

2019 年上海市虹口区中考数学一模试卷

一、选择题

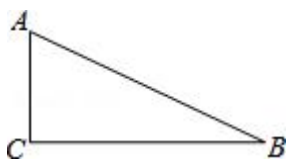
1. (4 分) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 y 轴交点的坐标是 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(0, -1)$ D. $(0, 1)$

2. (4 分) 如果抛物线 $y = (a+2)x^2$ 开口向下, 那么 a 的取值范围为 ()

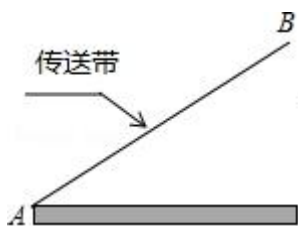
- A. $a > 2$ B. $a < 2$ C. $a > -2$ D. $a < -2$

3. (4 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC = 5$, $AB = 13$, 那么 $\cos A$ 的值为 ()



- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{5}{12}$

4. (4 分) 如图, 传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 $1:2$, 物体从地面沿着该斜坡前进了 10 米, 那么物体离地面的高度为 ()

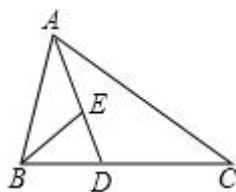


- A. 5 米 B. $5\sqrt{3}$ 米 C. $2\sqrt{5}$ 米 D. $4\sqrt{5}$ 米

5. (4 分) 如果向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反, 且长度为 3, 那么用向量 $\vec{e}$ 表示向量 $\vec{a}$ 为 ()

- A. $\vec{a} = 3\vec{e}$ B. $\vec{a} = -3\vec{e}$ C. $\vec{e} = 3\vec{a}$ D. $\vec{e} = -3\vec{a}$

6. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , 点 E 在 AD 上, 如果 $\angle ABE = \angle C$, $AE = 2ED$, 那么 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 的周长比为 ()



- A. 1:2 B. 2:3 C. 1:4 D. 4:9

二、填空题

7. (4分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{a+b}{a}$ 的值为_____.

8. (4分) 计算: $2\vec{a} - (3\vec{b} - \vec{a}) =$ _____

9. (4分) 如果抛物线 $y = ax^2 + 2$ 经过点 $(1, 0)$, 那么 a 的值为_____.

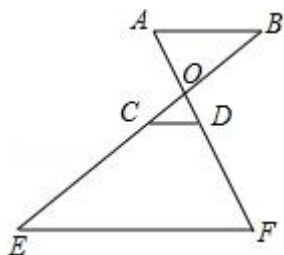
10. (4分) 如果抛物线 $y = (m-1)x^2$ 有最低点, 那么 m 的取值范围为_____.

11. (4分) 如果抛物线 $y = (x-m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$, 那么它的顶点坐标为_____.

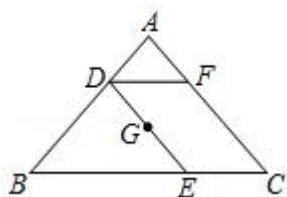
12. (4分) 如果点 $A(-5, y_1)$ 与点 $B(-2, y_2)$ 都在抛物线 $y = (x+1)^2 + 1$ 上, 那么 y_1 _____ y_2 (填 “>”、“<” 或 “=”)

13. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\sin A = \frac{2}{3}$, $BC = 4$, 那么 $AB =$ _____.

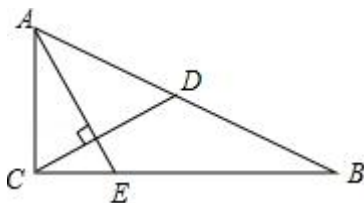
14. (4分) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 点 C 、 D 分别在 BE 、 AF 上, 如果 $BC = 6$, $CE = 9$, $AF = 10$, 那么 DF 的长为_____.



15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作 $DE \parallel AC$ 分别交边 AB 、 BC 于点 D 、 E , 过点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AC 于点 F , 如果 $DF = 4$, 那么 BE 的长为_____.

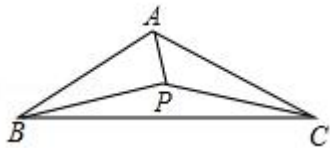


16. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 为 AB 边上的中线, 过点 A 作 $AE \perp CD$ 交 BC 于点 E , 如果 $AC = 2$, $BC = 4$, 那么 $\cot \angle CAE =$ _____.

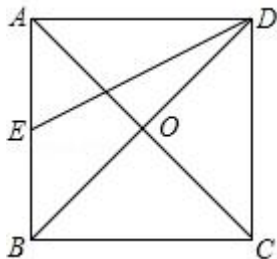


17. (4分) 定义: 如果 $\triangle ABC$ 内有一点 P , 满足 $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$, 那么称点 P 为 $\triangle ABC$ 的布罗卡尔点, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 点 P 为 $\triangle ABC$ 的布罗卡

尔点，如果 $PA = 2$ ，那么 $PC =$ _____.



18. (4分) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 O 为对角线 AC 、 BD 的交点，点 E 为边 AB 的中点， $\triangle BED$ 绕着点 B 旋转至 $\triangle BD_1E_1$ ，如果点 D 、 E 、 D_1 在同一直线上，那么 EE_1 的长为_____.



三、解答题

19. (10分) 计算：
$$\frac{2\cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ}{\tan^2 60^\circ - 4\cos 45^\circ}$$

20. (10分) 已知抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 6$.

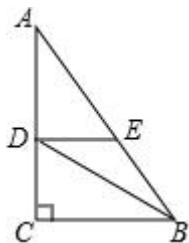
(1) 请用配方法求出顶点的坐标；

(2) 如果该抛物线沿 x 轴向左平移 m ($m > 0$) 个单位后经过原点，求 m 的值.

21. (10分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\cot A = \frac{4}{3}$ ， $BC = 6$ ，点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上，且 $DE \parallel BC$ ， $\tan \angle DBC = \frac{1}{2}$.

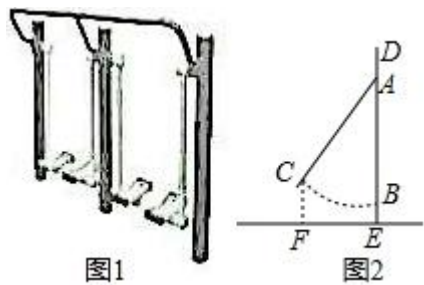
(1) 求 AD 的长；

(2) 如果 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$.



22. (10分) 如图 1 是小区常见的漫步机，当人踩在踏板上，握住扶手，像走路一样抬腿，就会带动踏板连杆绕轴旋转，如图 2，从侧面看，立柱 DE 高 1.8 米，踏板静止时踏板连杆与 DE 上的线段 AB 重合， BE 长为 0.2 米，当踏板连杆绕着点 A 旋转到 AC 处时，测得

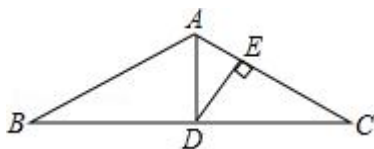
$\angle CAB = 37^\circ$ ，此时点 C 距离地面的高度 CF 为 0.45 米，求 AB 和 AD 的长（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ）



23. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是边 BC 的中点， $DE \perp AC$ ，垂足为点 E 。

(1) 求证： $DE \cdot CD = AD \cdot CE$ ；

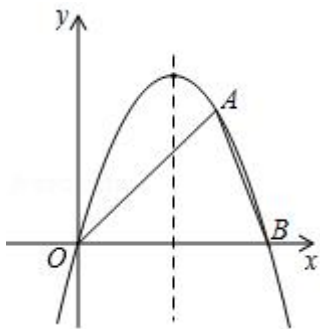
(2) 设 F 为 DE 的中点，连接 AF 、 BE ，求证： $AF \cdot BC = AD \cdot BE$ 。



24. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于原点 O 和点 $B(4, 0)$ ，点 $A(3, m)$ 在抛物线上。

(1) 求抛物线的表达式，并写出它的对称轴；

(2) 求 $\tan \angle OAB$ 的值。



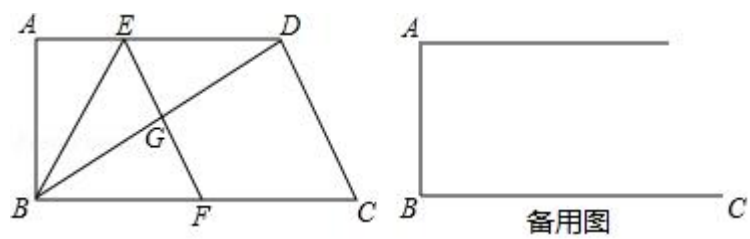
25. (14 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，点 E 为边 AD 上一点，将 ABE 沿 BE 翻折，点 A 落在对角线 BD 上的点 G 处，连接 EG 并延长交射线 BC 于点 F 。

(1) 如果 $\cos \angle DBC = \frac{2}{3}$ ，求 EF 的长；

(2) 当点 F 在边 BC 上时，连接 AG ，设 $AD = x$ ， $\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BEF}} = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式

并写出 x 的取值范围；

(3) 连接 CG ，如果 $\triangle FCG$ 是等腰三角形，求 AD 的长。



2019 年上海市虹口区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. (4 分) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 y 轴交点的坐标是 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(0, -1)$ D. $(0, 1)$

【分析】通过计算自变量为对应的函数值可得到抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 y 轴交点的坐标.

【解答】解：当 $x = 0$ 时， $y = x^2 - 1 = -1$,

所以抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0, -1)$.

故选：C.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式，也考查了二次函数的性质.

2. (4 分) 如果抛物线 $y = (a+2)x^2$ 开口向下，那么 a 的取值范围为 ()

- A. $a > 2$ B. $a < 2$ C. $a > -2$ D. $a < -2$

【分析】由抛物线的开口向下可得出 $a+2 < 0$ ，解之即可得出结论.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (a+2)x^2$ 开口向下，

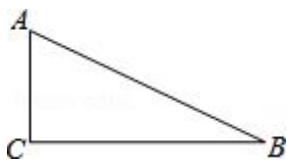
$$\therefore a+2 < 0,$$

$$\therefore a < -2.$$

故选：D.

【点评】本题考查了二次函数图象与系数的关系，牢记“ $a > 0$ 时，抛物线向上开口；当 $a < 0$ 时，抛物线向下开口.”是解题的关键.

3. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，如果 $AC = 5$ ， $AB = 13$ ，那么 $\cos A$ 的值为 ()



- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{5}{12}$

【分析】锐角 A 的邻边 b 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$.

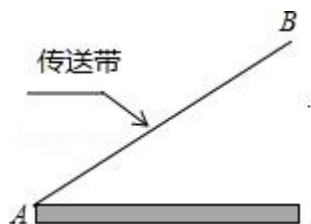
【解答】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $AB = 13$,

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13},$$

故选：A.

【点评】 本题主要考查了锐角三角函数的定义，锐角 A 的邻边 b 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的余弦.

4. (4分) 如图，传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 $1:2$ ，物体从地面沿着该斜坡前进了 10 米，那么物体离地面的高度为 ()



- A. 5 米 B. $5\sqrt{3}$ 米 C. $2\sqrt{5}$ 米 D. $4\sqrt{5}$ 米

【分析】 作 $BC \perp$ 地面于点 C ，根据坡度的概念、勾股定理列式计算即可.

【解答】 解：作 $BC \perp$ 地面于点 C ，

设 $BC = x$ 米，

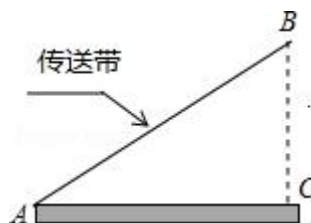
$\therefore$ 传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 $1:2$ ，

$\therefore AC = 2x$ 米，

由勾股定理得， $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，即 $(2x)^2 + x^2 = 10^2$ ，

解得， $x = 2\sqrt{5}$ ，即 $BC = 2\sqrt{5}$ 米，

故选：C.



【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，掌握坡度坡角的概念是解题的关键.

5. (4分) 如果向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反，且长度为 3，那么用向量 $\vec{e}$ 表示向量 $\vec{a}$ 为 ()

- A. $\vec{a} = 3\vec{e}$ B. $\vec{a} = -3\vec{e}$ C. $\vec{e} = 3\vec{a}$ D. $\vec{e} = -3\vec{a}$

【分析】 根据平面向量的定义即可解决问题.

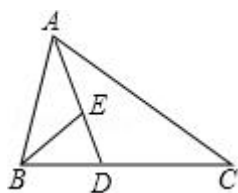
【解答】解：∵向量 $\vec{e}$ 为单位向量，向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{e}$ 方向相反，

$$\therefore \vec{a} = -3\vec{e}.$$

故选：B.

【点评】本题考查平面向量的性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考基础题.

6. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ，点 E 在 AD 上，如果 $\angle ABE = \angle C$ ， $AE = 2ED$ ，那么 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 的周长比为 ()



- A. 1: 2 B. 2: 3 C. 1: 4 D. 4: 9

【分析】根据已知条件先求得 $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle BED} = 2: 1$ ，再根据三角形相似求得 $S_{\triangle ACD} = \frac{9}{4}S_{\triangle ABE}$ 即可求得.

【解答】解：∵ $AD: ED = 3: 1$,

$$\therefore AE: AD = 2: 3,$$

$$\because \angle ABE = \angle C, \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore L_{\triangle ABE} : L_{\triangle ACD} = 2: 3,$$

故选：B.

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，不同底等高的三角形面积的求法等，等量代换是本题的关键.

二、填空题

7. (4分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，那么 $\frac{a+b}{a}$ 的值为 $\frac{5}{2}$.

【分析】直接利用已知把 a, b 用同一未知数表示，进而计算得出答案.

【解答】解：∵ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \text{设 } a = 2x, \text{ 则 } b = 3x,$$

$$\text{那么 } \frac{a+b}{a} = \frac{2x+3x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点评】此题主要考查了比例的性质，正确表示出 a, b 的值是解题关键.

8. (4分) 计算： $2\vec{a} - (3\vec{b} - \vec{a}) = \underline{3\vec{a} - 3\vec{b}}$

【分析】实数的加减计算法则同样适用于平面向量的加减计算法则.

【解答】解：原式 $= 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{a} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$.

故答案是： $3\vec{a} - 3\vec{b}$.

【点评】考查了平面向量，掌握平面向量的加减计算法则即可解题，属于基础计算题.

9. (4分) 如果抛物线 $y = ax^2 + 2$ 经过点 $(1, 0)$ ，那么 a 的值为 $\underline{-2}$.

【分析】把已知点的坐标代入抛物线解析式可求出 a 的值.

【解答】解：把 $(1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + 2$ 得 $a + 2 = 0$ ，解得 $a = -2$.

故答案为 -2 .

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

10. (4分) 如果抛物线 $y = (m - 1)x^2$ 有最低点，那么 m 的取值范围为 $\underline{m > 1}$.

【分析】由于抛物线 $y = (m - 1)x^2$ 有最低点，这要求抛物线必须开口向上，由此可以确定 m 的范围.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (m - 1)x^2$ 有最低点，

$$\therefore m - 1 > 0,$$

即 $m > 1$.

故答案为 $m > 1$.

【点评】本题主要考查二次函数的最值的知识点，解答此题要掌握二次函数图象的特点，本题比较基础.

11. (4分) 如果抛物线 $y = (x - m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，那么它的顶点坐标为 $\underline{(1, 2)}$.

【分析】首先根据对称轴是直线 $x = 1$ ，从而求得 m 的值，然后根据顶点式直接写出顶点坐标；

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (x - m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，

$$\therefore m = 1,$$

$\therefore$ 解析式 $y = (x - 1)^2 + 2$,

$\therefore$ 顶点坐标为: $(1, 2)$,

故答案为: $(1, 2)$.

【点评】 本题主要考查了二次函数的性质, 熟练掌握顶点式是解题的关键, 难度适中.

12. (4 分) 如果点 $A(-5, y_1)$ 与点 $B(-2, y_2)$ 都在抛物线 $y = (x+1)^2 + 1$ 上, 那么 y_1 $>$ y_2 (填 “ $>$ ”、“ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

【分析】 利用二次函数的性质得到当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 然后利用自变量的大小关系得到 y_1 与 y_2 的大小关系.

【解答】 解: 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

而抛物线开口向上,

所以当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

所以 $y_1 > y_2$.

故答案为 $>$.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了二次函数的性质.

13. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\sin A = \frac{2}{3}$, $BC = 4$, 那么 $AB =$ 6.

【分析】 由 $\sin A = \frac{BC}{AB}$ 知 $AB = \frac{BC}{\sin A}$, 代入计算可得.

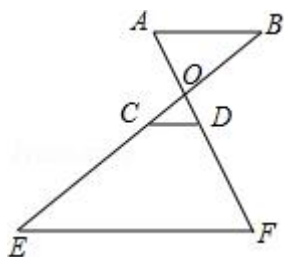
【解答】 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$, 且 $BC = 4$,

$$\therefore AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6,$$

故答案为: 6.

【点评】 本题主要考查解直角三角形, 解题的关键是熟练掌握三角函数的定义.

14. (4 分) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 点 C 、 D 分别在 BE 、 AF 上, 如果 $BC = 6$, $CE = 9$, $AF = 10$, 那么 DF 的长为 6.



【分析】根据平行线分线段成比例、比例的基本性质解答即可.

【解答】解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{AF}{DF},$$

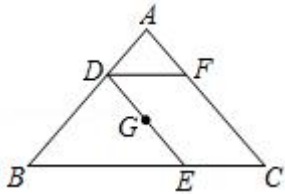
$$\therefore \frac{6+9}{9} = \frac{10}{DF},$$

$$\therefore DF = 6,$$

故答案为: 6.

【点评】本题考查了平行线分线段成比例、比例的性质; 由平行线分线段成比例定理得出比例式求出 AF 是解决问题的关键.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 为 ABC 的重心, 过点 G 作 $DE \parallel AC$ 分别交边 AB 、 BC 于点 D 、 E , 过点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AC 于点 F , 如果 $DF = 4$, 那么 BE 的长为 8.



【分析】连接 BG 并延长交 AC 于 H , 根据 G 为 ABC 的重心, 得到 $\frac{BG}{HG} = 2$, 根据平行四边形的性质得到 $CE = DF = 4$, 根据相似三角形的性质即可得到结论

【解答】解: 连接 BG 并延长交 AC 于 H ,

$\because G$ 为 ABC 的重心,

$$\therefore \frac{BG}{HG} = 2,$$

$\because DE \parallel AC, DF \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形,

$$\therefore CE = DF = 4,$$

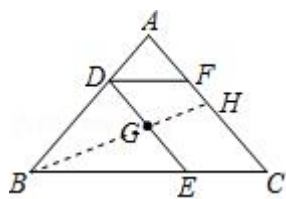
$\because GE \parallel CH$,

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle CBH,$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{BG}{GH} = 2,$$

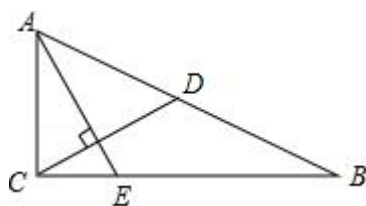
$$\therefore BE = 8,$$

故答案为: 8.



【点评】 本题考查了三角形重心的性质，平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定与性质，难度适中．准确作出辅助线是解题的关键．

16. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为 AB 边上的中线，过点 A 作 $AE \perp CD$ 交 BC 于点 E ，如果 $AC = 2$ ， $BC = 4$ ，那么 $\cot \angle CAE = \underline{2}$ ．



【分析】 根据直角三角形的性质得到 $AD = CD = BD$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle ACD = \angle CAD$ ， $\angle DCB = \angle B$ ，根据余角的性质得到 $\angle CAE = \angle B$ ，于是得到结论．

【解答】 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为 AB 边上的中线，

$$\therefore AD = CD = BD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle CAD, \angle DCB = \angle B,$$

$$\because AE \perp CD,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle ACD = \angle B + \angle CAD = 90^\circ,$$

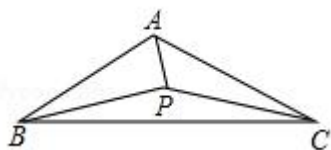
$$\therefore \angle CAE = \angle B,$$

$$\therefore \cot \angle CAE = \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{2} = 2,$$

故答案为：2．

【点评】 本题考查了解直角三角形，直角三角形斜边上的中线定义斜边的一半，余角的性质，等腰三角形的性质，熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键．

17. (4分) 定义：如果 $\triangle ABC$ 内有一点 P ，满足 $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ ，那么称点 P 为 $\triangle ABC$ 的布罗卡尔点，如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ，点 P 为 $\triangle ABC$ 的布罗卡尔点，如果 $PA = 2$ ，那么 $PC = \underline{\frac{16}{5}}$ ．



【分析】根据两角对应相等的两三角形相似得出 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，利用相似三角形对应边的比相等即可求出 PC 。

【解答】解： $\because AB = AC$ ，
 $\therefore \angle ACB = \angle ABC$ ，
 $\because \angle PCB = \angle PBA$ ，
 $\therefore \angle ACB - \angle PCB = \angle ABC - \angle PBA$ ，
 即 $\angle ACP = \angle CBP$ 。

在 $\triangle ACP$ 与 $\triangle CBP$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACP = \angle CBP \\ \angle PAC = \angle PCB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，

$$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{AC}{BC}$$

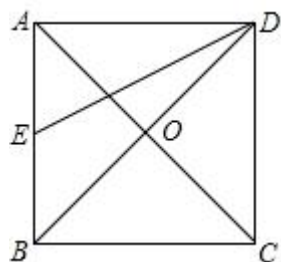
$\because AC = 5$ ， $BC = 8$ ， $PA = 2$ ，

$$\therefore PC = \frac{2 \times 8}{5} = \frac{16}{5}.$$

故答案为 $\frac{16}{5}$ 。

【点评】本题考查等腰三角形的性质、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是证明 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，属于中考常考题型。

18. (4分) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4，点 O 为对角线 AC 、 BD 的交点，点 E 为边 AB 的中点， $\triangle BED$ 绕着点 B 旋转至 $\triangle BD_1E_1$ ，如果点 D 、 E 、 D_1 在同一直线上，那么 EE_1 的长为 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ 。



【分析】根据正方形的性质得到 $AB = AD = 4$ ，根据勾股定理得到 $BD = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$ ， $= \sqrt{AD^2 + AE^2} = 2\sqrt{5}$ ，过 B 作 $BF \perp DD_1$ 于 F ，根据相似三角形的性质得到 $EF = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，求得 $DF = 2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$ ，根据旋转的性质得到 $BD_1 = BD$ ， $\angle D_1BD = \angle E_1BE$ ， $BE_1 = BE$ ，根据相似三角形的性质即可得到结论。

【解答】解：∵正方形 $ABCD$ 的边长为 4，

$$\therefore AB = AD = 4,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2},$$

∵点 E 为边 AB 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = 2\sqrt{5},$$

过 B 作 $BF \perp DD_1$ 于 F ，

$$\therefore \angle DAE = \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BEF,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FEB,$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{BE}{DE},$$

$$\therefore \frac{EF}{2} = \frac{2}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore EF = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore DF = 2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}},$$

∵ $\triangle BED$ 绕着点 B 旋转至 $\triangle BD_1E_1$ ，

$$\therefore BD_1 = BD, \angle D_1BD = \angle E_1BE, BE_1 = BE,$$

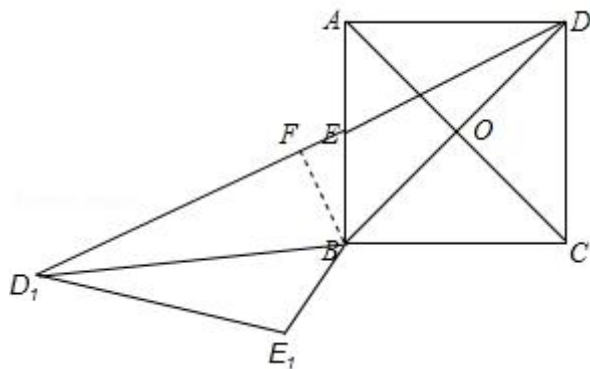
$$\therefore DD_1 = 2DF = \frac{24}{\sqrt{5}}, \triangle D_1BD \sim \triangle E_1BE,$$

$$\therefore \frac{EE_1}{DD_1} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore \frac{EE_1}{\frac{24}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{4\sqrt{2}},$$

$$\therefore EE_1 = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

故答案为： $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质，正方形的性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，正确的作出图形是解题的关键．

三、解答题

19. (10 分) 计算: $\frac{2\cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ}{\tan^2 60^\circ - 4\cos 45^\circ}$

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入进而得出答案．

【解答】 解：原式 = $\frac{2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{1}{2}}{(\sqrt{3})^2 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$= \frac{2 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$= 3 + 2\sqrt{2}.$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键．

20. (10 分) 已知抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 6$.

(1) 请用配方法求出顶点的坐标；

(2) 如果该抛物线沿 x 轴向左平移 m ($m > 0$) 个单位后经过原点，求 m 的值．

【分析】 (1) 直接利用配方法求出二次函数的顶点坐标即可；

(2) 直接求出图象与 x 轴的交点，进而得出平移规律．

【解答】 解：(1) $y = 2x^2 - 4x - 6$

$$= 2(x^2 - 2x) - 6$$

$$= 2(x - 1)^2 - 8,$$

故该函数的顶点坐标为: (1, -8);

(2) 当 $y=0$ 时, $0=2(x-1)^2-8$,

解得: $x_1=-1, x_2=3$,

即图象与 x 轴的交点坐标为: $(-1, 0), (3, 0)$,

故该抛物线沿 x 轴向左平移 3 个单位后经过原点,

即 $m=3$.

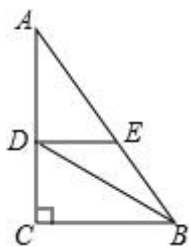
【点评】 此题主要考查了二次函数图象与几何变换, 正确得出顶点坐标是解题关键.

21. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\cot A=\frac{4}{3}$, $BC=6$, 点 D 、 E 分别在边 AC 、

AB 上, 且 $DE\parallel BC$, $\tan\angle DBC=\frac{1}{2}$.

(1) 求 AD 的长;

(2) 如果 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$.



【分析】 (1) 通过解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 求得 $AC=8$, 解 $\text{Rt}\triangle BCD$ 得到 $CD=3$, 易得 $AD=AC-CD=5$;

(2) 由平行线截线段成比例求得 DE 的长度, 利用向量表示即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\cot A=\frac{4}{3}$, $BC=6$,

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{AC}{6} = \frac{4}{3}, \text{ 则 } AC=8.$$

又 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan\angle DBC=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{DC}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CD=3.$$

$$\therefore AD=AC-CD=5.$$

(2) $\because DE\parallel BC$,

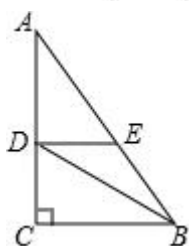
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{5}{8}.$$

$$\therefore DE = \frac{5}{8}BC.$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}.$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{5}{8}\vec{b} - \frac{5}{8}\vec{a}.$$



【点评】考查了平面向量，解直角三角形，平行线的性质．注意：向量是有方向的．

22. (10分) 如图1是小区常见的漫步机，当人踩在踏板上，握住扶手，像走路一样抬腿，就会带动踏板连杆绕轴旋转，如图2，从侧面看，立柱DE高1.8米，踏板静止时踏板连杆与DE上的线段AB重合，BE长为0.2米，当踏板连杆绕着点A旋转到AC处时，测得 $\angle CAB = 37^\circ$ ，此时点C距离地面的高度CF为0.45米，求AB和AD的长（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ）



图1

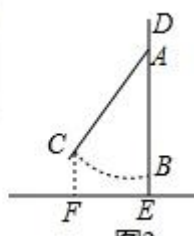


图2

【分析】过点C作 $CG \perp AB$ 于G，得到四边形CFEG是矩形，根据矩形的性质得到 $EG = CF = 0.45$ ，设 $AD = x$ ，求得 $AE = 1.8 - x$ ， $AC = AB = AE - BE = 1.6 - x$ ， $AG = AE - CF = 1.35 - x$ ，根据三角函数的定义列方程即可得到结论．

【解答】解：过点C作 $CG \perp AB$ 于G，

则四边形CFEG是矩形，

$$\therefore EG = CF = 0.45,$$

设 $AD = x$ ，

$$\therefore AE = 1.8 - x,$$

$$\therefore AC = AB = AE - BE = 1.6 - x, \quad AG = AE - CF = 1.35 - x,$$

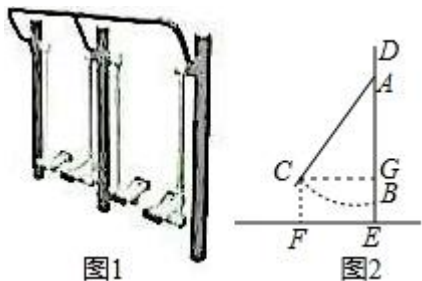
在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中， $\angle AGC = 90^\circ$ ， $\angle CAG = 37^\circ$ ，

$$\cos \angle CAG = \frac{AG}{AC} = \frac{1.35-x}{1.6-x} = 0.8,$$

解得: $x = 0.35$,

$\therefore AD = 0.35$ 米, $AB = 1.25$ 米,

答: AB 和 AD 的长分别为 1.25 米, 0.35 米.

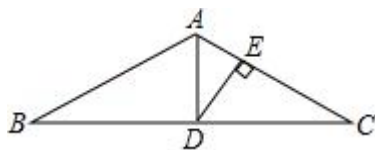


【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用, 熟练应用锐角三角函数关系是解题关键.

23. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是边 BC 的中点, $DE \perp AC$, 垂足为点 E .

(1) 求证: $DE \cdot CD = AD \cdot CE$;

(2) 设 F 为 DE 的中点, 连接 AF 、 BE , 求证: $AF \cdot BC = AD \cdot BE$.



【分析】(1) 由 $AB = AC$, D 是边 BC 的中点, 利用等腰三角形的性质可得出 $\angle ADC = 90^\circ$, 由同角的余角相等可得出 $\angle ADE = \angle DCE$, 结合 $\angle AED = \angle DEC = 90^\circ$ 可证出 $\triangle AED \sim \triangle DEC$, 再利用相似三角形的性质可证出 $DE \cdot CD = AD \cdot CE$;

(2) 利用等腰三角形的性质及中点的定义可得出 $CD = \frac{1}{2}BC$, $DE = 2DF$, 结合 $DE \cdot CD = AD \cdot CE$ 可得出 $\frac{CE}{DF} = \frac{BC}{AD}$, 结合 $\angle BCE = \angle ADF$ 可证出 $\triangle BCE \sim \triangle ADF$, 再利用相似三角形的性质可证出 $AF \cdot BC = AD \cdot BE$.

【解答】证明: (1) $\because AB = AC$, D 是边 BC 的中点,

$\therefore AD \perp BC$,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADE + \angle CDE = 90^\circ$.

$\because DE \perp AC$,

$\therefore \angle CED = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDE + \angle DCE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ADE = \angle DCE.$$

$$\text{又} \because \angle AED = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore DE \cdot CD = AD \cdot CE;$$

$$(2) \because AB = AC,$$

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC.$$

$$\because F \text{ 为 } DE \text{ 的中点,}$$

$$\therefore DE = 2DF.$$

$$\because DE \cdot CD = AD \cdot CE,$$

$$\therefore 2DF \cdot \frac{1}{2}BC = AD \cdot CE,$$

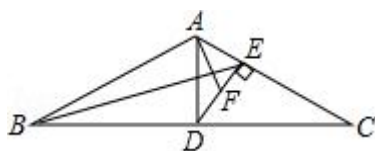
$$\therefore \frac{CE}{DF} = \frac{BC}{AD}.$$

$$\text{又} \because \angle BCE = \angle ADF,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{AF},$$

$$\therefore AF \cdot BC = AD \cdot BE.$$

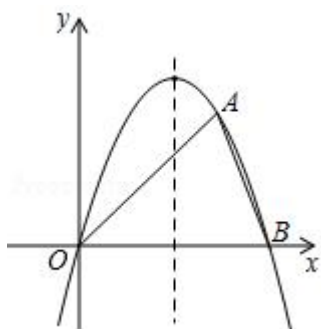


【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质以及余角，解题的关键是：（1）利用相似三角形的判定定理证出 $\triangle AED \sim \triangle DEC$ ；（2）利用相似三角形的判定定理证出 $\triangle BCE \sim \triangle ADF$ 。

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于原点 O 和点 $B(4, 0)$ ，点 $A(3, m)$ 在抛物线上。

(1) 求抛物线的表达式，并写出它的对称轴；

(2) 求 $\tan \angle OAB$ 的值。



【分析】(1) 把点 $O(0, 0)$, 点 $B(4, 0)$ 分别代入 $y = -x^2 + bx + c$, 解之, 得到 b 和 c 的值, 即可得到抛物线的表达式, 根据抛物线的对称轴 $x = -\frac{b}{a}$, 代入求值即可,

(2) 把点 $A(3, m)$ 代入 $y = -x^2 + 4x$, 求出 m 的值, 得到点 A 的坐标, 过点 B 作 $BD \perp OA$, 交 OA 于点 D , 过点 A 作 $AE \perp OB$, 交 OB 于点 E , 根据三角形的面积和勾股定理, 求出线段 BD 和 AD 的长, 即可得到答案.

【解答】解: (1) 把点 $O(0, 0)$, 点 $B(4, 0)$ 分别代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} c=0 \\ -16+4b+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=4 \\ c=0 \end{cases},$$

即抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 4x$,

它的对称轴为: $x = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$,

(2) 把点 $A(3, m)$ 代入 $y = -x^2 + 4x$ 得:

$$m = -3^2 + 4 \times 3 = 3,$$

即点 A 的坐标为: $(3, 3)$,

过点 B 作 $BD \perp OA$, 交 OA 于点 D , 过点 A 作 $AE \perp OB$, 交 OB 于点 E , 如下图所示,

$$AE = 3, OE = 3, BE = 4 - 3 = 1,$$

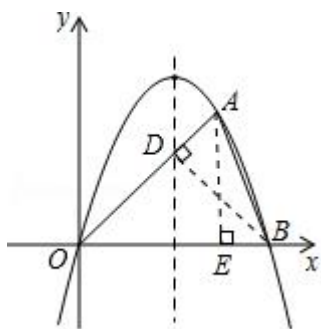
$$OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times OB \times AE = \frac{1}{2} \times OA \times BD,$$

$$BD = \frac{OB \times AE}{OA} = \frac{4 \times 3}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$AD = \sqrt{10 - 8} = \sqrt{2},$$

$$\tan \angle OAB = \frac{BD}{AD} = 2.$$



【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点，二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，待定系数法求二次函数解析式，解直角三角形，解题的关键：（1）正确掌握代入法和抛物线的对称轴公式，（2）正确掌握三角形面积公式和勾股定理。

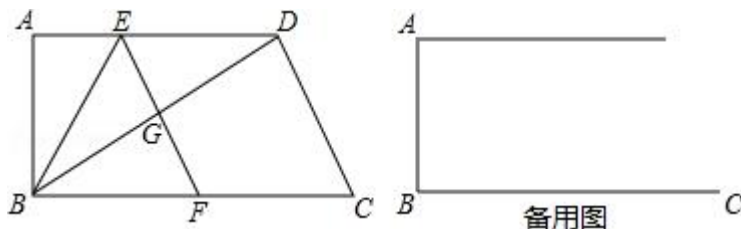
25.（14分）如图，在四边形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，点 E 为边 AD 上一点，将 ABE 沿 BE 翻折，点 A 落在对角线 BD 上的点 G 处，连接 EG 并延长交射线 BC 于点 F 。

（1）如果 $\cos \angle DBC = \frac{2}{3}$ ，求 EF 的长；

（2）当点 F 在边 BC 上时，连接 AG ，设 $AD = x$ ， $\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BEF}} = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式

并写出 x 的取值范围；

（3）连接 CG ，如果 $\triangle FCG$ 是等腰三角形，求 AD 的长。



【分析】（1）利用 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}BF \cdot AB = \frac{1}{2}EF \cdot BG$ ，即可求解；

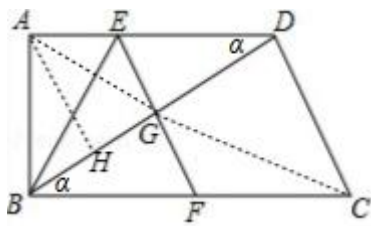
（2） $y = \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{\frac{1}{2}BG \times AH}{\frac{1}{2}BF \times AB} = \frac{6 \times 6 \times \sin \alpha}{a \times 6} = \frac{36}{a^2}$ ， $\tan \alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{6}{x} = \frac{\sqrt{a^2 - 36}}{6}$ ，即可

求解；

（3）分 $GF = FC$ 、 $CF = CG$ 两种情况，求解即可。

【解答】解：（1）将 ABE 沿 BE 翻折，点 A 落在对角线 BD 上的点 G 处，

$\therefore BG \perp EF$ ， $BG = AB = 6$ ，



$$\cos \angle DBC = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BF} = \frac{6}{BF}, \text{ 则: } BF = 9,$$

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}BF \cdot AB = \frac{1}{2}EF \cdot BG, \text{ 即: } 9 \times 6 = 6 \times EF,$$

则 $EF = 9$;

(2) 过点 A 作 $AH \perp BG$ 交于点 H , 连接 AG , 设: $BF = a$,

$$\text{在 Rt}\triangle BGF \text{ 中, } \cos \angle GBF = \cos \alpha = \frac{BG}{BF} = \frac{6}{a}, \text{ 则 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 36}}{6}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 36}}{a},$$

$$y = \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{\frac{1}{2}BG \times AH}{\frac{1}{2}BF \times AB} = \frac{6 \times 6 \times \cos \alpha}{6a} = \frac{36}{a^2} \dots \textcircled{1},$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{6}{x} = \frac{\sqrt{a^2 - 36}}{6}, \text{ 解得: } a^2 = 36 + \left(\frac{36}{x}\right)^2 \dots \textcircled{2},$$

$$\text{把}\textcircled{2}\text{式代入}\textcircled{1}\text{式整理得: } y = \frac{x^2}{x^2 + 36} \left(x \geq \frac{9}{2}\right);$$

(3) ①当 $GF = FC$ 时,

$$FC = 10 - a = GF = a \sin \alpha = \sqrt{a^2 - 36},$$

$$\text{把}\textcircled{2}\text{式代入上式并解得: } x = \frac{45}{4},$$

②当 $CF = CG$ 时,

$$\text{同理可得: } x = \frac{18\sqrt{91}}{91};$$

$$\text{故: } AD \text{ 的长为 } \frac{45}{4} \text{ 或 } \frac{18\sqrt{91}}{91}.$$

【点评】 本题为四边形综合题, 基本方法是利用解直角三角形的方法, 确定相应线段间的关系, 此类题目难度较大.