

2019 年上海市金山区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

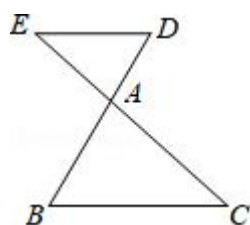
1.（4 分）下列函数是二次函数的是（ ）

- A. $y = x$ B. $y = \frac{1}{x}$ C. $y = x - 2 + x^2$ D. $y = \frac{1}{x^2}$

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\sin \angle B$ 等于（ ）

- A. $\frac{AC}{AB}$ B. $\frac{BC}{AB}$ C. $\frac{AC}{BC}$ D. $\frac{BC}{AC}$

3.（4 分）如图，已知 BD 与 CE 相交于点 A ， $ED \parallel BC$ ， $AB = 8$ ， $AC = 12$ ， $AD = 6$ ，那么 AE 的长等于（ ）

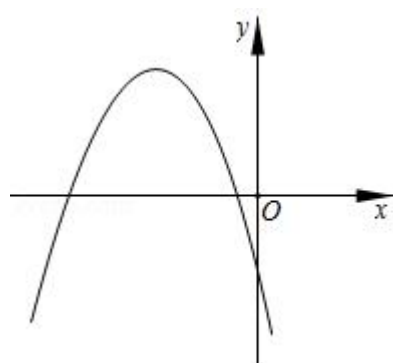


- A. 4 B. 9 C. 12 D. 16

4.（4 分）已知 $\vec{e}$ 是一个单位向量， $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，那么下列等式正确的是（ ）

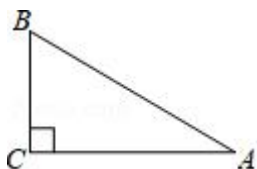
- A. $|\vec{a}| \vec{e} = \vec{a}$ B. $|\vec{e}| \vec{b} = \vec{b}$ C. $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \vec{e}$ D. $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$

5.（4 分）已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 如图所示，那么 a 、 b 、 c 的取值范围是（ ）



- A. $a < 0$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ B. $a < 0$ 、 $b < 0$ 、 $c > 0$
C. $a < 0$ 、 $b > 0$ 、 $c < 0$ D. $a < 0$ 、 $b < 0$ 、 $c < 0$

6.（4 分）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\odot A$ 的半径为 3，那么下列说法正确的是（ ）



- A. 点 B 、点 C 都在 $\odot A$ 内
 B. 点 C 在 $\odot A$ 内, 点 B 在 $\odot A$ 外
 C. 点 B 在 $\odot A$ 内, 点 C 在 $\odot A$ 外
 D. 点 B 、点 C 都在 $\odot A$ 外

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 那么 $f(2) =$ _____.

8. (4 分) 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$, 那么抛物线在 y 轴右侧部分是_____ (填“上升的”或“下降的”).

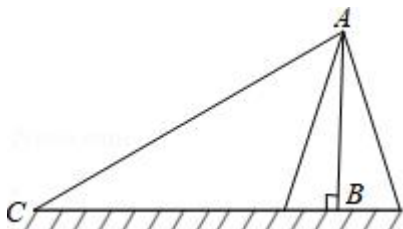
9. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{y} =$ _____.

10. (4 分) 已知 α 是锐角, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 那么 $\cos \alpha =$ _____.

11. (4 分) 一个正 n 边形的中心角等于 18° , 那么 $n =$ _____.

12. (4 分) 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, $AB = 4$, 那么 $AP =$ _____.

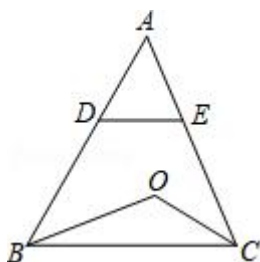
13. (4 分) 如图, 为了测量铁塔 AB 的高度, 在离铁塔底部 (点 B) 60 米的 C 处, 测得塔顶 A 的仰角为 30° , 那么铁塔的高度 $AB =$ _____ 米.



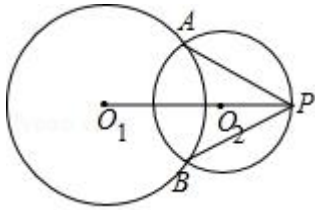
14. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 的半径分别为 2 和 5, 圆心距为 d , 若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, 那么 d 的取值范围是_____.

15. (4 分) 如图, 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$,

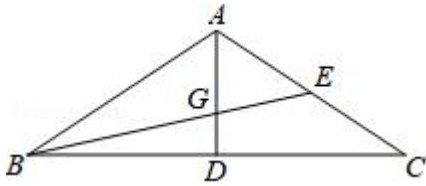
$DE \parallel BC$, 设 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 那么 $\overrightarrow{DE} =$ _____ (用 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 表示).



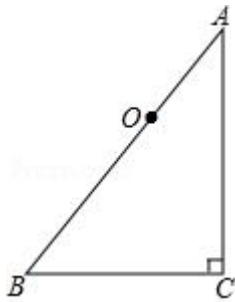
16. (4分) 如图, 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点, 延长连心线 O_1O_2 交 $\odot O_2$ 于点 P , 联结 PA 、 PB , 若 $\angle APB = 60^\circ$, $AP = 6$, 那么 $\odot O_2$ 的半径等于_____.



17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, $AB = AC = 5$, $\cos \angle C = \frac{4}{5}$, 那么 $GE =$ _____.



18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$. 在边 AB 上取一点 O , 使 $BO = BC$, 以点 O 为旋转中心, 把 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle A'B'C'$ (点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 A' 、 B' 、 C'), 那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的重叠部分的面积是_____.



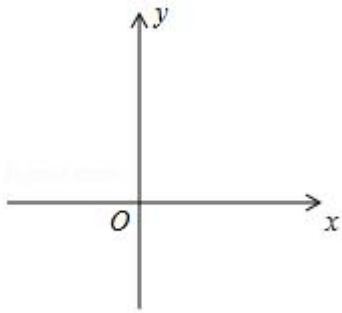
三、解答题 (19-22 题, 每题 10 分, 23-24 每题 12 分, 25 题 14 分, 共 78 分)

19. (10分) 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\cot 30^\circ}{2\sin 60^\circ} + \tan^2 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$.

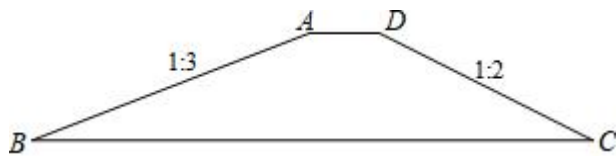
20. (10分) 已知二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$, 与 y 轴的交点为 P , 与 x 轴交于 A 、 B 两点. (点 B 在点 A 的右侧)

(1) 当 $y = 0$ 时, 求 x 的值.

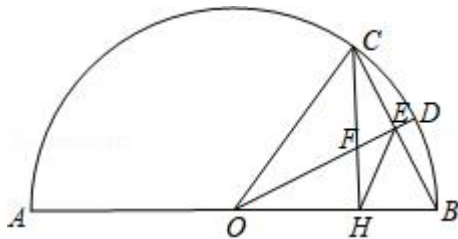
(2) 点 $M(6, m)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 的图象上, 设直线 MP 与 x 轴交于点 C , 求 $\cot \angle MCB$ 的值.



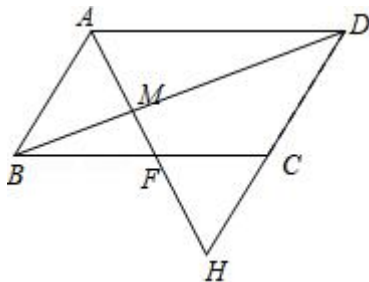
21. (10分) 如图, 已知某水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$, 坝顶宽 AD 是 6 米, 坝高 24 米, 背水坡 AB 的坡度为 1:3, 迎水坡 CD 的坡度为 1:2.
- 求 (1) 背水坡 AB 的长度.
- (2) 坝底 BC 的长度.



22. (10分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, C 为圆上一点, D 是 $\widehat{BC}$ 的中点, $CH \perp AB$ 于 H , 垂足为 H , 联 OD 交弦 BC 于 E , 交 CH 于 F , 联结 EH .
- (1) 求证: $\triangle BHE \sim \triangle BCO$.
- (2) 若 $OC = 4$, $BH = 1$, 求 EH 的长.



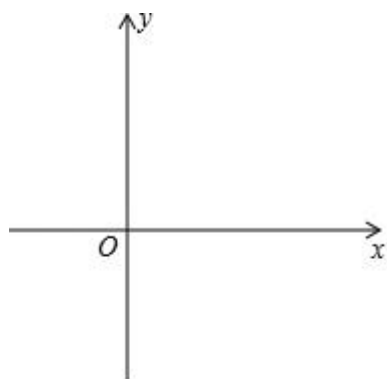
23. (12分) 如图, M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线上的一点, 射线 AM 与 BC 交于点 F , 与 DC 的延长线交于点 H .
- (1) 求证: $AM^2 = MF \cdot MH$.
- (2) 若 $BC^2 = BD \cdot DM$, 求证: $\angle AMB = \angle ADC$.



24. (12分) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 6)$, 点 $B(1, 3)$, 直线 $l_1: y = kx$ ($k \neq 0$),

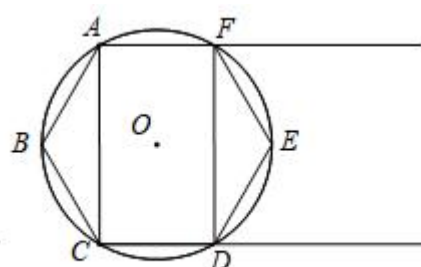
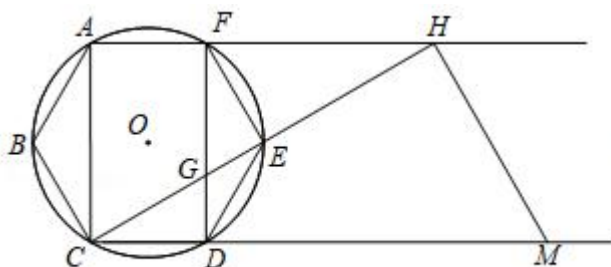
直线 $l_2: y = -x - 2$, 直线 l_1 经过抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的顶点 P , 且 l_1 与 l_2 相交于点 C , 直线 l_2 与 x 轴、 y 轴分别交于点 D 、 E . 若把抛物线上下平移, 使抛物线的顶点在直线 l_2 上 (此时抛物线的顶点记为 M), 再把抛物线左右平移, 使抛物线的顶点在直线 l_1 上 (此时抛物线的顶点记为 N).

- (1) 求抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的解析式.
- (2) 判断以点 N 为圆心, 半径长为 4 的圆与直线 l_2 的位置关系, 并说明理由.
- (3) 设点 F 、 H 在直线 l_1 上 (点 H 在点 F 的下方), 当 $\triangle MHF$ 与 $\triangle OAB$ 相似时, 求点 F 、 H 的坐标 (直接写出结果).



25. (14 分) 已知多边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形, 联结 AC 、 FD , 点 H 是射线 AF 上的一个动点, 联结 CH , 直线 CH 交射线 DF 于点 G , 作 $MH \perp CH$ 交 CD 的延长线于点 M , 设 $\odot O$ 的半径为 r ($r > 0$).

- (1) 求证: 四边形 $ACDF$ 是矩形.
- (2) 当 CH 经过点 E 时, $\odot M$ 与 $\odot O$ 外切, 求 $\odot M$ 的半径 (用 r 的代数式表示).
- (3) 设 $\angle HCD = \alpha$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), 求点 C 、 M 、 H 、 F 构成的四边形的面积 (用 r 及含 α 的三角比的式子表示).



备用图

2019 年上海市金山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）下列函数是二次函数的是（ ）

A. $y = x$ B. $y = \frac{1}{x}$ C. $y = x - 2 + x^2$ D. $y = \frac{1}{x^2}$

【分析】根据二次函数的定义判定即可.

【解答】解：A、 $y = x$ 属于一次函数，故本选项错误；

B、 $y = \frac{1}{x}$ 的右边不是整式，不是二次函数，故本选项错误；

C、 $y = x - 2 + x^2 = x^2 + x - 2$ ，符合二次函数的定义，故本选项正确；

D、 $y = \frac{1}{x^2}$ 的右边不是整式，不是二次函数，故本选项错误；

故选：C.

【点评】本题考查二次函数的定义. 判断函数是否是二次函数，首先是要看它的右边是否为整式，若是整式且仍能化简的要先将其化简，然后再根据二次函数的定义作出判断，要抓住二次项系数不为 0 这个关键条件.

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\sin \angle B$ 等于（ ）

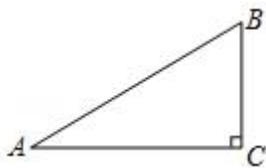
A. $\frac{AC}{AB}$ B. $\frac{BC}{AB}$ C. $\frac{AC}{BC}$ D. $\frac{BC}{AC}$

【分析】我们把锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$.

【解答】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \sin \angle B = \frac{AC}{AB},$$

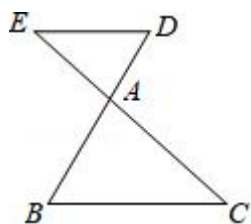
故选：A.



【点评】本题考查了锐角三角函数的定义，能熟记锐角三角函数的定义是解此题的关键.

3.（4 分）如图，已知 BD 与 CE 相交于点 A， $ED \parallel BC$ ， $AB = 8$ ， $AC = 12$ ， $AD = 6$ ，那么 AE

的长等于 ()



A. 4

B. 9

C. 12

D. 16

【分析】根据平行线分线段成比例定理即可得到结论.

【解答】解: $\because ED \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

$$\text{即 } \frac{8}{6} = \frac{12}{AE},$$

$$\therefore AE = 9,$$

故选: B.

【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理的运用, 注意: 平行于三角形一边的直线截其他两边 (或两边的延长线), 所得的对应线段成比例.

4. (4分) 已知 $\vec{e}$ 是一个单位向量, $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 那么下列等式正确的是 ()

A. $|\vec{a}| \vec{e} = \vec{a}$

B. $|\vec{e}| \vec{b} = \vec{b}$

C. $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \vec{e}$

D. $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$

【分析】长度不为 0 的向量叫做非零向量, 向量包括长度及方向, 而长度等于 1 个单位长度的向量叫做单位向量, 注意单位向量只规定大小没规定方向, 则可分析求解.

【解答】解: A、由于单位向量只限制长度, 不确定方向, 故本选项错误;

B、符合向量的长度及方向, 故本选项正确;

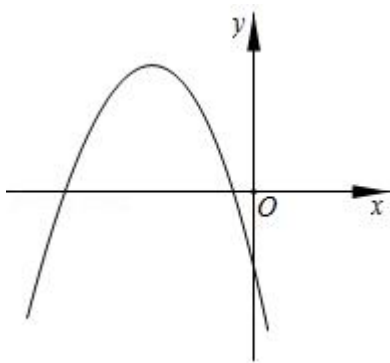
C、得出的是 a 的方向不是单位向量, 故本选项错误;

D、左边得出的是 a 的方向, 右边得出的是 b 的方向, 两者方向不一定相同, 故本选项错误.

故选: B.

【点评】本题考查了向量的性质, 属于基础题.

5. (4分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 如图所示, 那么 a 、 b 、 c 的取值范围是 ()



A. $a < 0, b > 0, c > 0$

B. $a < 0, b < 0, c > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0$

D. $a < 0, b < 0, c < 0$

【分析】根据二次函数的图象与性质即可求出答案.

【解答】解：由图象开口可知： $a < 0$,

由图象与 y 轴交点可知： $c < 0$,

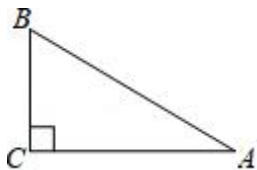
由对称轴可知： $-\frac{b}{2a} < 0$,

$\therefore a < 0, b < 0, c < 0$,

故选：D.

【点评】本题考查二次函数，解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质，本题属于中等题型.

6. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\odot A$ 的半径为 3，那么下列说法正确的是 ()



A. 点 B、点 C 都在 $\odot A$ 内

B. 点 C 在 $\odot A$ 内，点 B 在 $\odot A$ 外

C. 点 B 在 $\odot A$ 内，点 C 在 $\odot A$ 外

D. 点 B、点 C 都在 $\odot A$ 外

【分析】先解直角 $\triangle ABC$ ，求出 AB 、 AC 的长，再根据点到圆心距离与半径的关系可以确定点 B、点 C 与 $\odot A$ 的位置关系.

【解答】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 30^\circ$ ，

$\therefore AB = 2BC = 4$ ， $AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$ ，

$\because \odot A$ 的半径为 3， $4 > 3$ ， $2\sqrt{3} > 3$ ，

$\therefore$ 点 B、点 C 都在 $\odot A$ 外.

故选：D.

【点评】本题考查了对点与圆的位置关系的判断. 关键要记住若半径为 r , 点到圆心的距离为 d , 则有: 当 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d = r$ 时, 点在圆上, 当 $d < r$ 时, 点在圆内. 也考查了含 30° 角的直角三角形的性质.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 那么 $f(2) = \underline{-1}$.

【分析】计算自变量为 2 对应的函数值即可.

【解答】解: 把 $x = 2$ 代入 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 得 $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$.

故答案为 -1 .

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

8. (4 分) 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$, 那么抛物线在 y 轴右侧部分是 上升的 (填“上升的”或“下降的”).

【分析】根据抛物线解析式可求得其对称轴, 结合抛物线的增减性可得到答案.

【解答】解: $\because y = \frac{1}{2}x^2 - 1$,

$\therefore$ 其对称轴为 y 轴, 且开口向上,

$\therefore$ 在 y 轴右侧, y 随 x 增大而增大,

$\therefore$ 其图象在 y 轴右侧部分是上升的,

故答案为: 上升的.

【点评】本题主要考查二次函数的增减性, 掌握开口向上的二次函数在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大是解题的关键.

9. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{y} = \underline{\frac{7}{2}}$.

【分析】直接根据已知用同一未知数表示出各数, 进而得出答案.

【解答】解: $\because \frac{x}{y} = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 设 $x = 5a$, 则 $y = 2a$,

那么 $\frac{x+y}{y} = \frac{2a+5a}{2a} = \frac{7}{2}$.

故答案为: $\frac{7}{2}$.

【点评】此题主要考查了比例的性质, 正确表示出 x, y 的值是解题关键.

10. (4分) 已知 α 是锐角, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 那么 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】先确定 α 的度数, 即可得出 $\cos \alpha$ 的值.

【解答】解: $\because \alpha$ 是锐角, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】本题考查了特殊角的三角函数值, 解决问题的关键是熟记一些特殊角的三角函数值.

11. (4分) 一个正 n 边形的中心角等于 18° , 那么 $n = 20$.

【分析】根据正多边形的中心角和为 360° 计算即可.

【解答】解: $n = \frac{360^\circ}{18^\circ} = 20$,

故答案为: 20.

【点评】本题考查的是正多边形和圆, 熟知正多边形的中心角和为 360° 是解答此题的关键.

12. (4分) 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, $AB = 4$, 那么 $AP = 2\sqrt{5} - 2$.

【分析】根据黄金分割点的定义, 知 AP 是较长线段; 则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$, 代入数据即可得出 AP 的长.

【解答】解: 由于 P 为线段 $AB = 4$ 的黄金分割点,

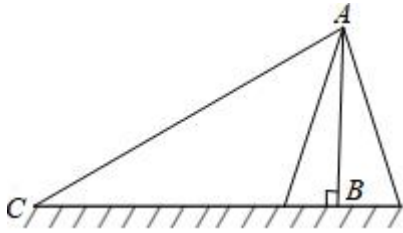
且 AP 是较长线段;

$$\text{则 } AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5} - 2.$$

故答案为 $2\sqrt{5} - 2$.

【点评】本题考查了黄金分割的概念. 应该识记黄金分割的公式: 较短的线段 = 原线段的 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 较长的线段 = 原线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

13. (4分) 如图, 为了测量铁塔 AB 的高度, 在离铁塔底部 (点 B) 60 米的 C 处, 测得塔顶 A 的仰角为 30° , 那么铁塔的高度 $AB = \underline{20\sqrt{3}}$ 米.



【分析】直接利用锐角三角函数关系得出 AB 的值进而得出答案.

【解答】解: 由题意可得: $\tan 30^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{60} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

解得: $AB = 20\sqrt{3}$,

答: 铁塔的高度 AB 为 $20\sqrt{3}m$.

故答案为: $20\sqrt{3}$.

【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用, 正确掌握锐角三角函数关系是解题关键.

14. (4分) 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 的半径分别为 2 和 5, 圆心距为 d , 若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, 那么 d 的取值范围是 $\underline{3 < d < 7}$.

【分析】利用两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$) 求解.

【解答】解: $\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交,

$$\therefore 3 < d < 7.$$

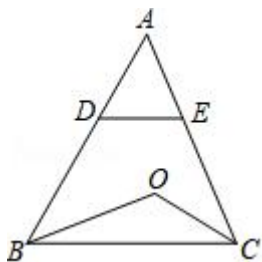
故答案为 $3 < d < 7$.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系: 两圆的圆心距为 d 、两圆的半径分别为 r 、 R :

- ①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$; ②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$; ③两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$); ④两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r$ ($R > r$); ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$ ($R > r$).

15. (4分) 如图, 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$,

$DE \parallel BC$, 设 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 那么 $\overrightarrow{DE} = \underline{-\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}}$ (用 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 表示).



【分析】根据三角形法则和平行线分线段成比例来求 $\overrightarrow{DE}$.

【解答】解： $\because \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}, DE \parallel BC,$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{2}{5}BC.$$

$$\because \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b},$$

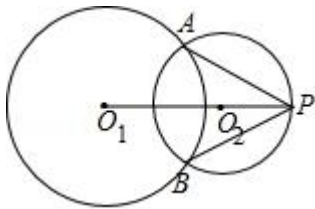
$$\therefore \overrightarrow{DE} = -\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}.$$

$$\text{故答案是: } -\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}.$$

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握三角形法则的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

16. (4分) 如图, 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A, B 两点, 延长连心线 O_1O_2 交 $\odot O_2$ 于点 P ,

联结 PA, PB , 若 $\angle APB = 60^\circ$, $AP = 6$, 那么 $\odot O_2$ 的半径等于 $2\sqrt{3}$.



【分析】连接 AB 交 O_1P 于 C , 根据相交两圆的性质得到 $AB \perp O_1P$, $AC = BC$, 得到 $\angle APC = \frac{1}{2}\angle APB = 30^\circ$, 根据直角三角形的性质得到 $AC = \frac{1}{2}AP = 3$, 连接 AO_2 , 解直角三角形即可得到结论.

【解答】解: 连接 AB 交 O_1P 于 C ,

则 $AB \perp O_1P$, $AC = BC$,

$$\therefore AP = PB,$$

$$\therefore \angle APC = \frac{1}{2}\angle APB = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AP = 3,$$

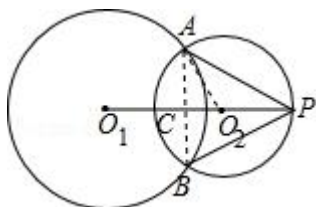
连接 AO_2 ,

$$\because AO_2 = PO_2,$$

$$\therefore \angle AO_2C = 60^\circ,$$

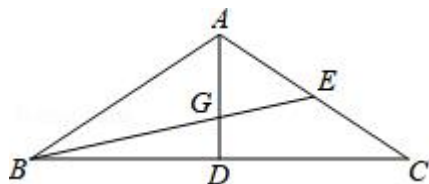
$$\therefore AO_2 = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore \odot O_2$ 的半径等于 $2\sqrt{3}$.



【点评】 本题考查了相交两圆的性质，圆周角定理，正确的作出辅助线是解题的关键.

17. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线， $AB = AC = 5$ ， $\cos \angle C = \frac{4}{5}$ ，那么 $GE = \frac{\sqrt{17}}{2}$.



【分析】 根据题意，作出合适的辅助线，然后根据勾股定理、三角形相似可以求得 GE 的长，本题得以解决.

【解答】 解：作 $EF \perp BC$ 于点 F ,

$$\because AD、BE \text{ 分别是边 } BC、AC \text{ 上的中线，} AB = AC = 5, \cos \angle C = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AD \perp BC, AD = 3, CD = 4,$$

$$\therefore AD \parallel EF, BC = 8,$$

$$\therefore EF = 1.5, DF = 2, \triangle BDG \sim \triangle BFE,$$

$$\therefore \frac{DG}{FE} = \frac{BD}{BF} = \frac{BG}{BE}, BF = 6,$$

$$\therefore DG = 1,$$

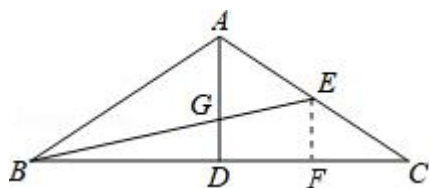
$$\therefore BG = \sqrt{17},$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{17}}{BE},$$

$$\text{得 } BE = \frac{3\sqrt{17}}{2},$$

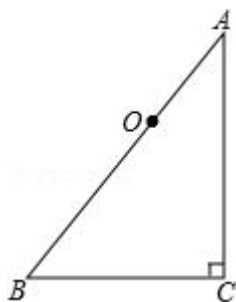
$$\therefore GE = BE - BG = \frac{3\sqrt{17}}{2} - \sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.



【点评】 本题考查解直角三角形，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

18. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$. 在边 AB 上取一点 O ，使 $BO = BC$ ，以点 O 为旋转中心，把 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle A'B'C'$ (点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 A' 、 B' 、 C')，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的重叠部分的面积是 5.76



【分析】 根据勾股定理得到 $AB = 10$ ，根据旋转的性质得到 $OA' = OA = 4$ ， $\angle A' = \angle A$ ，根据相似三角形的性质得到 $OM = 3$ ，求得 $AM = 1$ ，根据相似三角形的性质得到 $S_{\triangle AON} = 6$ ，同理， $S_{\triangle AMP} = 0.24$ ，于是得到结论.

【解答】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore AB = 10,$$

$$\therefore BO = BC = 6,$$

$\therefore$ 把 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle A'B'C'$ ，

$$\therefore OA' = OA = 4, \angle A' = \angle A,$$

$$\therefore \angle A'OM = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle A'OM \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{OM}{BC} = \frac{OA'}{AC},$$

$$\therefore OM = 3,$$

$$\therefore AM = 1,$$

$$\because \angle A' MO = \angle AMP,$$

$$\therefore \angle APM = \angle A' ON = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AON \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AON}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{AO}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

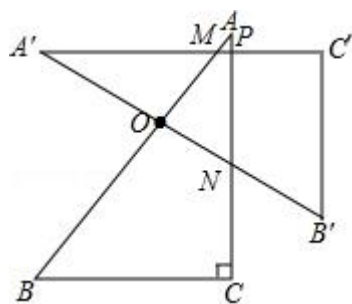
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$$

$$\therefore S_{\triangle AON} = 6,$$

$$\text{同理, } S_{\triangle AMP} = 0.24,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 与 } \triangle A' B' C' \text{ 的重叠部分的面积是 } 6 - 0.24 = 5.76.$$

故答案为: 5.76.



【点评】 本题考查了旋转的性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，正确的画出图形是解题的关键.

三、解答题（19-22 题，每题 10 分，23-24 每题 12 分，25 题 14 分，共 78 分）

19. (10 分) 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\cot 30^\circ}{2 \sin 60^\circ} + \tan^2 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入进而得出答案.

$$\text{【解答】解: 原式} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} + (\sqrt{3})^2 - 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + 3 - \frac{1}{2}$$

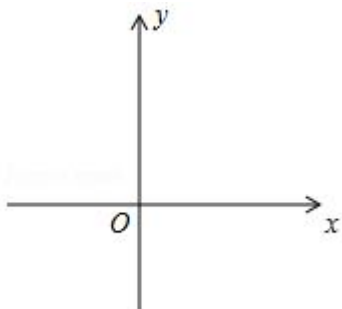
$$= 2.$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10 分) 已知二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ ，与 y 轴的交点为 P ，与 x 轴交于 A 、 B 两点. (点 B 在点 A 的右侧)

(1) 当 $y = 0$ 时，求 x 的值.

(2) 点 $M(6, m)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 的图象上, 设直线 MP 与 x 轴交于点 C , 求 $\cot \angle MCB$ 的值.



【分析】(1) 根据题目中的函数解析式, 可以求得当 $y = 0$ 时对应的 x 值;

(2) 根据题意可以求得点 M 的坐标, 点 C 的坐标和点 B 的坐标, 从而可以求得 $\cot \angle MCB$ 的值.

【解答】解: (1) 把 $y = 0$ 代入 $y = x^2 - 4x - 5$, 得

$$x^2 - 4x - 5 = 0,$$

解得, $x_1 = 5$, $x_2 = -1$,

即当 $y = 0$ 时, x 的值是 -1 或 5 ;

(2) $\because$ 点 $M(6, m)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 的图象上,

$$\therefore m = 6^2 - 4 \times 6 - 5 = 7,$$

$\therefore$ 点 $M(6, 7)$,

$\because$ 二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$, 与 y 轴的交点为 P ,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, -5)$,

设直线 MP 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 6k + b = 7 \\ b = -5 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = 2 \\ b = -5 \end{cases},$$

即直线 MP 的解析式为 $y = 2x - 5$,

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = \frac{5}{2},$$

即点 C 的坐标为 $(\frac{5}{2}, 0)$,

由 (1) 知, 当 $y = 0$ 时, x 的值是 -1 或 5 ,

$\because$ 二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 B 在点 A 的右侧),

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(5, 0)$,

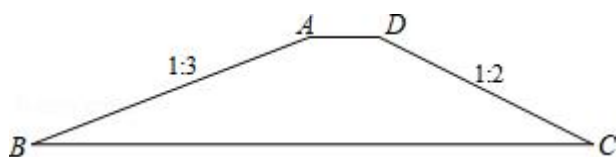
$$\therefore \cot \angle MCB = \frac{6 - \frac{5}{2}}{7} = \frac{1}{2}.$$

【点评】本题考查抛物线与 x 轴的交点、一次函数与二次函数图象上点的坐标特征，解直角三角形，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质和数形结合的思想解答．

21. (10 分) 如图，已知某水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$ ，坝顶宽 AD 是 6 米，坝高 24 米，背水坡 AB 的坡度为 1:3，迎水坡 CD 的坡度为 1:2.

求 (1) 背水坡 AB 的长度.

(2) 坝底 BC 的长度.



【分析】(1) 直接分别过点 A 、 D 作 $AM \perp BC$ ， $DN \perp BC$ 垂足分别为点 M 、 N ，得出 $AM = DN = 24$ (米)， $MN = AD = 6$ (米)，进而利用坡度以及勾股定理进而得出答案；

(2) 利用 (1) 中所求，进而得出 BC 的长.

【解答】解：(1) 分别过点 A 、 D 作 $AM \perp BC$ ， $DN \perp BC$ ，垂足分别为点 M 、 N ，根据题意，可知 $AM = DN = 24$ (米)， $MN = AD = 6$ (米)，

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中，

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BM = 72 \text{ (米)},$$

$$\therefore AB^2 = AM^2 + BM^2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{24^2 + 72^2} = 24\sqrt{10} \text{ (米)},$$

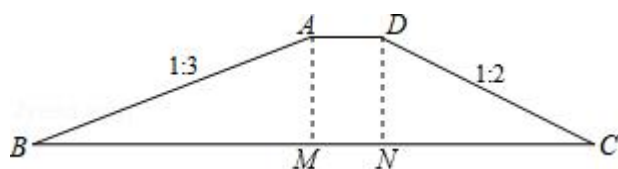
答：背水坡 AB 的长度为 $24\sqrt{10}$ 米；

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle DNC \text{ 中, } \frac{DN}{CN} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CN = 48 \text{ (米)},$$

$$\therefore BC = 72 + 6 + 48 = 126 \text{ (米)},$$

答：坝底 BC 的长度为 126 米.

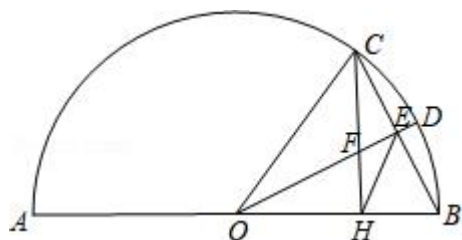


【点评】此题考查了坡度坡角问题．此题难度适中，注意构造直角三角形，并借助于解直角三角形的知识求解是关键．

22. (10分) 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， C 为圆上一点， D 是 $\widehat{BC}$ 的中点， $CH \perp AB$ 于 H ，垂足为 H ，联 OD 交弦 BC 于 E ，交 CH 于 F ，联结 EH ．

(1) 求证： $\triangle BHE \sim \triangle BCO$ ．

(2) 若 $OC = 4$ ， $BH = 1$ ，求 EH 的长．



【分析】(1) 根据两角对应相等的两个三角形相似即可证明；

(2) 由 $\triangle BHE \sim \triangle BCO$ ，可得 $\frac{BH}{BC} = \frac{BE}{OB}$ ，由此即可解决问题；

【解答】(1) 证明： $\because OD$ 为圆的半径， D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，

$$\therefore OD \perp BC, BE = CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because CH \perp AB,$$

$$\therefore \angle CHB = 90^\circ,$$

$$\therefore HE = \frac{1}{2}BC = BE,$$

$$\therefore \angle B = \angle EHB,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle B = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle EHB = \angle OCB,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle BHE \sim \triangle BCO.$$

(2) 解： $\because \triangle BHE \sim \triangle BCO$,

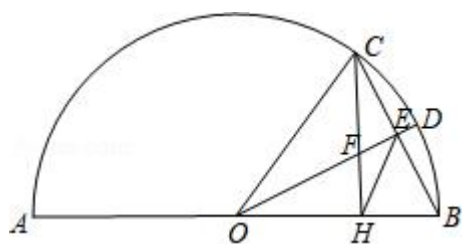
$$\therefore \frac{BH}{BC} = \frac{BE}{OB},$$

$$\because OC = 4, BH = 1,$$

$$\therefore OB = 4, \text{ 得 } \frac{1}{2BE} = \frac{BE}{4},$$

$$\text{解得 } BE = \sqrt{2},$$

$$\therefore EH = BE = \sqrt{2}.$$

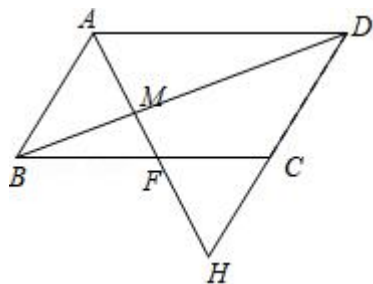


【点评】本题考查垂径定理，相似三角形的判定和性质，圆心角、弧、弦之间的关系等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

23. (12分) 如图， M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线上的一点，射线 AM 与 BC 交于点 F ，与 DC 的延长线交于点 H ．

(1) 求证： $AM^2 = MF \cdot MH$ ．

(2) 若 $BC^2 = BD \cdot DM$ ，求证： $\angle AMB = \angle ADC$ ．



【分析】(1) 根据平行线分线段成比例定理即可解决问题；

(2) 由 $\triangle ADM \sim \triangle BDA$ ，推出 $\angle AMD = \angle BAD$ ，由 $AB \parallel CD$ ，推出 $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ ，由 $\angle AMB + \angle AMD = 180^\circ$ ，可得 $\angle AMB = \angle ADC$ ；

【解答】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{AM}{MF} = \frac{DM}{MB}, \frac{DM}{MB} = \frac{MH}{AM},$$

$$\therefore \frac{AM}{MF} = \frac{MH}{AM}, \text{ 即 } AM^2 = MF \cdot MH.$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, \text{ 又 } \because BC^2 = BD \cdot DM,$$

$$\therefore AD^2 = BD \cdot DM \text{ 即 } \frac{AD}{DB} = \frac{DM}{AD},$$

$$\text{又 } \because \angle ADM = \angle BDA,$$

$$\therefore \triangle ADM \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \angle AMD = \angle BAD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\because \angle AMB + \angle AMD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle ADC.$$

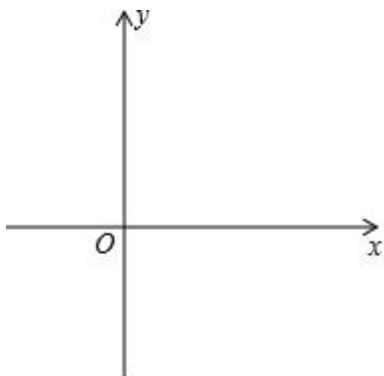
【点评】 本题考查平行四边形的性质和判定，平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

24. (12分) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 6)$, 点 $B(1, 3)$, 直线 $l_1: y = kx (k \neq 0)$, 直线 $l_2: y = -x - 2$, 直线 l_1 经过抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的顶点 P , 且 l_1 与 l_2 相交于点 C , 直线 l_2 与 x 轴、 y 轴分别交于点 D 、 E . 若把抛物线上下平移, 使抛物线的顶点在直线 l_2 上 (此时抛物线的顶点记为 M), 再把抛物线左右平移, 使抛物线的顶点在直线 l_1 上 (此时抛物线的顶点记为 N).

(1) 求抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的解析式.

(2) 判断以点 N 为圆心, 半径长为 4 的圆与直线 l_2 的位置关系, 并说明理由.

(3) 设点 F 、 H 在直线 l_1 上 (点 H 在点 F 的下方), 当 $\triangle MHF$ 与 $\triangle OAB$ 相似时, 求点 F 、 H 的坐标 (直接写出结果).



【分析】 (1) 把点 A 、 B 坐标代入 $y = x^2 + bx + c$, 即可求解;

(2) 求而出点 N 、点 C 的坐标, 计算 NC 得长度即可求解;

(3) 分点 F 在直线 l_2 下方、点 F 在直线 l_2 上方两种情况, 求解即可.

【解答】解：（1）把点 A 、 B 坐标代入 $y = x^2 + bx + c$ 得： $\begin{cases} c=6 \\ 3=1+b+c \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} b=-4 \\ c=6 \end{cases}$ ，

则抛物线的表达式为： $y = x^2 - 4x + 6$ ；

$$(2) y = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2,$$

故顶点坐标为 $(2, 2)$ ，

把点 P 坐标代入直线 l_1 表达式得： $2 = 2k$ ，即 $k = 1$ ，

$\therefore$ 直线 l_1 表达式为： $y = x$ ，

设：点 $M(2, m)$ 代入直线 l_2 的表达式得： $m = -4$ ，

即点 M 的坐标为 $(2, -4)$ ，

设：点 $N(n, -4)$ 代入直线 l_1 表达式得： $n = -4$ ，

则点 N 坐标为 $(-4, -4)$ ，

同理得：点 D 、 E 的坐标分别为 $(-2, 0)$ 、 $(0, -2)$ 、

联立 l_1 、 l_2 得 $\begin{cases} y=x \\ y=-x-2 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ ，即：点 C 的坐标为 $(-1, -1)$ ，

$$\therefore OC = \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}, CE = \sqrt{2} = OC,$$

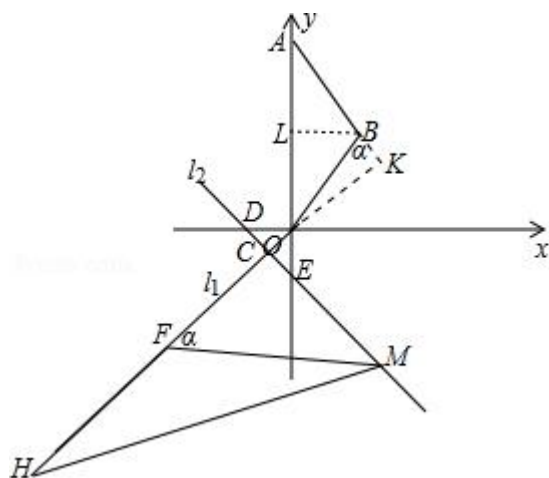
$\therefore$ 点 C 在直线 $y = x$ 上， $\therefore \angle COE = \angle OEC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle OCE = 90^\circ$ ，即： $NC \perp l_2$ ，

$$NC = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1+4)^2} = 3\sqrt{2} > 4,$$

$\therefore$ 以点 N 为圆心，半径长为 4 的圆与直线 l_2 相离；

（3）①当点 F 在直线 l_2 下方时，



设： $\angle OBK = \alpha$ ，点 A 、 B 的坐标分别为 $(0, 6)$ 、 $(1, 3)$ ，

则 $AO = 6$ ， $AB = BO = \sqrt{10}$ ，

过点 B 作 $BL \perp y$ 轴交于点 L , 则 $\tan \angle OAB = \frac{1}{3}$, $\sin \angle OAB = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$$OK = AO \sin \angle OAB = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 6 = \frac{6}{\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = \frac{OK}{OB} = \frac{3}{5},$$

$\therefore$ 等腰 $\triangle MHF$ 和等腰 $\triangle OAB$ 相似,

$\therefore \angle HFM = \angle ABO$, 则 $\angle KBO = \angle OFM = \alpha$,

点 C 、 M 的坐标分别为 $(-1, -1)$ 、 $(2, -4)$,

$$\text{则 } CM = 3\sqrt{2}, \quad FM = \frac{CM}{\sin \alpha} = 5\sqrt{2}, \quad CF = 4\sqrt{2}.$$

$OF = OC + FC = 5\sqrt{2}$, 则点 F 的坐标为 $(-5, -5)$,

$$\therefore FH = FM = 5\sqrt{2},$$

$OH = OF + FH = 10\sqrt{2}$, 则点 H 的坐标为 $(-10, -10)$;

②当点 F 在直线 l_2 上方时,

同理可得点 F 的坐标为 $(8, 8)$, 点 H 的坐标为 $(3, 3)$ 或 $(-10, 10)$;

故: 点 F 、 H 的坐标分别为 $(-5, -5)$ 、 $(-10, -10)$ 或 $(8, 8)$ 、 $(3, 3)$ 或 $(8, 8)$ 、 $(-10, -10)$.

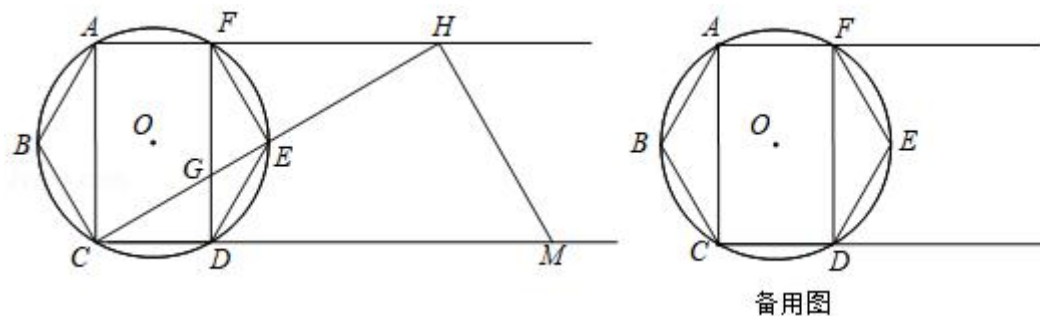
【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 难点在 (3), 利用等腰三角形相似得出 $\angle KBO = \angle OFM = \alpha$, 再利用解直角三角形的方法求线段的长度, 从而求解.

25. (14 分) 已知多边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形, 联结 AC 、 FD , 点 H 是射线 AF 上的一个动点, 联结 CH , 直线 CH 交射线 DF 于点 G , 作 $MH \perp CH$ 交 CD 的延长线于点 M , 设 $\odot O$ 的半径为 r ($r > 0$).

(1) 求证: 四边形 $ACDF$ 是矩形.

(2) 当 CH 经过点 E 时, $\odot M$ 与 $\odot O$ 外切, 求 $\odot M$ 的半径 (用 r 的代数式表示).

(3) 设 $\angle HCD = \alpha$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), 求点 C 、 M 、 H 、 F 构成的四边形的面积 (用 r 及含 α 的三角比的式子表示).



【分析】 (1) 根据正多边形的性质和矩形的判定解答即可;

(3) 作 $HQ \perp CM$ 垂足为 Q , 由 $\angle HCD = \alpha$, $MH \perp CH$ 可得 $\angle QHM = \alpha$, 再由 $AF \parallel CD$, $AC \perp CD$ 知 $HQ = AC = \sqrt{3}r$, 继而求得 $CQ = \sqrt{3}r \cdot \cot \alpha$, $MQ = \sqrt{3}r \cdot \tan \alpha$, 则 $CM = \sqrt{3}r(\tan \alpha + \cot \alpha)$, 再分 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 、 $\alpha = 60^\circ$ 和 $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ 三种情况分别求解可得.

$$\therefore AB = AC, \angle ABC = \angle BAF = \frac{180 \times (6-2)}{6} = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ \quad ,$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ, \text{ 得 } \angle CAF = 90^\circ,$$

同理 $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是矩形.

(2) 如图 1, 连接 OC 、 OD ,

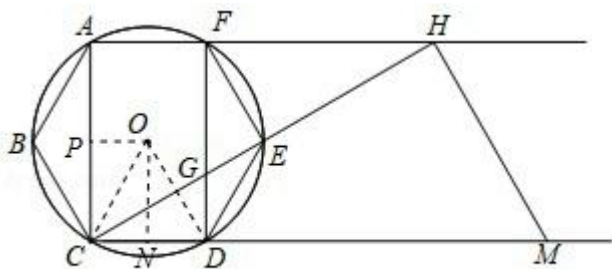


图 1

由题意得： $OC = OD$ ， $\angle COD = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle OCD$ 为等边三角形,

$$\therefore CD = OC = r, \quad \angle OCD = 60^\circ,$$

作 $ON \perp CD$, 垂足为 N , 即 ON 为 CD 弦的弦心距,

$$\therefore CN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}r, \text{ 由 } \sin \angle OCD = \frac{ON}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 得 } ON = \frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

作 $OP \perp AC$ 垂足为 P , 即 OP 为 AC 弦的弦心距,

$$\therefore CP = \frac{1}{2}AC,$$

$$\because \angle OCP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore CP = OC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}r, \text{ 得 } AC = \sqrt{3}r,$$

当 CH 经过点 E 时, 可知 $\angle ECD = 30^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是矩形,

$$\therefore AF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AHC = \angle ECD = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } CH = 2AC = 2\sqrt{3}r,$$

$$\because MH \perp CH,$$

$$\therefore \cos \angle HCM = \frac{CH}{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } CM = 4r,$$

$$\therefore MN = \frac{7}{2}r,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle MON \text{ 中, } OM = \sqrt{ON^2 + MN^2} = \sqrt{13}r,$$

$\therefore \odot M$ 与 $\odot O$ 外切,

$$\therefore r_Q + r_M = OM, \text{ 即 } \odot M \text{ 的半径为 } (\sqrt{13} - 1)r.$$

(3) 如图 2,

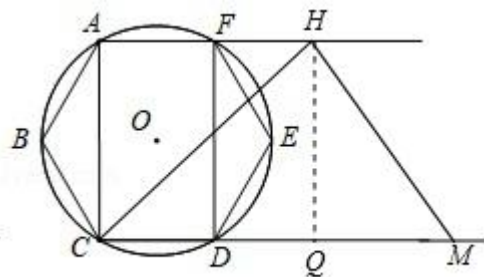


图 2

作 $HQ \perp CM$ 垂足为 Q , 由 $\angle HCD = \alpha$, $MH \perp CH$ 可得 $\angle QHM = \alpha$,

$$\because AF \parallel CD, AC \perp CD,$$

$$\therefore HQ = AC = \sqrt{3}r,$$

$$\therefore CQ = HQ \cdot \cot \angle HCQ = \sqrt{3}r \cdot \cot \alpha, \quad MQ = HQ \cdot \tan \angle QHM = \sqrt{3}r \cdot \tan \alpha,$$

$$\text{即 } CM = \sqrt{3}r (\tan \alpha + \cot \alpha),$$

① 当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 点 H 在边 AF 的延长线上, 此时点 C 、 M 、 H 、 F 构成的四边形为梯形,

$$\because FH = DQ = CQ - CD = \sqrt{3}r \cdot \cot \alpha - r,$$

$$\therefore S = \frac{(FH + CM) \cdot HQ}{2} = \frac{(6\cot \alpha + 3\tan \alpha - \sqrt{3}) \cdot r^2}{2}.$$

②当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 点 H 与点 F 重合, 此时点 C 、 M 、 H 、 F 构成三角形, 非四边形, 所以舍去.

③当 $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 点 H 在边 AF 上, 此时点 C 、 M 、 H 、 F 构成的四边形为梯形,

$$\because FH = DQ = CD - CQ = r - \sqrt{3}r \cdot \cot \alpha,$$

$$\therefore S = \frac{(FH + CM) \cdot HQ}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 3\tan \alpha) \cdot r^2}{2}.$$

综上所述, 当 $\angle HCD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 时, 点 C 、 M 、 H 、 F 构成的四边形的面积为

$$\frac{(6\cot \alpha + 3\tan \alpha - \sqrt{3}) \cdot r^2}{2} \text{ 或 } \frac{(\sqrt{3} + 3\tan \alpha) \cdot r^2}{2}.$$

【点评】 本题是圆的综合问题, 解题的关键是掌握矩形的判定与性质、垂径定理、平行线的性质、圆与圆的位置关系、三角函数的应用及分类讨论思想的运用等知识点.