

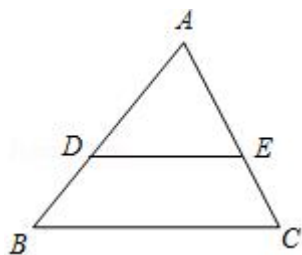
2019 年上海市长宁区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. (4 分) 抛物线 $y = 2(x+2)^2 - 3$ 的顶点坐标是 ()

- A. (2, -3) B. (-2, -3) C. (-2, 3) D. (2, 3)

2. (4 分) 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，下列条件中能够判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()



- A. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ B. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AE}$ D. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

3. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，如果 $\cos B = \frac{1}{3}$ ， $BC = a$ ，那么 AC 的长是 ()

- A. $2\sqrt{2}a$ B. $3a$ C. $\sqrt{10}a$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$

4. (4 分) 如果 $|\vec{a}| = 2$ ， $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ ，那么下列说法正确的是 ()

- A. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$
B. $\vec{b}$ 是与 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量
C. $2\vec{b} - \vec{a} = \vec{0}$
D. $\vec{b} \parallel \vec{a}$

5. (4 分) 在直角坐标平面内，点 O 是坐标原点，点 A 的坐标是 $(3, 2)$ ，点 B 的坐标是 $(3, -4)$ 。如果以点 O 为圆心， r 为半径的圆 O 与直线 AB 相交，且点 A 、 B 中有一点在圆 O 内，另一点在圆 O 外，那么 r 的值可以取 ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

6. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，联结 AD ，下列说法错误的是 ()

- A. 如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB^2 = BD \cdot BC$ ，那么 $AD \perp BC$
B. 如果 $AD \perp BC$ ， $AD^2 = BD \cdot CD$ ，那么 $\angle BAC = 90^\circ$

C. 如果 $AD \perp BC$, $AB^2 = BD \cdot BC$, 那么 $\angle BAC = 90^\circ$

D. 如果 $\angle BAC = 90^\circ$, $AD^2 = BD \cdot CD$, 那么 $AD \perp BC$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】第 11 题图 BACDEF

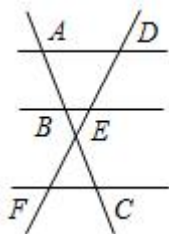
7. (4 分) 若线段 a 、 b 、 c 、 d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$, 则 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值等于_____.

8. (4 分) 如果抛物线 $y = (3 - m)x^2 - 3$ 有最高点, 那么 m 的取值范围是_____.

9. (4 分) 如果两个相似三角形的周长的比等于 1:4, 那么它们的面积的比等于_____.

10. (4 分) 边长为 6 的正六边形的边心距为_____.

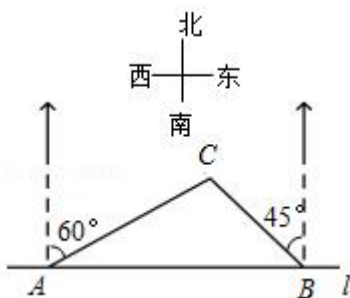
11. (4 分) 如图, 已知 $AD \parallel BE \parallel CF$, 若 $AB = 3$, $AC = 7$, $EF = 6$, 则 DE 的长为_____.



12. (4 分) 已知点 P 在线段 AB 上, 满足 $AP:BP = BP:AB$, 若 $BP = 2$, 则 AB 的长为_____.

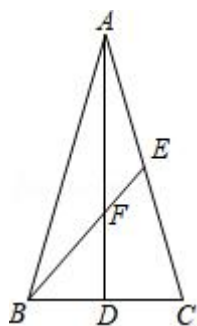
13. (4 分) 若点 $A(-1, 7)$ 、 $B(5, 7)$ 、 $C(-2, -3)$ 、 $D(k, -3)$ 在同一条抛物线上, 则 k 的值等于_____.

14. (4 分) 如图, 在一条东西方向笔直的沿湖道路 l 上有 A 、 B 两个游船码头, 观光岛屿 C 在码头 A 的北偏东 60° 方向、在码头 B 的北偏西 45° 方向, $AC = 4$ 千米. 那么码头 A 、 B 之间的距离等于_____千米. (结果保留根号)



15. (4 分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 4$, 若圆 A 的半径长为 5, 圆 C 的半径长为 R , 且圆 A 与圆 C 内切, 则 R 的值等于_____.

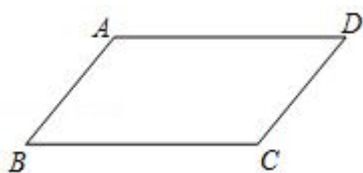
16. (4 分) 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, AD 与 BE 交于点 F , 若 $BE = 6$, $FD = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.



17. (4分) 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 连接 PA 、 PB 、 PC , 在 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PAC$ 中, 如果存在一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 那么就称点 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$, 如果点 P 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的自相似点, 那么 $\angle ACP$ 的余切值等于_____.



18. (4分) 如图, 点 P 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上, 将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 翻折, 点 B 恰好落在边 AD 的垂直平分线上, 如果 $AB = 5$, $AD = 8$, $\tan B = \frac{4}{3}$, 那么 BP 的长为_____.



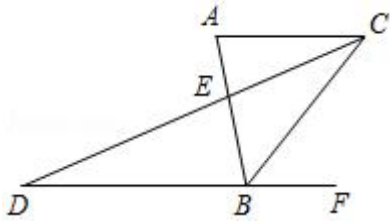
三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. (10分) 计算: $\sqrt{3} \cot^2 60^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ - \cos 30^\circ}$.

20. (10分) 如图, AB 与 CD 相交于点 E , $AC \parallel BD$, 点 F 在 DB 的延长线上, 联结 BC , 若 BC 平分 $\angle ABF$, $AE = 2$, $BE = 3$.

(1) 求 BD 的长;

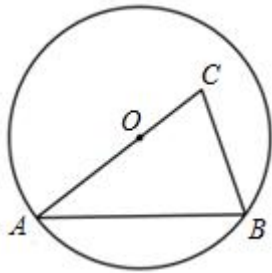
(2) 设 $\overrightarrow{EB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{b}$, 用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示 $\overrightarrow{BC}$.



21. (10分) 如图, AB 是圆 O 的一条弦, 点 O 在线段 AC 上, $AC = AB$, $OC = 3$, $\sin A = \frac{3}{5}$.

求: (1) 圆 O 的半径长;

(2) BC 的长.

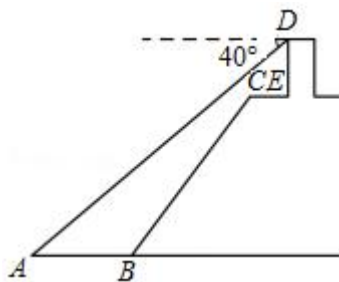


22. (10分) 如图, 小明站在江边某瞭望台 DE 的顶端 D 处, 测得江面上的渔船 A 的俯角为 40° . 若瞭望台 DE 垂直于江面, 它的高度为 3 米, $CE = 2$ 米, CE 平行于江面 AB , 迎水坡 BC 的坡度 $i = 1 : 0.75$, 坡长 $BC = 10$ 米.

(参考数据: $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$, $\cot 40^\circ \approx 1.19$)

(1) 求瞭望台 DE 的顶端 D 到江面 AB 的距离;

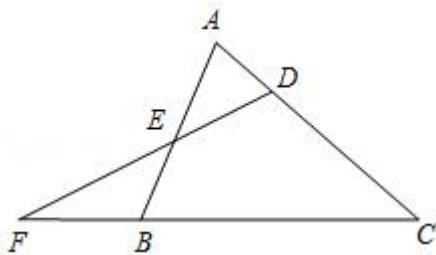
(2) 求渔船 A 到迎水坡 BC 的底端 B 的距离. (结果保留一位小数)



23. (12分) 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AC 、 AB 上, 延长 DE 、 CB 交于点 F , 且 $AE \cdot AB = AD \cdot AC$.

(1) 求证: $\angle FEB = \angle C$;

(2) 连接 AF , 若 $\frac{FB}{AB} = \frac{CD}{FD}$, 求证: $EF \cdot AB = AC \cdot FB$.

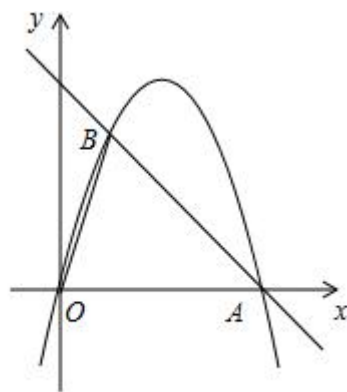
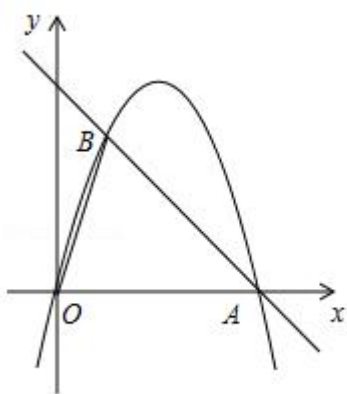


24. (12分) 如图, 在直角坐标平面内, 抛物线经过原点 O 、点 $B(1, 3)$, 又与 x 轴正半轴相交于点 A , $\angle BAO = 45^\circ$, 点 P 是线段 AB 上的一点, 过点 P 作 $PM \parallel OB$, 与抛物线交于点 M , 且点 M 在第一象限内.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若 $\angle BMP = \angle AOB$, 求点 P 的坐标;

(3) 过点 M 作 $MC \perp x$ 轴, 分别交直线 AB 、 x 轴于点 N 、 C , 若 $\triangle ANC$ 的面积等于 $\triangle PMN$ 的面积的 2 倍, 求 $\frac{MN}{NC}$ 的值.



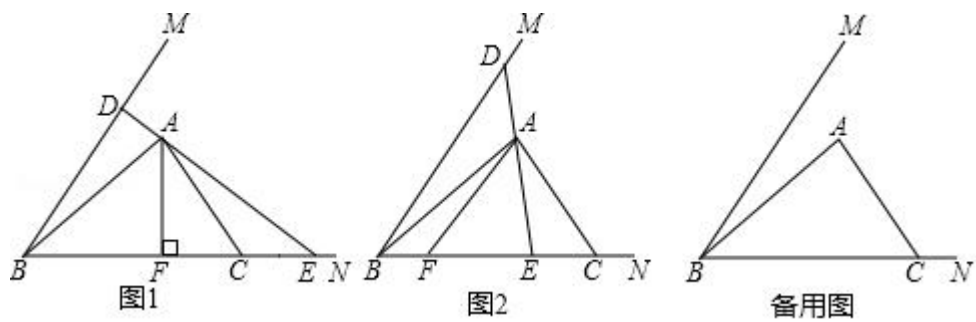
备用图

25. (14分) 已知锐角 $\angle MBN$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$, 点 C 在射线 BN 上, $BC = 25$, 点 A 在 $\angle MBN$ 的内部, 且 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle BCA = \angle MBN$. 过点 A 的直线 DE 分别交射线 BM 、射线 BN 于点 D 、 E . 点 F 在线段 BE 上 (点 F 不与点 B 重合), 且 $\angle EAF = \angle MBN$.

(1) 如图 1, 当 $AF \perp BN$ 时, 求 EF 的长;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 BC 上时, 设 $BF = x$, $BD = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出函数定义域;

(3) 联结 DF , 当 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ACE$ 相似时, 请直接写出 BD 的长.



2019 年上海市长宁区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. (4 分) 抛物线 $y = 2(x+2)^2 - 3$ 的顶点坐标是 ()

- A. (2, -3) B. (-2, -3) C. (-2, 3) D. (2, 3)

【分析】利用二次函数的顶点式是： $y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$ ，且 a, h, k 是常数)，顶点坐标是 (h, k) 进行解答.

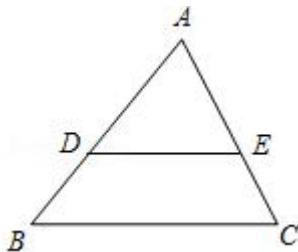
【解答】解： $\because y = 2(x+2)^2 - 3$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标是 $(-2, -3)$

故选：B.

【点评】本题主要是对抛物线中顶点式的对称轴，顶点坐标的考查.

2. (4 分) 如图，点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，下列条件中能够判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()



- A. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ B. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AE}$ D. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

【分析】如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边. 根据平行线分线段成比例定理对各个选项进行判断即可.

【解答】解：A. 由 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项不合题意；

B. 由 $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AC}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项不合题意；

C. 由 $\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AE}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项不合题意；

D. 由 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ ，能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项符合题意；

故选：D.

【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理的应用，如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

3.（4分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，如果 $\cos B = \frac{1}{3}$ ， $BC = a$ ，那么 AC 的长是（ ）

- A. $2\sqrt{2}a$ B. $3a$ C. $\sqrt{10}a$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$

【分析】依据 $\cos B = \frac{1}{3}$ ， $BC = a$ ，即可得到 $AB = 3a$ ，再根据勾股定理，即可得到 AC 的长．

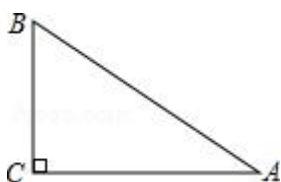
【解答】解： $\because \cos B = \frac{1}{3}$ ， $BC = a$ ，

$$\therefore AB = 3a,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a,$$

故选：A．



【点评】本题考查了锐角三角函数的定义以及勾股定理．在直角三角形中，锐角 A 的邻边 b 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$ ．

4.（4分）如果 $|\vec{a}| = 2$ ， $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ ，那么下列说法正确的是（ ）

- A. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$
 B. $\vec{b}$ 是与 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量
 C. $2\vec{b} - \vec{a} = \vec{0}$
 D. $\vec{b} \parallel \vec{a}$

【分析】根据平面向量的模和向量平行的定义解答．

【解答】解：A、由 $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ 得到 $|\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}| = 1$ ，故本选项说法错误．

B、由 $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ 得到 $\vec{b}$ 是与 $\vec{a}$ 的方向相反，故本选项说法错误．

C、由 $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ 得到 $2\vec{b} + \vec{a} = \vec{0}$ ，故本选项说法错误．

D、由 $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ 得到 $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ，故本选项说法正确．

故选：D．

【点评】考查了平面向量，需要掌握平面向量的模的定义，向量的方向与大小以及向量平行的定义等知识点，难度不大．

5. (4分) 在直角坐标平面内，点 O 是坐标原点，点 A 的坐标是 $(3, 2)$ ，点 B 的坐标是 $(3, -4)$ ．如果以点 O 为圆心， r 为半径的圆 O 与直线 AB 相交，且点 A 、 B 中有一点在圆 O 内，另一点在圆 O 外，那么 r 的值可以取 ()

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【分析】先根据两点间的距离公式分别计算出 OA 、 OB 的长，再由点 A 、 B 中有一点在圆 O 内，另一点在圆 O 外求出 r 的范围，进而求解即可．

【解答】解：∵ 点 A 的坐标是 $(3, 2)$ ，点 B 的坐标是 $(3, -4)$ ，

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

∵ 以点 O 为圆心， r 为半径的圆 O 与直线 AB 相交，且点 A 、 B 中有一点在圆 O 内，另一点在圆 O 外，

$$\therefore \sqrt{13} < r < 5,$$

∴ $r = 4$ 符合要求．

故选：B．

【点评】本题考查了对点与圆的位置关系的判断．关键要记住若半径为 r ，点到圆心的距离为 d ，则有：当 $d > r$ 时，点在圆外；当 $d = r$ 时，点在圆上，当 $d < r$ 时，点在圆内．也考查了坐标与图形性质．

6. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，联结 AD ，下列说法错误的是 ()

A. 如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB^2 = BD \cdot BC$ ，那么 $AD \perp BC$

B. 如果 $AD \perp BC$ ， $AD^2 = BD \cdot CD$ ，那么 $\angle BAC = 90^\circ$

C. 如果 $AD \perp BC$ ， $AB^2 = BD \cdot BC$ ，那么 $\angle BAC = 90^\circ$

D. 如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD^2 = BD \cdot CD$ ，那么 $AD \perp BC$

【分析】根据相似三角形的判定定理证明相应的三角形相似，根据相似三角形的性质判断即可．

【解答】解：A、∵ $AB^2 = BD \cdot BC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}, \text{ 又 } \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle BCA,$$

$\therefore \angle BDA = \angle BAC = 90^\circ$, 即 $AD \perp BC$, 故 A 选项说法正确, 不符合题意;

$$B、\because AD^2 = BD \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}, \text{ 又 } \angle ADC = \angle BDA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle C,$$

$$\because \angle DAC + \angle C = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle BAD = 90^\circ ,$$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$, 故 B 选项说法正确, 不符合题意;

$$C、\because AB^2 = BD \cdot BC,$$

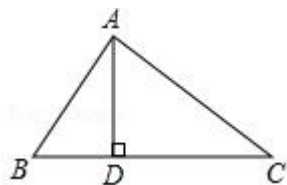
$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}, \text{ 又 } \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle BCA,$$

$\therefore \angle BAC = \angle BDA = 90^\circ$, 即 $AD \perp BC$, 故 C 选项说法正确, 不符合题意;

D、如果 $\angle BAC = 90^\circ$, $AD^2 = BD \cdot CD$, 那么 AD 与 BC 不一定垂直, 故 D 选项错误, 不符合题意;

故选: D.



【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质, 掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】 第 11 题图 BACDEF

7. (4 分) 若线段 a 、 b 、 c 、 d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$, 则 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值等于 $\frac{4}{5}$.

【分析】 根据等比的性质即可求出 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值.

【解答】 解: $\because$ 线段 a 、 b 、 c 、 d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$,

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点评】考查了比例线段, 关键是熟练掌握等比的性质.

8. (4分) 如果抛物线 $y = (3 - m)x^2 - 3$ 有最高点, 那么 m 的取值范围是 $m > 3$.

【分析】由于抛物线 $y = (3 - m)x^2 - 3$ 有最高点, 这要求抛物线必须开口向下, 由此可以确定 m 的范围.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y = (3 - m)x^2 - 3$ 有最高点,

$$\therefore 3 - m < 0,$$

即 $m > 3$.

故答案为 $m > 3$.

【点评】本题主要考查二次函数的最值的知识点, 解答此题要掌握二次函数图象的特点, 本题比较基础.

9. (4分) 如果两个相似三角形的周长的比等于 1: 4, 那么它们的面积的比等于 1: 16.

【分析】由两个相似三角形的周长的比等于 1: 4, 即可求得它们的相似比, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 即可求得它们的面积的比.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的周长的比等于 1: 4,

$\therefore$ 它们的相似比为 1: 4,

$\therefore$ 它们的面积的比等于 1: 16.

故答案为: 1: 16.

【点评】此题考查了相似三角形的性质. 注意相似三角形的面积比等于相似比的平方, 相似三角形的对应高线、角平分线、中线的比等于相似比.

10. (4分) 边长为 6 的正六边形的边心距为 $3\sqrt{3}$.

【分析】已知正六边形的边长为 6, 欲求边心距, 可通过边心距、边长的一半和内接圆半径构造直角三角形, 通过解直角三角形求解即可.

【解答】解: 如图所示, 此正六边形中 $AB = 6$,

则 $\angle AOB = 60^\circ$;

$\because OA = OB$,

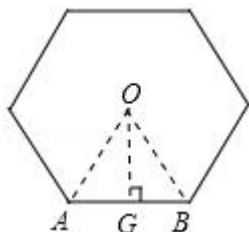
$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形,

$\because OG \perp AB$,

$$\therefore \angle AOG = 30^\circ,$$

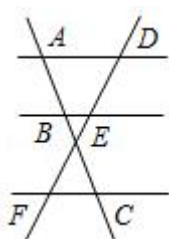
$$\therefore OG = OA \cdot \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为 $3\sqrt{3}$.



【点评】 本题考查了正多边形和圆的计算问题，属于常规题．

11. (4分) 如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，若 $AB = 3$ ， $AC = 7$ ， $EF = 6$ ，则 DE 的长为 $\frac{9}{2}$ ．



【分析】 根据 $AB = 3$ ， $AC = 7$ ，可得 $BC = 4$ ，再根据 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，即可得出 $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC}$ ，

即 $\frac{DE}{6} = \frac{3}{4}$ ，进而得到 DE 的长．

【解答】 解： $\because AB = 3$ ， $AC = 7$ ，

$$\therefore BC = 4,$$

$$\because AD \parallel BE \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{DE}{6} = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } DE = \frac{9}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{9}{2}.$$

【点评】 本题考查了平行线分线段成比例：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例；熟练掌握平行线分线段成比例定理是解决问题的关键．

12. (4分) 已知点 P 在线段 AB 上，满足 $AP:BP = BP:AB$ ，若 $BP = 2$ ，则 AB 的长为 $\sqrt{5} + 1$ ．

【分析】 根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段，得出 $BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，代入数据即

可得出 AB 的长.

【解答】解: $\because$ 点 P 在线段 AB 上, 满足 $AP:BP=BP:AB$,

$\therefore P$ 为线段 AB 的黄金分割点, 且 BP 是较长线段,

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = 2,$$

$$\text{解得 } AB = \sqrt{5}+1.$$

故答案为: $\sqrt{5}+1$.

【点评】本题考查了比例线段、黄金分割的概念: 如果一个点把一条线段分成两条线段, 并且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项, 那么就说这个点把这条线段黄金分割, 这个点叫这条线段的黄金分割点; 较长线段是整个线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍.

13. (4分) 若点 $A(-1, 7)$ 、 $B(5, 7)$ 、 $C(-2, -3)$ 、 $D(k, -3)$ 在同一条抛物线上, 则 k 的值等于 6.

【分析】利用抛物线的对称性得到 A 和 B 点, C 点和 D 点为抛物线上的两组对称点, 由点 A 、 B 的坐标得到抛物线的对称轴, 然后利用对称轴求出 k 的值.

【解答】解: $\because$ 抛物线经过 $A(-1, 7)$ 、 $B(5, 7)$,

$\therefore$ 点 A 、 B 为抛物线上的对称点,

$\therefore$ 抛物线解析式为直线 $x=2$,

$\because C(-2, -3)$ 、 $D(k, -3)$ 为抛物线上的对称点,

即 $C(-2, -3)$ 与 $D(k, -3)$ 关于直线 $x=2$ 对称,

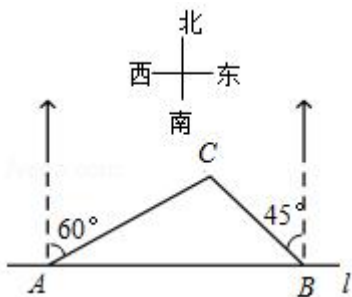
$$\therefore k-2=2-(-2),$$

$$\therefore k=6.$$

故答案为 6.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了二次函数的性质.

14. (4分) 如图, 在一条东西方向笔直的沿湖道路 l 上有 A 、 B 两个游船码头, 观光岛屿 C 在码头 A 的北偏东 60° 方向、在码头 B 的北偏西 45° 方向, $AC=4$ 千米. 那么码头 A 、 B 之间的距离等于 $(2\sqrt{3}+2)$ 千米. (结果保留根号)



【分析】作 $CD \perp AB$ 于点 D ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中利用三角函数求得 CD 、 AD 的长，然后在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中求得 BD 的长，即可得到码头 A 、 B 之间的距离．

【解答】解：如图，作 $CD \perp AB$ 于点 D ．

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

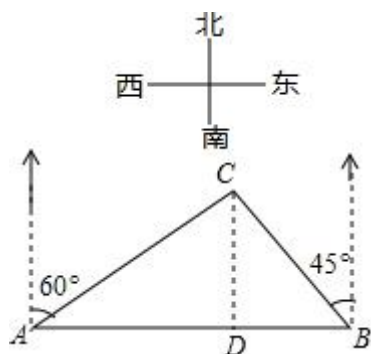
$\therefore CD = AC \cdot \sin \angle CAD = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ (km)}$ ， $AD = AC \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (km)}$ ，

$\because$ $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\angle CDB = 90^\circ$ ， $\angle CBD = 45^\circ$ ，

$\therefore BD = CD = 2 \text{ (km)}$ ，

$\therefore AB = AD + BD = 2\sqrt{3} + 2 \text{ (km)}$ ，

故答案是： $(2\sqrt{3} + 2)$ ．



【点评】本题考查了解直角三角形的应用，作出辅助线，转化为直角三角形的计算，求得 CD 的长是关键．

15. (4分) 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 4$ ，若圆 A 的半径长为 5，圆 C 的半径长为 R ，且圆 A 与圆 C 内切，则 R 的值等于 $5 - 2\sqrt{5}$ 或 $5 + 2\sqrt{5}$ ．

【分析】先利用勾股定理计算出 $AC = 2\sqrt{5}$ ，讨论：当点 C 在 $\odot A$ 内时， $5 - R = 2\sqrt{5}$ ；当点 A 在 $\odot C$ 内时， $R - 5 = 2\sqrt{5}$ ，然后分别解关于 R 的方程即可．

【解答】解： $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 4$ ，

$\therefore AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ．

当点 C 在 $\odot A$ 内时,

$\because$ 圆 A 与圆 C 内切,

$$\therefore 5 - R = 2\sqrt{5}, \text{ 即 } R = 5 - 2\sqrt{5};$$

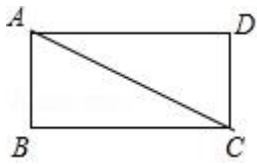
当点 A 在 $\odot C$ 内时,

$\because$ 圆 A 与圆 C 内切,

$$\therefore R - 5 = 2\sqrt{5}, \text{ 即 } R = 5 + 2\sqrt{5};$$

综上所述, R 的值为 $5 - 2\sqrt{5}$ 或 $5 + 2\sqrt{5}$.

故答案为 $5 - 2\sqrt{5}$ 或 $5 + 2\sqrt{5}$.

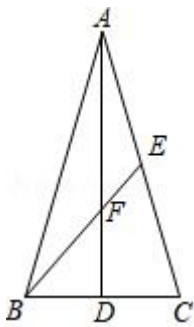


【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系: 两圆的圆心距为 d 、两圆的半径分别为 r 、 R :

①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$; ②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$; ③两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$); ④

两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r$ ($R > r$); ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$ ($R > r$).

16. (4分) 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, AD 与 BE 交于点 F , 若 $BE = 6$, $FD = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 $9\sqrt{7}$.



【分析】 过 E 作 $EG \perp BC$ 于 G , 根据已知条件得到点 F 是 $\triangle ABC$ 的重心, 求得 $AD = 3DF = 9$, 根据等腰三角形的性质得到 $AD \perp BC$, $BD = CD$, 根据平行线分线段成比例定理得到 $EG = \frac{1}{2}AD = \frac{9}{2}$, $CG = \frac{1}{2}CD$, 根据勾股定理得到 $BG = \sqrt{BE^2 - EG^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$, 根据三角形的面积公式即可得到结论.

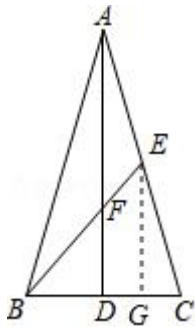
【解答】 解: 过 E 作 $EG \perp BC$ 于 G ,

$\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线,

$\therefore$ 点 F 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AD = 3DF = 9,$$

$\because AB = AC$, AD 是边 BC 上的中线,
 $\therefore AD \perp BC$, $BD = CD$,
 $\because BE$ 是边 AC 上的中线,
 $\therefore AE = CE$,
 $\because AD \perp BC$, $EG \perp BC$,
 $\therefore EG \parallel AD$,
 $\therefore EG = \frac{1}{2}AD = \frac{9}{2}$, $CG = \frac{1}{2}CD$,
 $\because BE = 6$,
 $\therefore BG = \sqrt{BE^2 - EG^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$,
 $\therefore BC = \frac{4}{3}BG = 2\sqrt{7}$,
 $\therefore \triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 9 \times 2\sqrt{7} = 9\sqrt{7}$,
 故答案为: $9\sqrt{7}$.



【点评】 本题考查了三角形的重心，等腰三角形的性质，三角形的面积，平行线分线段成比例定理，正确的作出辅助线是解题的关键.

17. (4分) 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 内，连接 PA 、 PB 、 PC ，在 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PAC$ 中，如果存在一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似，那么就称点 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 12$ ， $BC = 5$ ，如果点 P 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的自相似点，那么 $\angle ACP$ 的余切值等于 $\frac{12}{5}$.



【分析】先找到 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内相似点，再根据三角函数的定义计算 $\angle ACP$ 的余切即可．

【解答】解： $\because AC = 12, BC = 5,$

$$\therefore \angle CAB < \angle CBA,$$

故可在 $\angle CAB$ 内作 $\angle CBP = \angle CAB,$

又 $\because$ 点 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点，

$\therefore$ 过点 C 作 $CP \perp PB$ ，并延长 CP 交 AB 于点 D ，

则 $\triangle BPC \sim \triangle ACB$ ，

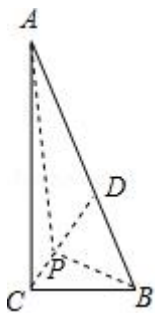
$\therefore$ 点 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点，

$$\therefore \angle BCP = \angle CBA,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle BAC,$$

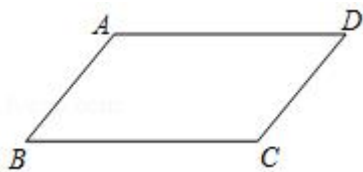
$$\therefore \angle ACP \text{ 的余切} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{5},$$

故答案为： $\frac{12}{5}$ ．



【点评】本题主要考查相似三角形的判定和性质，利用条件先确定出 P 点的位置是解题的关键．

18. (4分) 如图，点 P 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上，将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 翻折，点 B 恰好落在边 AD 的垂直平分线上，如果 $AB = 5, AD = 8, \tan B = \frac{4}{3}$ ，那么 BP 的长为 $\frac{25}{7}$ 或 7 ．



【分析】①如图 1，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，连接 DB' ，设 $AH = 4x$ ， $BH = 3x$ ，根据勾股定理得到 $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 5x = 5$ ，根据旋转的性质得到 $AB' = AB = 5$ ， $AM = DM = \frac{1}{2}AD = 4$ ， $\angle AMN = \angle HNM = 90^\circ$ ，根据勾股定理得到 $MB' = 3$ ，求得 $HN = MN = 4$ ，根据相似三角形的性质即可得到结论；

②如图 2，由①知， $MN = 4$ ， $MB' = 3$ ， $BN = 7$ ，求得 $NB = NB'$ ，推出点 P 与 N 重合，得到 $BP = BN = 7$ 。

【解答】解：①如图 1，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，连接 DB' ，

设 BB' 与 AP 交于 E ，

AD 的垂直平分线交 AD 于 M ， BC 于 N ，

$$\because \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{设 } AH = 4x, BH = 3x,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 5x = 5,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore AH = 4, BH = 3,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 翻折，点 B 恰好落在边 AD 的垂直平分线 MN 上，

$$\therefore AB' = AB = 5, AM = DM = \frac{1}{2}AD = 4, \angle AMN = \angle HNM = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } AHN M \text{ 是正方形, } MB' = \sqrt{AB'^2 - AM^2} = 3,$$

$$\therefore HN = MN = 4,$$

$$\therefore BN = 7, B'N = 1,$$

$$\therefore BB' = \sqrt{BN^2 + B'N^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BB' = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \angle BEP = \angle BNB' = 90^\circ, \angle PBE = \angle B'BN,$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle BB'N,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{PB}{BB'} &= \frac{BE}{BN}, \\ \therefore \frac{PB}{5\sqrt{2}} &= \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{7}, \\ \therefore BP &= \frac{25}{7};\end{aligned}$$

②如图 2，由①知， $MN=4$ ， $MB'=3$ ， $BN=7$ ，

$$\therefore NB = NB',$$

$\therefore$ 点 N 在 BB' 的垂直平分线上，

$\therefore$ 将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 翻折，点 B 恰好落在边 AD 的垂直平分线上，

$\therefore$ 点 P 也在 BB' 的垂直平分线上，

$\therefore$ 点 P 与 N 重合，

$$\therefore BP = BN = 7,$$

综上所述， BP 的长为 $\frac{25}{7}$ 或 7 。

故答案为： $\frac{25}{7}$ 或 7 。

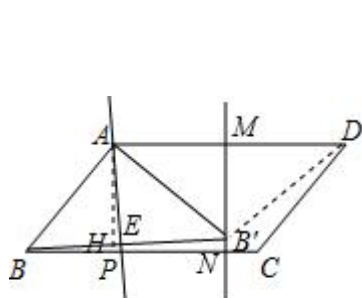


图1

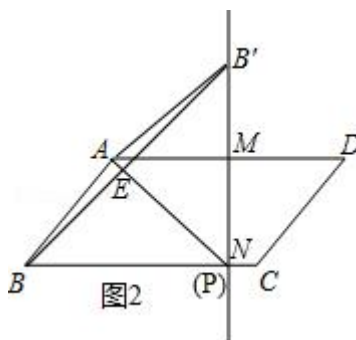


图2

【点评】 本题考查了翻折变换（折叠问题），线段垂直平分线的性质，勾股定理，正确的作出图形是解题的关键。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19.（10 分）计算： $\sqrt{3} \cot^2 60^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ - \cos 30^\circ}$ 。

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值把相关数据代入进而得出答案。

【解答】 解：原式 $= \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

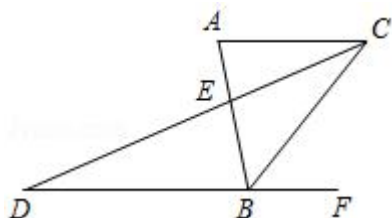
$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} - (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\
&= -\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10分) 如图, AB 与 CD 相交于点 E , $AC \parallel BD$, 点 F 在 DB 的延长线上, 联结 BC , 若 BC 平分 $\angle ABF$, $AE = 2$, $BE = 3$.

(1) 求 BD 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{EB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{b}$, 用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示 $\overrightarrow{BC}$.



【分析】(1) 利用角平分线的性质和平行线的性质得到 $AB = AC = 5$, 然后结合平行线截线段成比例求得 BD 的长度.

(2) 由平行线截线段成比例和平面向量的三角形法则解答.

【解答】解: (1) $\because BC$ 平分 $\angle ABF$,

$$\therefore \angle ABC = \angle CBF.$$

$$\because AC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle ACB.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$$

$$\therefore AC = AB.$$

$$\because AE = 2, BE = 3,$$

$$\therefore AB = AC = 5.$$

$$\because AC \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

$$\therefore \frac{5}{BD} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore BD = \frac{15}{2};$$

$$(2) \because AC \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{EC}{ED} = \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = -\frac{2}{3}\vec{b}.$$

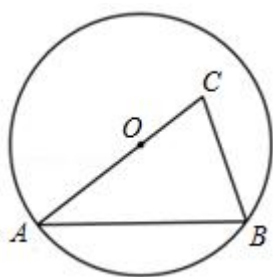
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = -\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$$

【点评】考查了平行线的性质和平面向量，需要掌握平行线截线段成比例和平面向量的三角形法则，难度不大.

21. (10分) 如图, AB 是圆 O 的一条弦, 点 O 在线段 AC 上, $AC = AB$, $OC = 3$, $\sin A = \frac{3}{5}$.

求: (1) 圆 O 的半径长;

(2) BC 的长.



【分析】(1) 过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为点 H , 设 $OH = 3k$, $AO = 5k$, 则 $AH = \sqrt{AO^2 - OH^2}$,

得到 $AB = 2AH = 8k$, 求得 $AC = AB = 8k$, 列方程即可得到结论;

(2) 过点 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为点 G , 在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $\angle AGC = 90^\circ$, 解直角三角形即可得到结论.

【解答】解: (1) 过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为点 H ,

在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中, $\angle OHA = 90^\circ$,

$$\therefore \sin A = \frac{OH}{AO} = \frac{3}{5},$$

设 $OH = 3k$, $AO = 5k$,

$$\text{则 } AH = \sqrt{AO^2 - OH^2},$$

$\because OH \perp AB$,

$$\therefore AB = 2AH = 8k,$$

$$\therefore AC = AB = 8k,$$

$$\therefore 8k = 5k + 3,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore AO = 5,$$

即 $\odot O$ 的半径长为5;

(2) 过点 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为点 G , 在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $\angle AGC = 90^\circ$,

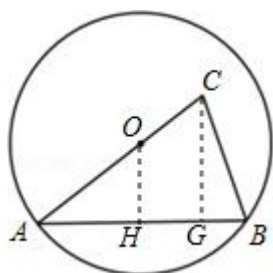
$$\therefore \sin A = \frac{CG}{AC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore CG = \frac{24}{5}, AG = \sqrt{AC^2 - CG^2} = \frac{32}{5}, BG = \frac{8}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle CGB$ 中, $\angle CGB = 90^\circ$,

$$\therefore BC = \sqrt{CG^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$



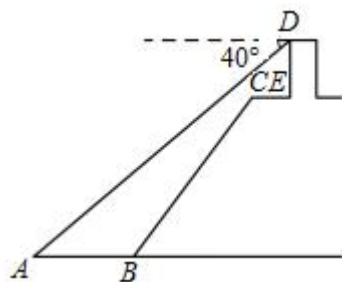
【点评】 本题考查了圆周角定理, 解直角三角形, 正确的作出辅助线是解题的关键.

22. (10分) 如图, 小明站在江边某瞭望台 DE 的顶端 D 处, 测得江面上的渔船 A 的俯角为 40° . 若瞭望台 DE 垂直于江面, 它的高度为3米, $CE = 2$ 米, CE 平行于江面 AB , 迎水坡 BC 的坡度 $i = 1:0.75$, 坡长 $BC = 10$ 米.

(参考数据: $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$, $\cot 40^\circ \approx 1.19$)

(1) 求瞭望台 DE 的顶端 D 到江面 AB 的距离;

(2) 求渔船 A 到迎水坡 BC 的底端 B 的距离. (结果保留一位小数)



【分析】 (1) 延长 DE 交 AB 于点 F , 过点 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为点 G , 利用坡度表示出

CG , BG 的长, 进而求出答案;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, 利用 $\cot A = \frac{AF}{DF}$, 得出 AF 的长, 进而得出答案.

【解答】 解: (1) 延长 DE 交 AB 于点 F , 过点 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为点 G ,

由题意可知 $CE = GF = 2$, $CG = EF$

在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中, $\angle BGC = 90^\circ$,

$$\therefore i = \frac{CG}{BG} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3},$$

设 $CG = 4k$, $BG = 3k$, 则 $BC = \sqrt{CG^2 + BG^2} = 5k = 10$,

$$\therefore k = 2,$$

$$\therefore BG = 6, \therefore CG = EF = 8,$$

$$\because DE = 3, \therefore DF = DE + EF = 3 + 8 = 11 \text{ (米)},$$

答: 瞭望台 DE 的顶端 D 到江面 AB 的距离为 11 米;

(2) 由题意得 $\angle A = 40^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\angle DFA = 90^\circ$,

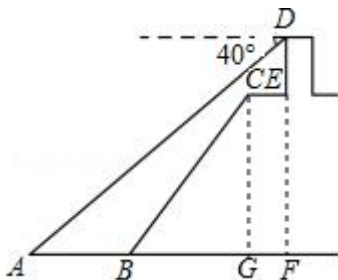
$$\therefore \cot A = \frac{AF}{DF},$$

$$\therefore \frac{AF}{11} \approx 1.19,$$

$$\therefore AF \approx 11 \times 1.19 = 13.09 \text{ (m)},$$

$$\therefore AB = AF - BG - GF = 5.09 \approx 5.1 \text{ (米)},$$

答: 渔船 A 到迎水坡 BC 的底端 B 的距离为 5.1 米.

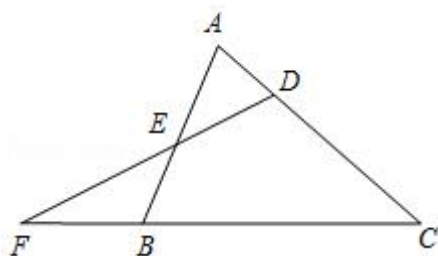


【点评】 此题主要考查了解直角三角形的应用, 正确掌握锐角三角函数关系是解题关键.

23. (12 分) 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AC 、 AB 上, 延长 DE 、 CB 交于点 F , 且 $AE \cdot AB = AD \cdot AC$.

(1) 求证: $\angle FEB = \angle C$;

(2) 连接 AF , 若 $\frac{FB}{AB} = \frac{CD}{FD}$, 求证: $EF \cdot AB = AC \cdot FB$.



【分析】 (1) 证明 $\triangle AED \sim \triangle ACB$ 即可解决问题;

(2) 证明 $\triangle EFB \sim \triangle FAB$, 可得 $\frac{EF}{AF} = \frac{FB}{AB}$, 由 $AF = AC$, 可得结论;

【解答】 证明: (1) $\because AE \cdot AB = AD \cdot AC$.

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

又 $\because \angle A = \angle A$,

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle C,$$

又 $\because \angle AED = \angle FEB$,

$$\therefore \angle FEB = \angle C.$$

(2) $\because \angle FEB = \angle C$, $\angle EFB = \angle CFD$,

$$\therefore \triangle EFB \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \angle FBE = \angle FDC,$$

$$\therefore \frac{FB}{AB} = \frac{CD}{FD},$$

$$\therefore \frac{FB}{CD} = \frac{AB}{FD},$$

$$\therefore \triangle FBA \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \angle FEB = \angle C$$

$$\therefore AF = AC,$$

$$\because \angle FEB = \angle C,$$

$$\therefore \angle FEB = \angle AFB,$$

又 $\because \angle FBE = \angle ABF$,

$$\therefore \triangle EFB \sim \triangle FAB,$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{FB}{AB},$$

$$\because AF = AC,$$

$$\therefore EF \cdot AB = AC \cdot FB.$$

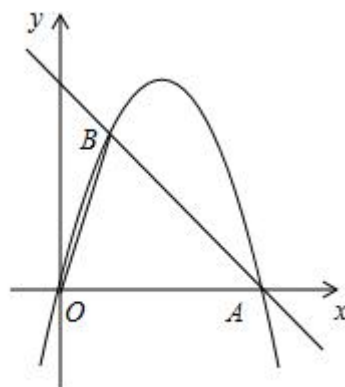
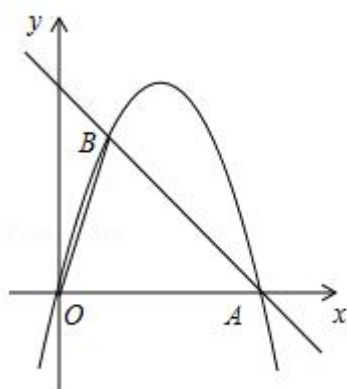
【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

24. (12分) 如图，在直角坐标平面内，抛物线经过原点 O 、点 $B(1, 3)$ ，又与 x 轴正半轴相交于点 A ， $\angle BAO = 45^\circ$ ，点 P 是线段 AB 上的一点，过点 P 作 $PM \parallel OB$ ，与抛物线交于点 M ，且点 M 在第一象限内.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若 $\angle BMP = \angle AOB$ ，求点 P 的坐标;

(3) 过点 M 作 $MC \perp x$ 轴，分别交直线 AB 、 x 轴于点 N 、 C ，若 $\triangle ANC$ 的面积等于 $\triangle PMN$ 的面积的 2 倍，求 $\frac{MN}{NC}$ 的值.



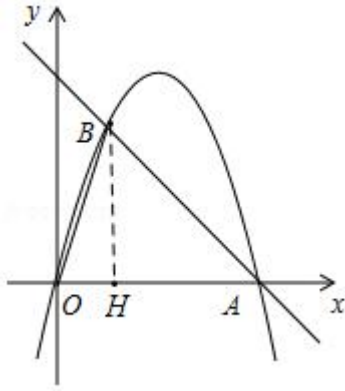
备用图

【分析】(1) 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴，垂足为点 H ，根据等腰直角三角形的性质可求点 $A(4, 0)$ ，用待定系数法可求抛物线的表达式;

(2) 根据平行线的性质可得 $BM \parallel OA$ ，可求点 M 坐标，用待定系数法可求直线 BO ，直线 AB ，直线 PM 的解析式，即可求点 P 坐标;

(3) 延长 MP 交 x 轴于点 D ，作 $PG \perp MN$ 于点 G ，根据等腰直角三角形的性质可得 $AC = CN$ ， $PG = NG$ ，根据锐角三角函数可得 $\tan \angle BOA = 3 = \tan \angle MPG = \frac{MG}{PG}$ ，可得 $MG = 3PG = 3NG$ ，根据面积关系可求 $\frac{MN}{NC}$ 的值.

【解答】解：(1) 如图，过点 B 作 $BH \perp x$ 轴，垂足为点 H ，



$\because$ 点 $B(1, 3)$

$\therefore BH = 3, OH = 1,$

$\because \angle BAO = 45^\circ, \angle BHA = 90^\circ$

$\therefore AH = BH = 3,$

$\therefore OA = 4$

$\therefore$ 点 $A(4, 0)$

$\because$ 抛物线过原点 O 、点 A 、 B ,

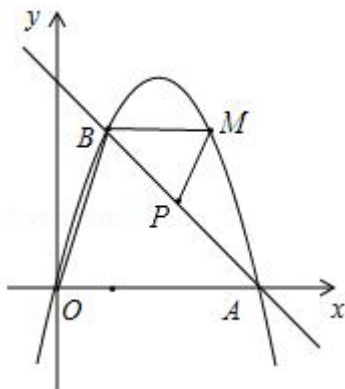
$\therefore$ 设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$)

$$\therefore \begin{cases} 0 = 16a + 4b \\ a + b = 3 \end{cases}$$

解得: $a = -1, b = 4$

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 4x$

(2) 如图,



$\because PM \parallel OB$

$\therefore \angle PMB + \angle OBM = 180^\circ$, 且 $\angle BMP = \angle AOB$,

$\therefore \angle AOB + \angle OBM = 180^\circ$

$\therefore BM \parallel OA$,

设点 $M(m, 3)$ ，且点 M 在抛物线 $y = -x^2 + 4x$ 上，

$$\therefore 3 = -m^2 + 4m,$$

$$\therefore m = 1 \text{ (舍去)}, m = 3$$

$$\therefore \text{点 } M(3, 3),$$

$$\therefore \text{点 } O(0, 0), \text{点 } A(4, 0), \text{点 } B(1, 3)$$

$$\therefore \text{直线 } OB \text{ 解析式为 } y = 3x,$$

$$\text{直线 } AB \text{ 解析式为 } y = -x + 4,$$

$$\therefore PM \parallel OB,$$

$$\therefore \text{设 } PM \text{ 解析式为 } y = 3x + n, \text{ 且过点 } M(3, 3)$$

$$\therefore 3 = 3 \times 3 + n,$$

$$\therefore n = -6$$

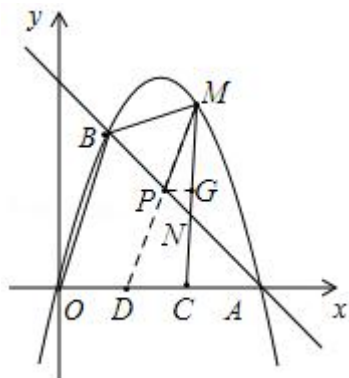
$$\therefore PM \text{ 解析式为 } y = 3x - 6$$

$$\therefore \begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{点 } P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

(3) 如图，延长 MP 交 x 轴于点 D ，作 $PG \perp MN$ 于点 G ，



$$\therefore PG \perp MN, MC \perp AD$$

$$\therefore PG \parallel AD$$

$$\therefore \angle MPG = \angle MDC, \angle GPN = \angle BAO = 45^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle PGC = 90^\circ, \angle ACG = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = CN, PG = NG,$$

$$\because PM \parallel OB,$$

$$\therefore \angle BOA = \angle MDC,$$

$$\therefore \angle MPG = \angle BOA$$

$$\because \text{点 } B \text{ 坐标 } (1, 3)$$

$$\therefore \tan \angle BOA = 3 = \tan \angle MPG = \frac{MG}{PG}$$

$$\therefore MG = 3PG = 3NG,$$

$$\therefore MN = 4PG,$$

$$\because \triangle ANC \text{ 的面积等于 } \triangle PMN \text{ 的面积的 } 2 \text{ 倍},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AC \times NC = 2 \times \frac{1}{2} \times MN \times PG,$$

$$\therefore NC^2 = 2 \times MN \times \frac{1}{4}MN = \frac{1}{2}MN^2,$$

$$\therefore \frac{MN}{NC} = \sqrt{2}$$

【点评】 本题是二次函数综合题，考查了待定系数法可求函数解析式，平行线的性质，锐角三角函数等知识，正确作出辅助线是解题的关键。

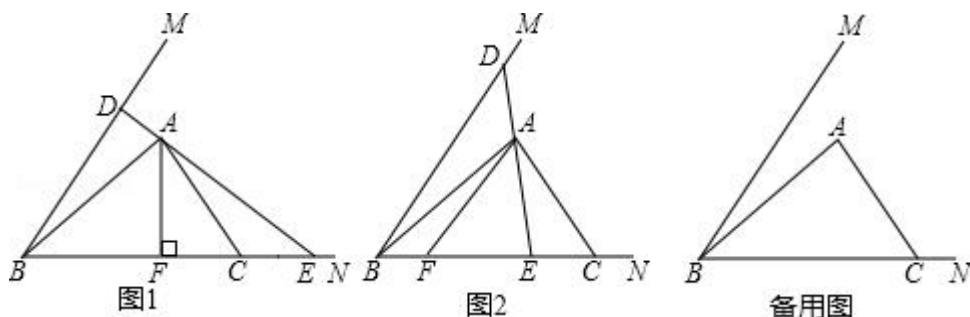
25. (14 分) 已知锐角 $\angle MBN$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$ ，点 C 在射线 BN 上， $BC = 25$ ，点 A 在 $\angle MBN$

的内部，且 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle BCA = \angle MBN$ 。过点 A 的直线 DE 分别交射线 BM 、射线 BN 于点 D 、 E 。点 F 在线段 BE 上（点 F 不与点 B 重合），且 $\angle EAF = \angle MBN$ 。

(1) 如图 1，当 $AF \perp BN$ 时，求 EF 的长；

(2) 如图 2，当点 E 在线段 BC 上时，设 $BF = x$ ， $BD = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式并写出函数定义域；

(3) 联结 DF ，当 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ACE$ 相似时，请直接写出 BD 的长。



【分析】 (1) 由锐角三角函数可求 $AC = 15$ ，根据勾股定理和三角形面积公式可求 AB ， AF 的长，即可求 EF 的长；

(2) 通过证 $\triangle FAE \sim \triangle FCA$ 和 $\triangle BDE \sim \triangle CFA$ ，可得 y 关于 x 的函数解析式；

(3) 分 $\triangle ADF \sim \triangle CEA$, $\triangle ADF \sim \triangle CAE$ 两种情况讨论, 通过等腰三角形的性质和相似三角形性质可求 BD 的长.

【解答】解: (1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore \cos \angle BCA = \cos \angle MBN = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AC}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore AC = 15$$

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 20$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times BC \times AF,$$

$$\therefore AF = \frac{20 \times 15}{25} = 12,$$

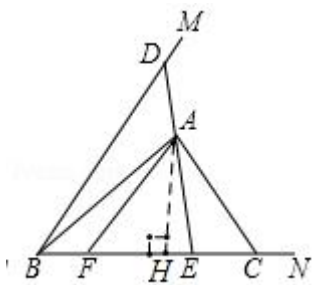
$$\therefore AF \perp BC$$

$$\therefore \cos \angle EAF = \cos \angle MBN = \frac{3}{5} = \frac{AF}{AE}$$

$$\therefore AE = 20$$

$$\therefore EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = 16$$

(2) 如图, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ,



由 (1) 可知: $AB = 20$, $AH = 12$, $AC = 15$,

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 16,$$

$$\therefore BF = x,$$

$$\therefore FH = 16 - x, \quad CF = 25 - x,$$

$$\therefore AF^2 = AH^2 + FH^2 = 144 + (16 - x)^2 = x^2 - 32x + 400,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle MBN, \quad \angle BCA = \angle MBN$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BCA, \quad \text{且} \angle AFC = \angle AFC,$$

$$\therefore \triangle FAE \sim \triangle FCA$$

$$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{EF}{AF}, \quad \angle AEF = \angle FAC,$$

$$\therefore AF^2 = FC \times EF$$

$$\therefore x^2 - 32x + 400 = (25 - x) \times EF,$$

$$\therefore EF = \frac{x^2 - 32x + 400}{25 - x}$$

$$\therefore BE = BF + EF = \frac{400 - 7x}{25 - x}$$

$$\because \angle MBN = \angle ACB, \quad \angle AEF = \angle FAC,$$

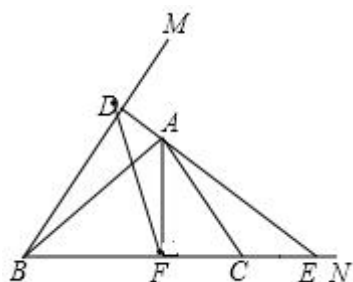
$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CFA$$

$$\therefore \frac{BD}{FC} = \frac{BE}{AC}$$

$$\therefore \frac{y}{25 - x} = \frac{\frac{400 - 7x}{25 - x}}{15}$$

$$\therefore y = \frac{400 - 7x}{15} \quad (0 < x \leq \frac{25}{2})$$

(3) 如图, 若 $\triangle ADF \sim \triangle CEA$,



$$\because \triangle ADF \sim \triangle CEA,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AEC,$$

$$\because \angle EAF = \angle MBN, \quad \angle EAF + \angle DAF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle MBN = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 A, 点 F, 点 B, 点 D 四点共圆,

$$\therefore \angle ADF = \angle ABF,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AEC = \angle ABF,$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ, \quad \text{且 } \angle ABF = \angle AEC, \quad \angle ACB = \angle MBN = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle AEC + \angle EAF = 90^\circ, \quad \angle AEC + \angle MBN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ = \angle AFC,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times BC \times AF,$$

$$\therefore AF = \frac{20 \times 15}{25} = 12,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = 16,$$

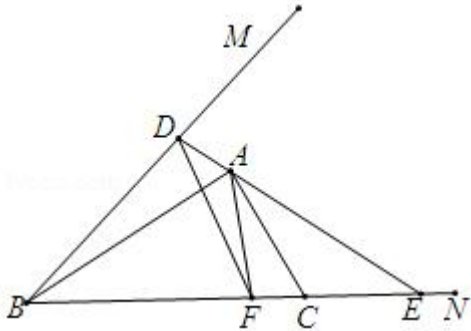
$$\because AB = AE, \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = 2BF = 32,$$

$$\therefore \cos \angle MBN = \frac{BD}{BE} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BE = \frac{96}{5},$$

如图，若 $\triangle ADF \sim \triangle CAE$,



$$\because \triangle ADF \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle CAE, \angle AFD = \angle AEC,$$

$$\therefore AC \parallel DF$$

$$\therefore \angle DFB = \angle ACB, \text{ 且 } \angle ACB = \angle MBN,$$

$$\therefore \angle MBN = \angle DFB,$$

$$\therefore DF = BD,$$

$$\because \angle EAF = \angle MBN, \angle EAF + \angle DAF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle MBN = 180^\circ,$$

$$\therefore \text{点 } A, \text{ 点 } F, \text{ 点 } B, \text{ 点 } D \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle ADF = \angle ABF,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABF, \text{ 且 } \angle AEC = \angle AEC,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CAE$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{AE} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

设 $CE = 3k$, $AE = 4k$, ($k \neq 0$)

$$\therefore BE = \frac{16}{3}k,$$

$$\therefore BC = BE - CE = 25$$

$$\therefore k = \frac{75}{7}$$

$$\therefore AE = \frac{300}{7}, CE = \frac{225}{7}, BE = \frac{400}{7}$$

$$\therefore \angle ACB = \angle FAE, \angle AFC = \angle AFE,$$

$$\therefore \triangle AFC \sim \triangle EFA,$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{CF}{AF} = \frac{AC}{AE} = \frac{15}{\frac{300}{7}} = \frac{7}{20},$$

设 $AF = 7a$, $EF = 20a$,

$$\therefore CF = \frac{49}{20}a,$$

$$\therefore CE = EF - CF = \frac{351}{20}a = \frac{225}{7},$$

$$\therefore a = \frac{1500}{7 \times 117},$$

$$\therefore EF = \frac{30000}{117 \times 7},$$

$$\therefore AC \parallel DF,$$

$$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{CE}{EF},$$

$$\therefore \frac{15}{DF} = \frac{\frac{225}{7}}{\frac{30000}{7 \times 117}},$$

$$\therefore DF = \frac{2000}{117},$$

综上所述：当 BD 为 $\frac{96}{5}$ 或 $\frac{2000}{117}$ 时， $\triangle ADF$ 与 $\triangle ACE$ 相似

【点评】 本题是相似综合题，考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，锐角三角函数等知识，灵活运用相关的性质定理、综合运用知识是解题的关键。