ，

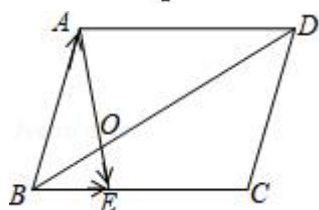
$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}.$$

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $BE:EC=1:2$ ，

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{3}.$$

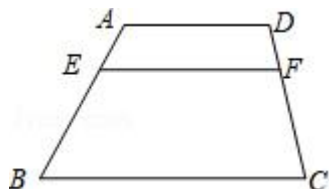
$$\therefore AO = \frac{3}{4}AE = \frac{3}{4}(\vec{a} - \vec{b}).$$

$$\text{故答案是: } \frac{3}{4}(\vec{a} - \vec{b}).$$



【点评】考查了平面向量和平行四边形的性质，解题时，需要熟练掌握向量的三角形法则，注意向量是有方向的．

15. (4分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别是腰 AB 、 CD 上的点， $AD \parallel EF \parallel BC$ ，如果 $AD:EF:BC = 5:6:9$ ，那么 $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ．



【分析】延长 BA ， CD 交于 G ，根据已知条件推出 $\triangle GAD \sim \triangle GEF$ ， $\triangle GEF \sim \triangle GAB$ ，根据相似三角形的性质得到 $\frac{AG}{GE} = \frac{AD}{EF} = \frac{5}{6}$ ， $\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{BC} = \frac{5}{9}$ ，设 $AG = 5k$ ， $EG = 6k$ ， $BG = 9k$ ，求得 $AE = k$ ， $BE = 9k - 6k = 3k$ ，于是得到结论．

【解答】解：延长 BA ， CD 交于 G ，

$\because AD \parallel EF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle GAD \sim \triangle GEF$ ， $\triangle GEF \sim \triangle GAB$ ，

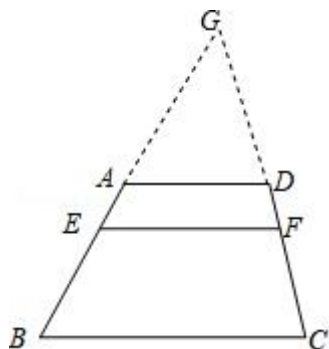
$$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{AD}{EF} = \frac{5}{6}, \quad \frac{AG}{GB} = \frac{AD}{BC} = \frac{5}{9},$$

$\therefore$ 设 $AG = 5k$ ， $EG = 6k$ ， $BG = 9k$ ，

$\therefore AE = k$ ， $BE = 9k - 6k = 3k$ ，

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$ ．



【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，正确的作出辅助线构造相似三角形是解题的关键．

16. (4分) 在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，如果 $\cos C = \frac{1}{4}$ ，那么 $\tan A = \frac{\sqrt{15}}{7}$ ．

【分析】过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D , 由于 $\cos C = \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{4}$,

$\frac{CE}{AC} = \frac{1}{4}$, 设 $CD = x$, $BC = 4x$, 根据勾股定理以及锐角三角函数的定义可求出 BD 与 AD

的长度.

【解答】解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ,

$$\because \cos C = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{1}{4}, \quad \frac{CE}{AC} = \frac{1}{4},$$

设 $CD = x$, $BC = 4x$,

由于 $AB = AC$,

$$\therefore CE = 2x,$$

$$\therefore AC = 8x,$$

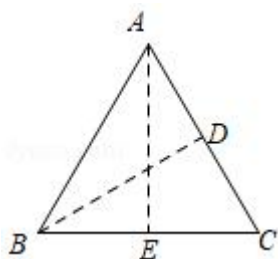
$$\therefore AD = AC - CD = 7x,$$

$$\therefore \text{由勾股定理可知: } BD = \sqrt{15}x,$$

$$\therefore AB = AC = 8x,$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{15}}{7},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{15}}{7}$.



【点评】本题考查解直角三角形, 涉及勾股定理以及锐角三角函数的定义, 需要学生灵活运用所学知识.

17. (4分) 已知抛物线 $y = (x+1)^2 + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, $AB = 4$, 点 C 是抛物线上一点, 如果线段 AC 被 y 轴平分, 那么点 C 的坐标为 $(3, 12)$ 或 $(-1, -4)$.

【分析】根据题目中的函数解析式可以得到该函数的对称轴, 然后根据抛物线 $y = (x+1)^2 + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, $AB = 4$, 即可求得点 A 和点 B 的坐标, 再根据点 C 是抛物线上一点, 线段 AC 被 y 轴平分, 即可求得点 C 的坐标.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y = (x+1)^2 + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, $AB = 4$,

∴该抛物线的对称轴是直线 $x = -1$,

∴点 A 的坐标为 $(-3, 0)$, 点 B 的坐标为 $(1, 0)$ 或点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 B 的坐标为 $(-3, 0)$,

当点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ 时, $0 = (-3+1)^2 + k$, 得 $k = -4$,

∵线段 AC 被 y 轴平分, 点 C 是抛物线上一点,

∴点 C 的横坐标为 3 , 纵坐标为: $(3+1)^2 - 4 = 12$,

即点 C 的坐标为 $(3, 12)$;

当点 A 的坐标为 $(1, 0)$ 时, $0 = (1+1)^2 + k$, 得 $k = -4$,

∵线段 AC 被 y 轴平分, 点 C 是抛物线上一点,

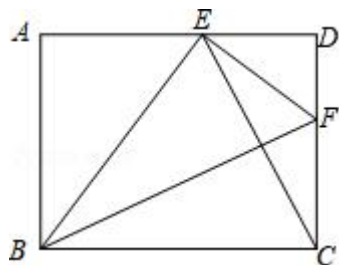
∴点 C 的横坐标为 -1 , 纵坐标为: $(-1+1)^2 - 4 = -4$,

即点 C 的坐标为 $(-1, -4)$;

故答案为: $(3, 12)$ 或 $(-1, -4)$.

【点评】 本题考查抛物线与 x 轴的交点, 二次函数图象上点的坐标特征, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答, 注意点 A 有两种情况.

18. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AD 上的点, $EF \perp BE$, 交边 CD 于点 F , 联结 CE 、 BF , 如果 $\tan \angle ABE = \frac{3}{4}$, 那么 $CE:BF = \underline{4:5}$.



【分析】 首先证明 B, C, F, E 四点共圆, 推出 $\angle EBF = \angle ECF$, 推出 $\triangle BEF \sim \triangle CDE$, 可得 $\frac{CE}{BF} = \frac{DE}{EF}$, 再证明 $\angle DEF = \angle ABE$, 推出 $\tan \angle ABE = \tan \angle DEF = \frac{3}{4} = \frac{DF}{DE}$, 设 $DF = 3k$, $DE = 4k$, 可得 $EF = 5k$, 由此即可解决问题.

【解答】 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle A = \angle D = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \perp BE,$$

$$\therefore \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF + \angle BCF = 180^\circ,$$

$\therefore B, C, F, E$ 四点共圆,

$\therefore \angle EBF = \angle ECF, \because \angle BEF = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BEF \sim \triangle CDE$,

$$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{DE}{EF},$$

$\because \angle ABE + \angle AEB = 90^\circ, \angle AEB + \angle DEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEF = \angle ABE$,

$$\therefore \tan \angle ABE = \tan \angle DEF = \frac{3}{4} = \frac{DF}{DE},$$

设 $DF = 3k, DE = 4k$,

$\therefore EF = 5k$,

$$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5},$$

故答案为: 4: 5.

【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质, 矩形的性质, 解直角三角形, 四点共圆等知识, 解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题, 学会利用参数解决问题.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $2\cos^2 45^\circ + \frac{\tan 60^\circ}{\cot 45^\circ + \cos 30^\circ} - \tan 45^\circ$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入进而得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} - 1 \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})} - 1 \\ &= 4\sqrt{3} - 6. \end{aligned}$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值, 正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$-\frac{5}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	...

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 已知点 $E(4, y)$ 是该抛物线上的点, 点 E 关于抛物线的对称轴对称的点为点 F , 求点 E 和点 F 的坐标.

【分析】(1) 利用抛物线的对称性得到抛物线的顶点坐标为 $(-1, -\frac{9}{2})$, 则可设顶点式 $y = a(x+1)^2 - \frac{9}{2}$, 然后把 $(0, -4)$ 代入求出 a 即可;

(2) 计算当 $x = 4$ 时对应的函数值得到 E 点坐标, 然后利用对称的性质确定点 F 的坐标.

【解答】解: (1) $\because x = -2, y = -4; x = 0, y = -4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 则抛物线的顶点坐标为 $(-1, -\frac{9}{2})$,

设抛物线解析式为 $y = a(x+1)^2 - \frac{9}{2}$,

把 $(0, -4)$ 代入得 $a(0+1)^2 - \frac{9}{2} = -4$, 解得 $a = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2}$;

(2) 当 $x = 4$ 时, $y = \frac{1}{2}(4+1)^2 - \frac{9}{2} = 8$, 则 E 点坐标为 $(4, 8)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$

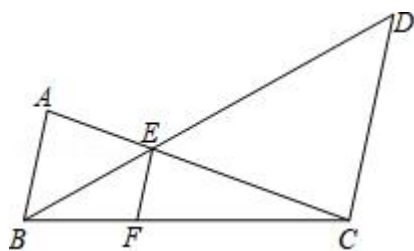
$\therefore$ 点 E 关于抛物线的对称轴对称的点 F 的坐标为 $(-6, 8)$.

【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式: 在利用待定系数法求二次函数关系式时, 要根据题目给定的条件, 选择恰当的方法设出关系式, 从而代入数值求解. 一般地, 当已知抛物线上三点时, 常选择一般式, 用待定系数法列三元一次方程组来求解; 当已知抛物线的顶点或对称轴时, 常设其解析式为顶点式来求解; 当已知抛物线与 x 轴有两个交点时, 可选择设其解析式为交点式来求解.

21. (10分) 如图, 已知 $AB \parallel CD$, AC 与 BD 相交于点 E , 点 F 在线段 BC 上, $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}, \frac{BF}{CF} = \frac{1}{2}$.

(1) 求证: $AB \parallel EF$;

(2) 求 $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle EBC} : S_{\triangle ECD}$.



【分析】(1) 只要证明 $\frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$, 即可推出 $EF \parallel CD$ 解决问题;

(2) 设 $\triangle ABE$ 的面积为 m . 利用相似三角形的性质, 等高模型求出 $\triangle BCE$, $\triangle ECD$ 的面

积即可解决问题；

【解答】（1）证明：∵ $AB \parallel CD$,

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FC},$$

$$\therefore EF \parallel CD,$$

$$\therefore AB \parallel EF.$$

（2）解：设 $\triangle ABE$ 的面积为 m .

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle EDC}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = 4m,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BEC} = 2m,$$

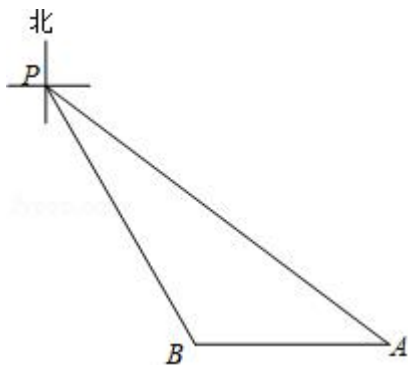
$$\therefore S_{\triangle ABE} : S_{\triangle EBC} : S_{\triangle EDC} = m : 2m : 4m = 1 : 2 : 4.$$

【点评】 本题考查平行线的判定和性质，相似三角形的判定和性质，等高模型等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，学会利用参数解决问题，属于中考常考题型.

- 22.（10分）如图， P 点是某海域内的一座灯塔的位置，船 A 停泊在灯塔 P 的南偏东 53° 方向的 50 海里处，船 B 位于船 A 的正西方向且与灯塔 P 相距 $20\sqrt{3}$ 海里.（本题参考数据 $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$ ）

（1）试问船 B 在灯塔 P 的什么方向？

（2）求两船相距多少海里？（结果保留根号）



【分析】(1) 过 P 作 $PC \perp AB$ 交 AB 于 C ，根据三角函数的定义即可得到结论；

(2) 根据三角函数的定义得到 $AC = AP \cdot \sin 53^\circ = 50 \times 0.8 = 40$ 海里， $BC = \frac{1}{2}PB = 10\sqrt{3}$ ，

于是得到结论．

【解答】解：(1) 过 P 作 $PC \perp AB$ 交 AB 于 C ，

在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle APC = 53^\circ$ ， $AP = 50$ 海里，

$\therefore PC = AP \cdot \cos 53^\circ = 50 \times 0.60 = 30$ 海里，

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中， $\because PB = 20\sqrt{3}$ ， $PC = 30$ ，

$\therefore \cos \angle BPC = \frac{PC}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore \angle BPC = 30^\circ$ ，

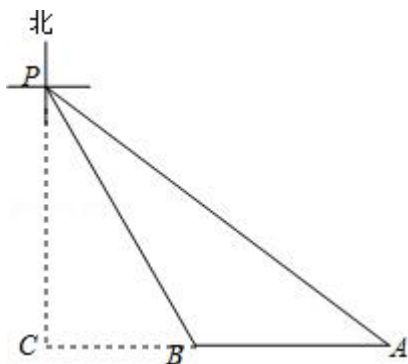
$\therefore$ 船 B 在灯塔 P 的南偏东 30° 的方向上；

(2) $\because AC = AP \cdot \sin 53^\circ = 50 \times 0.8 = 40$ 海里，

$BC = \frac{1}{2}PB = 10\sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = AC - BC = (40 - 10\sqrt{3})$ 海里，

答：两船相距 $(40 - 10\sqrt{3})$ 海里．



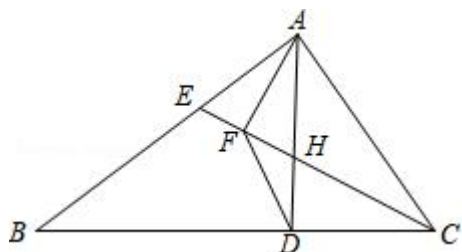
【点评】本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是理解方位角的定义，能利用三角函数值计算有关线段，难度一般．

23. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $\angle CAD = \angle B$ ，点 E 在边 AB 上，联结

CE 交 AD 于点 H , 点 F 在 CE 上, 且满足 $CF \cdot CE = CD \cdot BC$.

(1) 求证: $\triangle ACF \sim \triangle ECA$;

(2) 当 CE 平分 $\angle ACB$ 时, 求证: $\frac{S_{\triangle CDH}}{S_{\triangle CAE}} = \frac{CD}{BC}$.



【分析】(1) 根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$, 求得 $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$, 得到 AC^2

$= CD \cdot BC$, 等量代换得到 $AC^2 = CF \cdot CE$, 于是得到结论;

(2) 根据相似三角形的性质得到 $\angle CAE = \angle AFC$, 根据角平分线定义得到 $\angle ACE = \angle DCH$, 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】(1) 证明: $\because \angle ACD = \angle BCA, \angle CAD = \angle B$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA$,

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = CD \cdot BC,$$

$$\because CF \cdot CE = CD \cdot BC,$$

$$\therefore AC^2 = CF \cdot CE,$$

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{CF}{AC},$$

$$\because \angle ACF = \angle ECA,$$

$$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ECA;$$

(2) 证明: $\because CF \cdot CE = CD \cdot BC$,

$$\therefore \frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CB},$$

$$\because \angle DCF = \angle ECB,$$

$$\therefore \triangle CFD \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle B,$$

$$\because \angle CAD = \angle B,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle CAD,$$

$\therefore A, F, D, C$ 四点共圆,

$\therefore \angle AFC = \angle ADC,$

$\because \triangle ACF \sim \triangle ECA,$

$\therefore \angle CAE = \angle AFC,$

$\therefore \angle CAE = \angle ADC,$

$\because$ 当 CE 平分 $\angle ACB,$

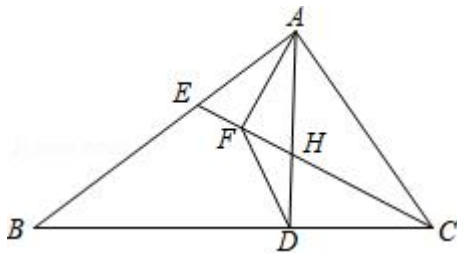
$\therefore \angle ACE = \angle DCH,$

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle DCH,$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDH}}{S_{\triangle CAE}} = \left(\frac{CD}{AC} \right)^2 = \frac{CD^2}{AC^2},$$

$\because AC^2 = CD \cdot BC,$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDH}}{S_{\triangle CAE}} = \frac{CD}{BC}.$$

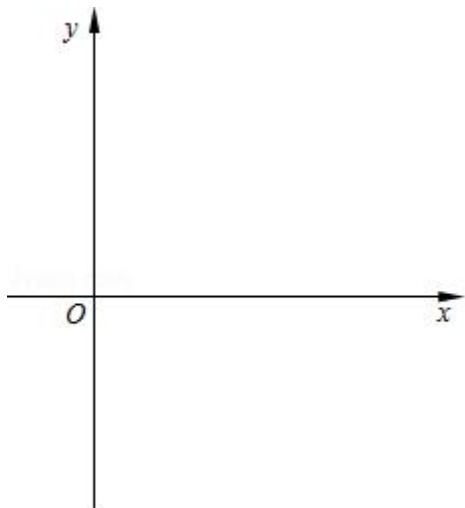


【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，角平分线的定义，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键．

24. (12 分) 在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，抛物线的顶点为点 D ，对称轴为直线 $x = 1$ ，交 x 轴于点 E ， $\tan \angle BDE = \frac{1}{2}$ ．

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 若点 P 是对称轴上一点，且 $\angle DCP = \angle BDE$ ，求点 P 的坐标．



【分析】(1) 由点 A 的坐标及抛物线的对称轴可得出 $AE = 2$ ，利用二次函数的性质可得出 $BE = 2$ ，结合 $\tan \angle BDE = \frac{1}{2}$ 可得出 DE 的长度，进而可得出点 D 的坐标，抛物线的表达式可设为 $y = a(x - 1)^2 - 4$ ，根据点 A 的坐标，利用待定系数法可求出 a 的值，进而可得出抛物线的表达式；

(2) 取点 $F(5, 0)$ ，连接 DF ，过点 C 作 $CM \perp$ 直线 DE ，垂足为点 M ，过点 B 作 $BN \perp$ 直线 DF ，垂足为点 N ，则 $\triangle DEF$ ， $\triangle BNF$ 为等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可求出 BN ， DN 的长度，进而可得出 $\tan \angle BDN = \frac{1}{3}$ ，利用二次函数图象上点的坐标特征可得出点 C 的坐标，结合点 D 的坐标可得出 $\triangle CDM$ 为等腰直角三角形，分点 P 在点 D 的下方和点 P 在点 D 的上方两种情况考虑：①当点 P 在点 D 下方时，由 $\angle CDM = \angle DCP + \angle CPM = 45^\circ$ ， $\angle BDE + \angle BDN = 45^\circ$ 可得出 $\angle CPM = \angle BDN$ ，进而可得出 $\tan \angle CPM = \frac{CM}{MP} = \frac{1}{3}$ ，代入 $CM = 1$ 可求出 MP ，进而可求出点 P 的坐标；②当点 P 在点 D 上方时，由 $\angle PCD + \angle PCM = 45^\circ$ ， $\angle BDE + \angle BDN = 45^\circ$ 可得出 $\angle PCM = \angle BDN$ ，进而可得出 $\tan \angle PCM = \frac{MP}{CM} = \frac{1}{3}$ ，代入 $CM = 1$ 可求出 MP ，进而可求出点 P 的坐标．综上，此题得解．

【解答】解：(1) 依照题意，画出图形，如图 1 所示．

$\because$ 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, 0)$ ，

$\therefore BE = AE = 2$ ．

$\because \tan \angle BDE = \frac{BE}{DE} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore DE = 2BE = 4,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (1, -4).$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式可设为 } y = a(x-1)^2 - 4.$$

$$\text{将 } (-1, 0) \text{ 代入 } y = a(x-1)^2 - 4, \text{ 得: } 4a - 4 = 0,$$

$$\text{解得: } a = 1,$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = (x-1)^2 - 4, \text{ 即 } y = x^2 - 2x - 3.$$

(2) 取点 $F(5, 0)$, 连接 DF , 过点 C 作 $CM \perp$ 直线 DE , 垂足为点 M , 过点 B 作 $BN \perp$ 直线 DF , 垂足为点 N , 如图 2 所示.

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (1, -4),$$

$$\therefore EF = DE = 4,$$

$\therefore \triangle DEF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle EDF = \angle EFD = 45^\circ, \quad DF = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore BN \perp DF,$$

$\therefore \triangle BNF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore NB = NF = \frac{\sqrt{2}}{2}BF = \sqrt{2},$$

$$\therefore DN = DF - NF = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle BDN = \frac{BN}{DN} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = x^2 - 2x - 3 = -3,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, -3).$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (1, -4), \quad CM \perp DE,$$

$$\therefore CM = DM = 1,$$

$\therefore \triangle CDM$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DCM = \angle CDM = 45^\circ.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当点 } P \text{ 在点 } D \text{ 下方时, } \therefore \angle CDM = \angle DCP + \angle CPM = 45^\circ, \quad \angle BDE + \angle BDN = 45^\circ,$$

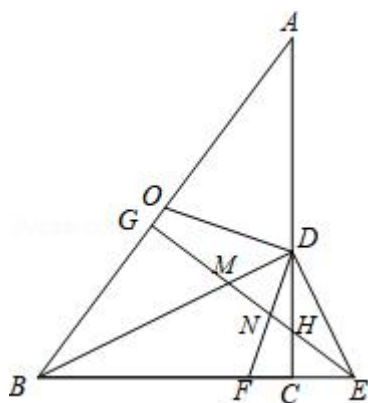
$$\therefore \angle CPM = \angle BDN,$$

$$\therefore \tan \angle CPM = \frac{CM}{MP} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{1}{MP} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore MP = 3,$$

$$\therefore EP = EM + MP = 6,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1, -6);$$



【分析】(1) 只要证明 $\triangle OBD \sim \triangle NED$ ，即可解决问题.

(2) 由 $\tan \angle DBC = \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{BD}$ ，又因为 $\frac{DE}{DB} = \frac{NE}{OB}$ ，可得 $\frac{CD}{BC} = \frac{NE}{OB}$ ，由此即可解决问题.

(3) 分两种情形分别求解即可解决问题.

【解答】(1) 证明：如图 1 中，

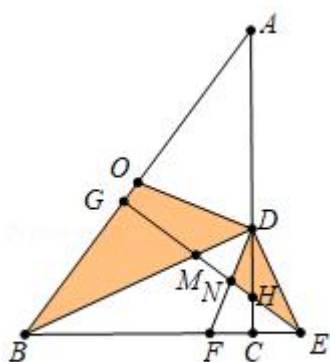


图1

$$\because OD \perp DF, BD \perp DE,$$

$$\therefore \angle ODF = \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle NDE,$$

$$\because EG \perp AB,$$

$$\therefore \angle BGM = \angle MDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BMG = \angle EMD,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle DEN,$$

$$\therefore \triangle OBD \sim \triangle NED,$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{NE}{OB}.$$

(2) 解：如图 1 中， $\because \angle BCD = \angle BDE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle DBC = \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{BD},$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{NE}{OB},$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{NE}{OB},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore OB = OA = 2.5,$$

$$\therefore \frac{x}{3} = \frac{y}{2.5},$$

$$\therefore y = \frac{5}{6}x \quad (0 < x \leq 2).$$

(3) 解: ①如图 2-1 中, 当 $DE = DF$ 时, 作 $OK \perp AC$ 于 K .

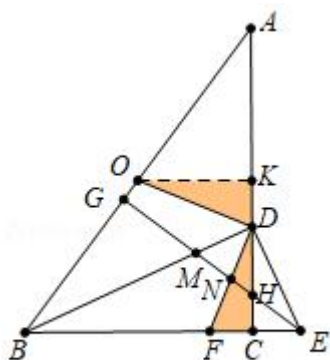


图2-1

$$\because \angle OKD = \angle DCF = \angle ODF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODK + \angle KOD = 90^\circ, \quad \angle ODK + \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOK = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle OKD \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{OK}{CD} = \frac{DK}{CF},$$

$$\therefore \frac{1.5}{x} = \frac{2-x}{CF},$$

$$\therefore CF = \frac{2}{3}x(2-x),$$

$$\because DF = DE, \quad DC \perp EF,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CDF,$$

$$\because \angle CDE + \angle CDB = 90^\circ, \quad \angle CBD + \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CBD = \angle CDF,$$

$$\because \angle DCF = \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{CF}{CD},$$

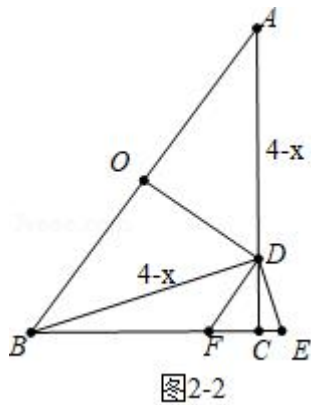
$$\therefore CD^2 = CF \cdot CB,$$

$$\therefore x^2 = 2x(2-x),$$

$$\text{解得 } x = \frac{4}{3} \text{ 或 } 0 \text{ (舍弃)}$$

$$\therefore CD = \frac{4}{3}.$$

如图 2-2 中, 当 $DE = EF$ 时,



$$\because ED = EF,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle EFD,$$

$$\therefore \angle EDC + \angle CDF = \angle DBC + \angle BDF,$$

$$\because \angle EDC = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle BDF,$$

$$\because \angle CDF + \angle ADO = 90^\circ, \quad \angle BDF + \angle BDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle BDO,$$

$$\because AO = OB, \text{ 易知 } DA = DB, \text{ 设 } DA = DB = 4 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \because BD^2 = CD^2 + BC^2,$$

$$\therefore (4-x)^2 = x^2 + 3^2,$$

$$\therefore x = \frac{7}{8},$$

$$\therefore CD = \frac{7}{8}.$$

综上所述， CD 的长为 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{7}{8}$.

【点评】 本题属于相似形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，锐角三角函数，勾股定理等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用参数解决问题，属于中考压轴题.