

2019 年上海市杨浦区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列四条线段能成比例线段的是 ()

A. 1, 1, 2, 3 B. 1, 2, 3, 4 C. 2, 2, 3, 3 D. 2, 3, 4, 5
2. (4 分) 如果 $a:b=3:2$ ，且 b 是 a 、 c 的比例中项，那么 $b:c$ 等于 ()

A. 4:3 B. 3:4 C. 2:3 D. 3:2
3. (4 分) 如果 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{1}{2}$ ，那么下列等式不正确的是 ()

A. $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\cot A=\sqrt{3}$ C. $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan B=\sqrt{3}$
4. (4 分) 下列关于向量的运算中，正确的是 ()

A. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$ B. $-2(\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}$

C. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ D. $0+\vec{a}=\vec{a}$
5. (4 分) 如果二次函数中函数值 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示：

x	...	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
y	...	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{21}{4}$	6	3	...

那么这个二次函数的图象的对称轴是直线 ()

- A. $x=0$ B. $x=-\frac{1}{2}$ C. $x=\frac{3}{4}$ D. $x=1$
6. (4 分) 如果以 a 、 b 、 c 为三边的三角形和以 4、5、6 为三边的三角形相似，那么 a 与 b 的比值不可能为 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 如果 $\frac{x}{x-y}=\frac{5}{3}$ ，那么 $\frac{x}{y}=\underline{\hspace{2cm}}$.
8. (4 分) 等边三角形的中位线与高之比为_____.
9. (4 分) 如果两个相似三角形的面积比为 4:9，较小三角形的周长为 4，那么这两个三角形的周长和为_____.
10. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AC=5$ ， $BC=6$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $AD=1$ ，如果 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，那么 $AE=\underline{\hspace{2cm}}$.

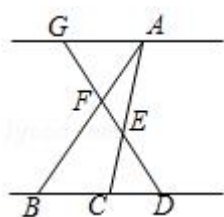
11. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=8$, 如果点 G 为重心, 那么 $\angle GCB$ 的余切值为_____.

12. (4分) 如果开口向下的抛物线 $y=ax^2+5x+4-a^2$ ($a \neq 0$) 过原点, 那么 a 的值是_____.

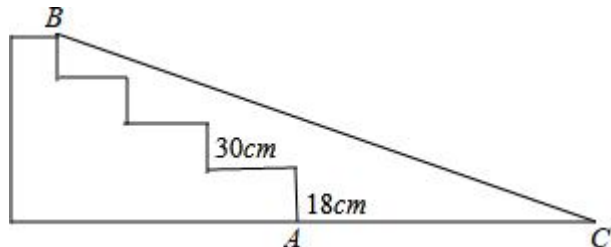
13. (4分) 如果抛物线 $y=-2x^2+bx+c$ 的对称轴在 y 轴的左侧, 那么 b _____0 (填入 “<” 或 “>”).

14. (4分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在抛物线 $y=x^2+2x+m$ 上, 如果 $0 < x_1 < x_2$, 那么 y_1 _____ y_2 (填入 “<” 或 “>”).

15. (4分) 如图, $AG \parallel BC$, 如果 $AF:FB=3:5$, $BC:CD=3:2$, 那么 $AE:EC=$ _____.

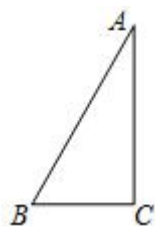


16. (4分) 如图, 某单位门前原有四级台阶, 每级台阶高为 $18cm$, 宽为 $30cm$, 为方便残疾人土, 拟在门前台阶右侧改成斜坡, 设台阶的起点为 A 点, 斜坡的起点为 C 点, 准备设计斜坡 BC 的坡度 $i=1:5$, 则 AC 的长度是_____ cm .



17. (4分) 如果抛物线 C_1 的顶点在抛物线 C_2 上时, 抛物线 C_2 的顶点也在抛物线 C_1 上, 此时我们称抛物线 C_1 与 C_2 是“互为关联”的抛物线. 那么与抛物线 $y=2x^2$ 是“互为关联”且顶点不同的抛物线的表达式可以是_____ (只需写出一个).

18. (4分) $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=2$, 将此三角形绕点 A 旋转, 当点 B 落在直线 BC 上的点 D 处时, 点 C 落在点 E 处, 此时点 E 到直线 BC 的距离为_____.



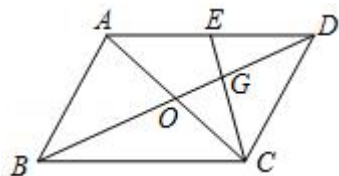
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 如图, 已知 $\square ABCD$ 的对角线交于点 O , 点 E 为边 AD 的中点, CE 交 BD 于点

G.

(1) 求 $\frac{OG}{DG}$ 的值;

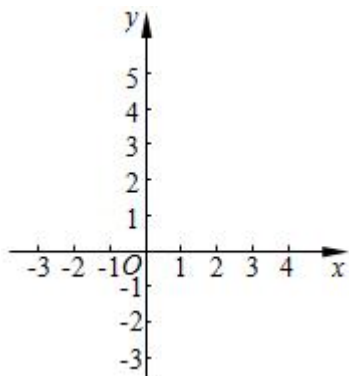
(2) 如果设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{GO}$.



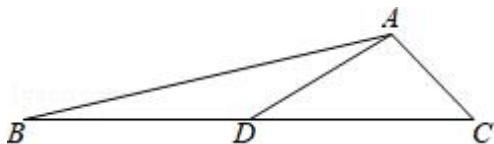
20. (10 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $(1, -2)$ 和 $(-1, 0)$ 和 $(0, -\frac{3}{2})$.

(1) 求此二次函数的解析式;

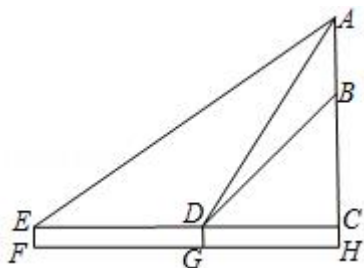
(2) 按照列表、描点、连线的步骤, 在如图所示的平面直角坐标系内画出该函数的图象 (要求至少 5 点).



21. (10 分) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\tan B = \frac{1}{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = \sqrt{2}$. 求: (1) BC 的长; (2) $\angle ADC$ 的正弦值.



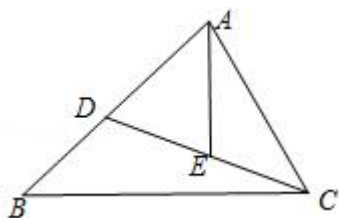
22. (10 分) 某学生为测量一棵大树 AH 及其树叶部分 AB 的高度, 将测角仪放在 F 处测得大树顶端 A 的仰角为 30° , 放在 G 处测得大树顶端 A 的仰角为 60° , 树叶部分下端 B 的仰角为 45° , 已知点 F 、 G 与大树底部 H 共线, 点 F 、 G 相距 15 米, 测角仪高度为 1.5 米. 求该树的高度 AH 和树叶部分的高度 AB .



23. (12分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，点 E 在线段 CD 上，且 $\angle ACD = \angle B = \angle BAE$.

(1) 求证： $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{AC}$;

(2) 当点 E 为 CD 中点时，求证： $\frac{AE^2}{CE^2} = \frac{AB}{AD}$.

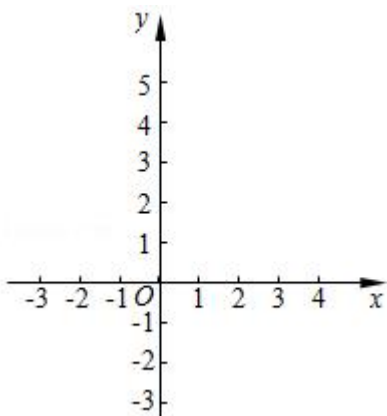


24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$ ，它的顶点为 $D(1, m)$ ，且 $\tan \angle COD = \frac{1}{3}$.

(1) 求 m 的值及抛物线的表达式；

(2) 将此抛物线向上平移后与 x 轴正半轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，且 $OA = OB$. 若点 A 是由原抛物线上的点 E 平移所得，求点 E 的坐标；

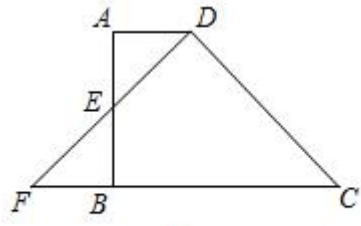
(3) 在(2)的条件下，点 P 是抛物线对称轴上的一点(位于 x 轴上方)，且 $\angle APB = 45^\circ$. 求 P 点的坐标.



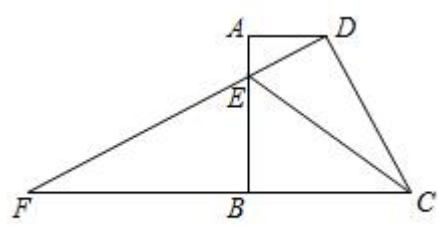
25. (14分) 已知：梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $AD = 3$ ， $AB = 6$ ， $DF \perp DC$ 分别交

射线 AB 、射线 CB 于点 E 、 F 。

- (1) 当点 E 为边 AB 的中点时 (如图 1), 求 BC 的长;
- (2) 当点 E 在边 AB 上时 (如图 2), 联结 CE , 试问: $\angle DCE$ 的大小是否确定? 若确定, 请求出 $\angle DCE$ 的正切值; 若不确定, 则设 $AE = x$, $\angle DCE$ 的正切值为 y , 请求出 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 当 $\triangle AEF$ 的面积为 3 时, 求 $\triangle DCE$ 的面积。



(图 1)



(图 2)

2019 年上海市杨浦区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列四条线段能成比例线段的是（ ）

- A. 1, 1, 2, 3 B. 1, 2, 3, 4 C. 2, 2, 3, 3 D. 2, 3, 4, 5

【分析】若 a, b, c, d 成比例，即有 $a:b=c:d$ ，只要代入验证即可．

【解答】解：A、 $1:2 \neq 1:3$ ，则 $a:b \neq c:d$ ，即 a, b, c, d 不成比例；

B、 $1:3 \neq 2:4$ ，则 $a:b \neq c:d$ ，故 a, b, d, c 不成比例；

C、 $2:2=3:3$ ，即 $b:a=c:d$ ，故 b, a, c, d 成比例；

D、 $2:4 \neq 3:5$ ，则 $a:b \neq c:d$ ，即 a, b, c, d 不成比例．

故选：C．

【点评】本题主要考查了成比例的定义，并且注意叙述线段成比例时，各个线段的顺序，难度适中．

2.（4 分）如果 $a:b=3:2$ ，且 b 是 a, c 的比例中项，那么 $b:c$ 等于（ ）

- A. 4:3 B. 3:4 C. 2:3 D. 3:2

【分析】根据比例中项的概念可得 $a:b=b:c$ ，则可求得 $b:c$ 值．

【解答】解： $\because a:b=3:2$ ， b 是 a 和 c 的比例中项，

即 $a:b=b:c$ ，

$\therefore b:c=3:2$ ．

故选：D．

【点评】本题考查了比例中项的概念．在线段 a, b, c 中，若 $b^2=ac$ ，则 b 是 a, c 的比例中项．

3.（4 分）如果 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{1}{2}$ ，那么下列等式不正确的是（ ）

- A. $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\cot A=\sqrt{3}$ C. $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan B=\sqrt{3}$

【分析】依据 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{1}{2}$ ，分四种情况讨论，即可得到结论．

【解答】解：设 $BC=1$ ，

$\because \triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore AB = 2, AC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } A \text{ 选项错误;}$$

$$\cot A = \sqrt{3}, \text{ 故 } B \text{ 选项正确;}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } C \text{ 选项正确;}$$

$$\tan B = \sqrt{3}, \text{ 故 } D \text{ 选项正确;}$$

故选: A.

【点评】此题主要考查了锐角三角函数关系, 正确把握锐角三角函数的定义是解题关键.

4. (4分) 下列关于向量的运算中, 正确的是 ()

$$A. \vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$B. -2(\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$C. \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$

$$D. 0 + \vec{a} = \vec{a}$$

【分析】根据平面向量的有关概念, 判定选项中的计算是否正确即可.

【解答】解: A、 $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a}$, 故本选项错误.

B、 $-2(\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{a} + 2\vec{b}$, 故本选项正确.

C、 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, 故本选项错误.

D、 $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, 故本选项错误.

故选: B.

【点评】本题考查了平面向量的有关概念, 是基础题.

5. (4分) 如果二次函数中函数值 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示:

x	...	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
y	...	$-\frac{3}{4}$	3	$\frac{21}{4}$	6	3	...

那么这个二次函数的图象的对称轴是直线 ()

$$A. x = 0$$

$$B. x = \frac{1}{2}$$

$$C. x = \frac{3}{4}$$

$$D. x = 1$$

【分析】由图表可知, $x = 0$ 和 $x = 2$ 时的函数值相等, 然后根据二次函数的对称性求解即可

【解答】解: $\because x = 0$ 、 $x = 2$ 时的函数值都是 3 相等,

$$\therefore \text{此函数图象的对称轴为直线 } x = \frac{0+2}{2} = 1.$$

故选：D.

【点评】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键.

6. (4分) 如果以 a 、 b 、 c 为三边的三角形和以 4、5、6 为三边的三角形相似，那么 a 与 b 的比值不可能为 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

【分析】利用相似三角形的性质即可判断.

【解答】解：∵ 以 a 、 b 、 c 为三边的三角形和以 4、5、6 为三边的三角形相似，

$$\therefore a:b = 4:5 \text{ 或 } 5:6 \text{ 或 } 2:3,$$

故选：B.

【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考基础题.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4分) 如果 $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$ ，那么 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$.

【分析】由 $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$ 可得 $\frac{x-y}{x} = \frac{3}{5}$ ，进一步得到 $1 - \frac{y}{x} = \frac{3}{5}$ ，可求 $\frac{y}{x}$ ，进一步得到 $\frac{x}{y}$ 的值.

【解答】解： $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$,

$$\frac{x-y}{x} = \frac{3}{5},$$

$$1 - \frac{y}{x} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{5},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}.$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点评】考查了比例的性质，关键是得到 $1 - \frac{y}{x} = \frac{3}{5}$.

8. (4分) 等边三角形的中位线与高之比为 $1:\sqrt{3}$.

【分析】可设等边三角形的边长为 $2a$ ，根据三角形的中位线定理和等边三角形的性质以及勾股定理可分别求出中位线的长和高的长度即可求出其比值.

【解答】解：设等边三角形的边长为 $2a$,

则中位线长为 a ，高线的长为 $\sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$ ，

所以等边三角形的中位线与高之比为 $a : \sqrt{3}a = 1 : \sqrt{3}$ ，

故答案为： $1 : \sqrt{3}$ 。

【点评】 本题考查了等边三角形的性质和三角形的中位线定理，中位线是三角形中的一条重要线段，由于它的性质与线段的中点及平行线紧密相连，因此，它在几何图形的计算及证明中有着广泛的应用。

9. (4分) 如果两个相似三角形的面积比为 $4 : 9$ ，较小三角形的周长为 4 ，那么这两个三角形的周长和为 10。

【分析】 根据相似三角形周长的比等于相似比，相似三角形面积的比等于相似比的平方计算即可。

【解答】 解：设较大三角形的周长为 x ，

$\because$ 两个相似三角形相似，两个相似三角形的面积比为 $4 : 9$ ，

$\therefore$ 两个相似三角形的周长比为 $2 : 3$ ，

$$\therefore \frac{4}{x} = \frac{2}{3},$$

解得， $x = 6$ ，

$\therefore$ 这两个三角形的周长和 $= 4 + 6 = 10$ ，

故答案为： 10 。

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形周长的比等于相似比，相似三角形面积的比等于相似比的平方是解题的关键。

10. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 5$ ， $BC = 6$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $AD = 1$ ，如果 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，那么 $AE = \frac{5}{3}$ 。

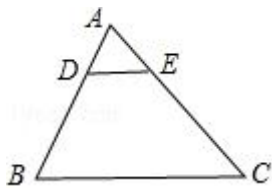
【分析】 根据相似三角形对应边的比相等列出比例式，计算即可。

【解答】 解： $\because \triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \text{ 即 } \frac{1}{3} = \frac{AE}{5},$$

解得， $AE = \frac{5}{3}$ ，

故答案为： $\frac{5}{3}$ 。



【点评】 本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形对应边的比相等是解题的关键．

11. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ，如果点 G 为重心，那么 $\angle GCB$ 的余切值为 4 ．

【分析】 根据等腰三角形的三线合一，勾股定理求出 AD 的长，利用重心的性质即可求出 DG 的长，利用余切的定义解答即可．

【解答】 解：作 $AD \perp BC$ 于 D ，

则点 G 在 AD 上，连接 GC ，

$\because AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 4,$$

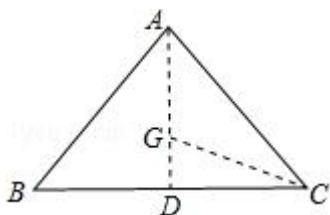
由勾股定理得， $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3$ ，

$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore DG = \frac{1}{3}AD = 1,$$

$$\therefore \cot \angle GCB = \frac{CD}{DG} = 4,$$

故答案为：4．



【点评】 本题考查的是重心的概念和性质，锐角三角函数的定义，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的2倍．

12. (4分) 如果开口向下的抛物线 $y = ax^2 + 5x + 4 - a^2$ ($a \neq 0$) 过原点，那么 a 的值是 -2 ．

【分析】 由抛物线开口向下及过原点，即可得出关于 a 的一元一次不等式及一元二次方程，解之即可得出 a 的值．

【解答】解：∵抛物线 $y = ax^2 + 5x + 4 - a^2$ ($a \neq 0$) 过原点，且开口向下，

$$\therefore \begin{cases} a < 0 \\ 4 - a^2 = 0 \end{cases},$$

解得： $a = -2$.

故答案为： -2 .

【点评】本题考查了二次函数的性质以及二次函数图象上点的坐标特征，利用二次函数的性质及二次函数图象上点的坐标特征，找出关于 a 的一元一次不等式及一元二次方程是解题的关键.

13. (4分) 如果抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 的对称轴在 y 轴的左侧，那么 b > 0 (填入“<”或“>”).

【分析】根据二次函数的图象与性质即可求出答案.

【解答】解：由对称轴可知： $x = \frac{b}{4} < 0$,

$\therefore b < 0$,

故答案为： $<$

【点评】本题考查二次函数，解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质，本题属于基础题型.

14. (4分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在抛物线 $y = x^2 + 2x + m$ 上，如果 $0 < x_1 < x_2$ ，那么 y_1 < y_2 (填入“<”或“>”).

【分析】先求出抛物线的对称轴，然后根据二次函数的性质解决问题.

【解答】解：抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2} = -1$,

当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

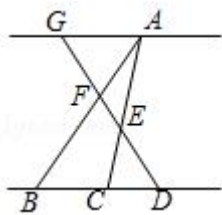
因为 $0 < x_1 < x_2$,

所以 $y_1 < y_2$.

故答案为 $<$.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了二次函数的性质.

15. (4分) 如图， $AG \parallel BC$ ，如果 $AF:FB = 3:5$ ， $BC:CD = 3:2$ ，那么 $AE:EC =$ 3:2 .



【分析】由 $AG \parallel BC$ ，推出 $\triangle AGF \sim \triangle BDF$ ，推出 $\frac{AG}{BD} = \frac{AF}{FB} = \frac{3}{5}$ ，设 $AG = 3k$ ， $BD = 5k$ ，

可得 $CD = 2k$ ，由 $AG \parallel CD$ ，推出 $\triangle AGE \sim \triangle CDE$ ，可得 $\frac{AE}{CE} = \frac{AG}{CD} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$ 。

【解答】解： $\because AG \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle BDF$ ，

$$\therefore \frac{AG}{BD} = \frac{AF}{FB} = \frac{3}{5}，$$

设 $AG = 3k$ ， $BD = 5k$ ，

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{3}{2}，$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{2}{5}$$

$\therefore CD = 2k$ ，

$\because AG \parallel CD$ ，

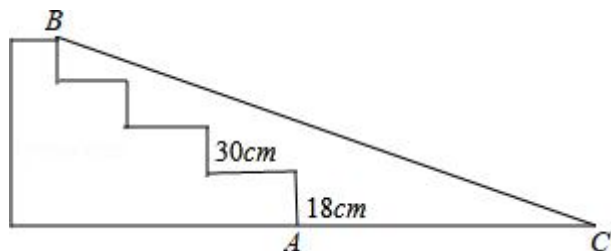
$\therefore \triangle AGE \sim \triangle CDE$ ，

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AG}{CD} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}，$$

故答案为 3：2。

【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，平行线的性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

- 16.（4分）如图，某单位门前原有四级台阶，每级台阶高为 18cm ，宽为 30cm ，为方便残疾人土，拟在门前台阶右侧改成斜坡，设台阶的起点为 A 点，斜坡的起点为 C 点，准备设计斜坡 BC 的坡度 $i = 1:5$ ，则 AC 的长度是 270 cm 。



【分析】根据题意求出 BH ，根据坡度的概念求出 CH ，计算即可。

【解答】解：由题意得， $BH \perp AC$ ，

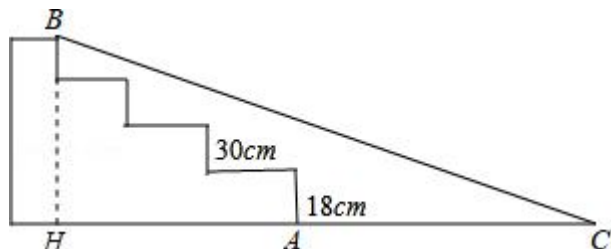
则 $BH = 18 \times 4 = 72$,

$\because$ 斜坡 BC 的坡度 $i = 1:5$,

$\therefore CH = 72 \times 5 = 360$,

$\therefore AC = 360 - 30 \times 3 = 270$ (cm),

故答案为: 270.



【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 掌握坡度的概念: 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

17. (4分) 如果抛物线 C_1 的顶点在抛物线 C_2 上时, 抛物线 C_2 的顶点也在抛物线 C_1 上, 此时我们称抛物线 C_1 与 C_2 是“互为关联”的抛物线. 那么与抛物线 $y = 2x^2$ 是“互为关联”且顶点不同的抛物线的表达式可以是 $y = -2(x-1)^2 + 2$, (答案不唯一) (只需写出一个).

【分析】 首先求得抛物线 $y = 2x^2$ 的顶点坐标 $(0, 0)$, 则“互为关联”的抛物线为 $y = -2(x-m)^2 + 2m^2$, 即可求得答案.

【解答】 解: 由抛物线 $y = 2x^2$ 可知顶点为 $(0, 0)$,

设“互为关联”的抛物线为 $y = a(x-m)^2 + 2m^2$,

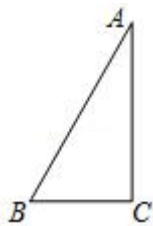
代入 $(0, 0)$ 求得 $a = -2$,

$\therefore$ “互为关联”的抛物线为 $y = -2(x-m)^2 + 2m^2$,

故答案为 $y = -2(x-1)^2 + 2$, (答案不唯一).

【点评】 此题以新定义的形式考查了二次函数解析式的确定, 充分理解新定义的含义是解题的关键.

18. (4分) $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 2$, 将此三角形绕点 A 旋转, 当点 B 落在直线 BC 上的点 D 处时, 点 C 落在点 E 处, 此时点 E 到直线 BC 的距离为 $\frac{24}{13}$.



【分析】过 B 作 $BG \perp AD$ 于 G , 根据旋转的性质得到 $AD = AB$, $DE = BC$, $\angle ADE = \angle ABC$, 根据勾股定理得到 $AB = AD = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$, 求得 $BG = \frac{12\sqrt{13}}{13}$, 过 E 作 $EH \perp BD$ 交 BD 的延长线于 H , 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】解: 如图, 过 B 作 $BG \perp AD$ 于 G ,

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转得到 $\triangle ADE$,

$\therefore AD = AB$, $DE = BC$, $\angle ADE = \angle ABC$,

$\therefore$ Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 2$,

$\therefore AB = AD = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$,

$\therefore BD = 2BC = 4$, $\angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{1}{2}AC \cdot BG$,

$\therefore BG = \frac{12\sqrt{13}}{13}$,

过 E 作 $EH \perp BD$ 交 BD 的延长线于 H ,

$\therefore \angle BAG = 180^\circ - \angle ABC - \angle ADB$, $\angle EDH = 180^\circ - \angle ADB - \angle ADE$,

$\therefore \angle BAG = \angle EDH$,

$\therefore \angle AGB = \angle DHE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABG \sim \triangle DEH$,

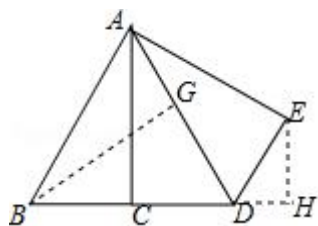
$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EH}$,

$\therefore \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\frac{12\sqrt{13}}{13}}{EH}$,

$\therefore EH = \frac{24}{13}$,

$\therefore$ 点 E 到直线 BC 的距离为: $\frac{24}{13}$.

故答案为: $\frac{24}{13}$.



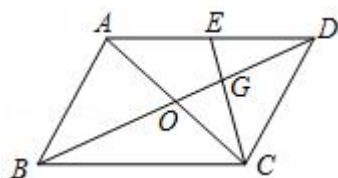
【点评】 本题考查了旋转的性质，勾股定理，等腰三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）如图，已知 $\square ABCD$ 的对角线交于点 O ，点 E 为边 AD 的中点， CE 交 BD 于点 G ．

（1）求 $\frac{OG}{DG}$ 的值；

（2）如果设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{GO}$ ．



【分析】（1）由 $\triangle DEG \sim \triangle BCG$ ，可得 $\frac{DG}{GB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ ，设 $DG = k$ ， $GB = 2k$ ，则 $BD = 3k$ ，

$OB = OD = 1.5k$ ，推出 $OG = 0.5k$ ，即可解决问题；

（2）求出 $\overrightarrow{BD}$ ，根据 $OG = \frac{1}{6}BD$ 即可解决问题；

【解答】解：（1） $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC, OD = OB,$$

$$\because AE = DE,$$

$$\therefore BC = 2DE,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle BCG,$$

$$\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

设 $DG = k$ ， $GB = 2k$ ，则 $BD = 3k$ ， $OB = OD = 1.5k$ ，

$$\therefore OG = 0.5k,$$

$$\therefore \frac{OG}{DG} = \frac{0.5k}{k} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore OG = \frac{1}{6}BD,$$

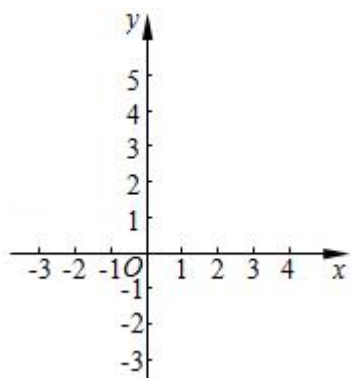
$$\therefore \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{6}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}.$$

【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，平行四边形的性质，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

20. (10分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $(1, -2)$ 和 $(-1, 0)$ 和 $(0, -\frac{3}{2})$.

(1) 求此二次函数的解析式;

(2) 按照列表、描点、连线的步骤，在如图所示的平面直角坐标系内画出该函数的图象 (要求至少5点).



【分析】(1) 把三个已知点的坐标代入 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 得到关于 a 、 b 、 c 的方程组，然后解方程组即可得到抛物线解析式;

(2) 先把一般式配成顶点式得到抛物线顶点坐标，再解方程 $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ 得到抛物线与 x 轴的交点坐标，然后描点即可.

【解答】解：(1) 根据题意得
$$\begin{cases} a+b+c=-2 \\ a-b+c=0 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

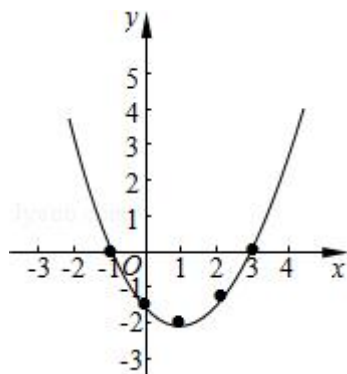
所以此二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$;

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$, 则抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 顶点坐标为 $(1,$

-2),

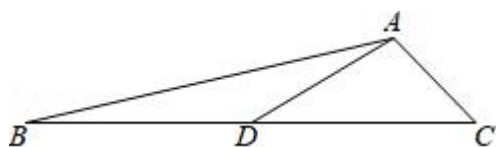
当 $y=0$ 时, $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, 则抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(3, 0)$;

如图,



【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式: 在利用待定系数法求二次函数关系式时, 要根据题目给定的条件, 选择恰当的方法设出关系式, 从而代入数值求解. 一般地, 当已知抛物线上三点时, 常选择一般式, 用待定系数法列三元一次方程组来求解; 当已知抛物线的顶点或对称轴时, 常设其解析式为顶点式来求解; 当已知抛物线与 x 轴有两个交点时, 可选择设其解析式为交点式来求解.

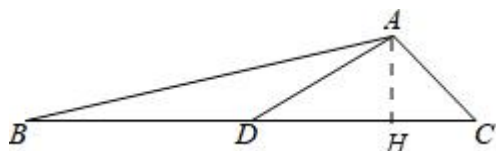
21. (10分) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\tan B = \frac{1}{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = \sqrt{2}$. 求: (1) BC 的长; (2) $\angle ADC$ 的正弦值.



【分析】 (1) 如图, 作 $AH \perp BC$ 于 H . 在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, 求出 $AH = CH = 1$, 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, 求出 BH 即可解决问题;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, 求出 DH , AD 即可解决问题;

【解答】 解: (1) 如图, 作 $AH \perp BC$ 于 H .



在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $\because \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CH}{AC}$, $AC = \sqrt{2}$,

$$\therefore CH = 1, AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\because \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{1}{5}$,

$$\therefore BH = 5,$$

$$\therefore BC = BH + CH = 6.$$

$$(2) \because BD = CD,$$

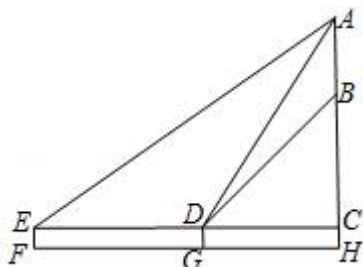
$$\therefore CD = 3, DH = 2, AD = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{5}$$

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, $\sin \angle ADH = \frac{AH}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\therefore \angle ADC \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点评】 本题考查解直角三角形的应用、锐角三角函数等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考中考常考题型.

22. (10 分) 某学生为测量一棵大树 AH 及其树叶部分 AB 的高度，将测角仪放在 F 处测得大树顶端 A 的仰角为 30° ，放在 G 处测得大树顶端 A 的仰角为 60° ，树叶部分下端 B 的仰角为 45° ，已知点 F 、 G 与大树底部 H 共线，点 F 、 G 相距 15 米，测角仪高度为 1.5 米. 求该树的高度 AH 和树叶部分的高度 AB .



【分析】 根据题意和图形，可以求得 AD 、 AC 、 BC 的长，从而可以求得该树的高度 AH 和树叶部分的高度 AB ，本题得以解决.

【解答】 解：由题意可得，

$$\angle AEC = 30^\circ, \angle ADC = 60^\circ, \angle BDC = 45^\circ, CH = DG = EF = 1.5 \text{ 米}, FG = ED = 15 \text{ 米},$$

$$\because \angle ADC = \angle AED + \angle EAD,$$

$$\therefore \angle EAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle AED,$$

$$\therefore ED = AD,$$

$$\therefore AD = 15 \text{ 米},$$

$$\because \angle ADC = 60^\circ, \angle ACD = 90^\circ,$$

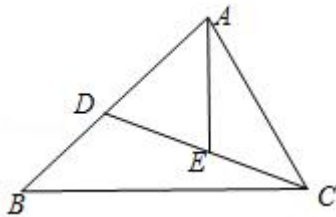
$$\begin{aligned}
&\therefore \angle DAC = 30^\circ, \\
&\therefore DC = \frac{15}{2} \text{米}, AC = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{米}, \\
&\therefore AH = AC + CH = \frac{15\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{15\sqrt{3}+3}{2} \text{米}, \\
&\because \angle BDC = 45^\circ, \angle BCD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DBC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle BDC = \angle DBC, \\
&\therefore BC = CD = \frac{15}{2} \text{米}, \\
&\therefore AB = AC - BC = \frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{2} = \frac{15\sqrt{3}-15}{2} \text{米}, \\
&\text{即 } AH = \frac{15\sqrt{3}+3}{2} \text{米}, AB = \frac{15\sqrt{3}-15}{2} \text{米}.
\end{aligned}$$

【点评】本题考查解直角三角形的应用—仰角俯角问题，解答本题的关键是明确题意，利用特殊角的三角函数和数形结合的思想解答．

23. (12分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，点 E 在线段 CD 上，且 $\angle ACD = \angle B = \angle BAE$ ．

(1) 求证： $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{AC}$ ；

(2) 当点 E 为 CD 中点时，求证： $\frac{AE^2}{CE^2} = \frac{AB}{AD}$ ．



【分析】(1) 欲证明： $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{AC}$ ，只要证明 $\triangle AED \sim \triangle BAC$ 即可解决问题；

(2) 由 $\triangle DAE \sim \triangle DCA$ ，推出 $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{AD}$ ，由 $DE = EC$ ，可得 $\frac{AE}{CE} = \frac{AC}{AD}$ ，推出 $\frac{AE^2}{CE^2} = \frac{AC^2}{AD^2}$ ，

再证明 $AC^2 = AD \cdot AB$ 即可解决问题；

【解答】证明：(1) $\because \angle ACD = \angle B = \angle BAE$ ， $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAE$ ， $\angle AED = \angle ACD + \angle CAE$ ，

$\therefore \angle AED = \angle BAC$ ，

$$\because \angle DAE = \angle B,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

$$(2) \because \angle ADE = \angle CDA, \angle DAE = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{AD},$$

$$\because DE = EC,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore \frac{AE^2}{CE^2} = \frac{AC^2}{AD^2},$$

$$\because \angle DAC = \angle BAC, \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{AE^2}{EC^2} = \frac{AD \cdot AB}{AD^2} = \frac{AB}{AD}.$$

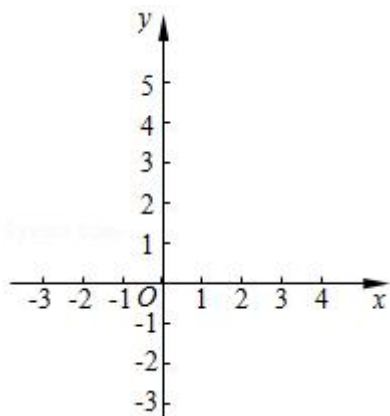
【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，属于中考常考题型．

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$ ，它的顶点为 $D(1, m)$ ，且 $\tan \angle COD = \frac{1}{3}$ ．

(1) 求 m 的值及抛物线的表达式；

(2) 将此抛物线向上平移后与 x 轴正半轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，且 $OA = OB$ ．若点 A 是由原抛物线上的点 E 平移所得，求点 E 的坐标；

(3) 在(2)的条件下，点 P 是抛物线对称轴上的一点(位于 x 轴上方)，且 $\angle APB = 45^\circ$ ．求 P 点的坐标．



【分析】(1) 顶点为 $D(1, m)$, 且 $\tan \angle COD = \frac{1}{3}$, 则 $m = 3$, 则抛物线的表达式为: $y = a(x-1)^2 + 3$, 即可求解;

(2) 设: 抛物线向上平移 n 个单位, 则函数表达式为: $y = -x^2 + 2x + 2 + n$, 求出 OA 、 OB , 即可求解;

(3) 过点 B 、 A 分别作 x 轴、 y 轴的平行线交于点 G , $OA = OB = 3$, 则过点 G 作圆 G , 圆与 x 、 y 轴均相切, $\angle BPA = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle BOA$, 故点 P 在圆 G 上, 即可求解.

【解答】解: (1) 顶点为 $D(1, m)$, 且 $\tan \angle COD = \frac{1}{3}$, 则 $m = 3$,

则抛物线的表达式为: $y = a(x-1)^2 + 3$, 即: $a + 3 = 2$, 解得: $a = -1$,

故抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 2$;

(2) 设: 抛物线向上平移 n 个单位,

则函数表达式为: $y = -x^2 + 2x + 2 + n$,

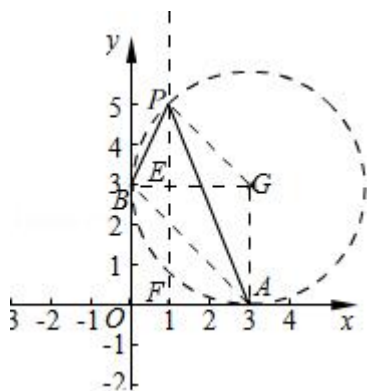
令 $y = 0$, 则 $x = 1 + \sqrt{n+3}$, 令 $x = 0$, 则 $y = 2 + n$,

$\because OA = OB$,

$\therefore 1 + \sqrt{n+3} = 2 + n$, 解得: $n = 1$ 或 -2 (舍去 -2),

则点 A 的坐标为 $(3, 0)$, 故点 $E(3, -1)$;

(3) 过点 B 、 A 分别作 x 轴、 y 轴的平行线交于点 G ,



$\because OA = OB = 3$, 则过点 G 作圆 G , 圆与 x 、 y 轴均相切,

$\because \angle BPA = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle BOA$, 故点 P 在圆 G 上,

过点 P 作 $PF \perp x$ 轴交 BG 于点 E , 交 x 轴于点 F ,

则四边形 $AGEF$ 为边长为 3 的正方形,

则: $PF = EF + PE = 3 + \sqrt{PG^2 - EG^2} = 3 + \sqrt{9 - 4} = 3 + \sqrt{5}$.

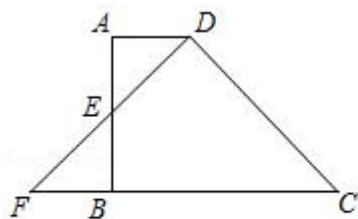
【点评】 本题考查了二次函数的综合题, 涉及到一次函数、圆的基本等知识点, 其中 (3), 构建圆 G 是本题的突破点, 本题有一点难度.

25. (14 分) 已知: 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AD = 3$, $AB = 6$, $DF \perp DC$ 分别交射线 AB 、射线 CB 于点 E 、 F .

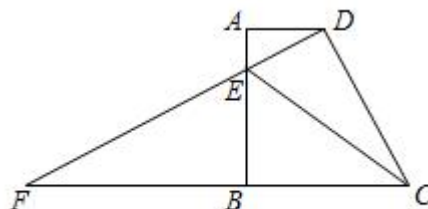
(1) 当点 E 为边 AB 的中点时 (如图 1), 求 BC 的长;

(2) 当点 E 在边 AB 上时 (如图 2), 联结 CE , 试问: $\angle DCE$ 的大小是否确定? 若确定, 请求出 $\angle DCE$ 的正切值; 若不确定, 则设 $AE = x$, $\angle DCE$ 的正切值为 y , 请求出 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 当 $\triangle AEF$ 的面积为 3 时, 求 $\triangle DCE$ 的面积.



(图 1)



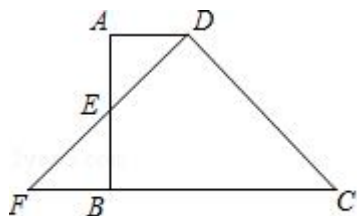
(图 2)

【分析】 (1) 证明 $\triangle AED$, $\triangle BEF$, $\triangle DFC$ 都是等腰直角三角形即可解决问题.

(2) 如图 2 中, 连接 BD . 取 EC 的中点 O , 连接 OD , OB . 证明 E, B, C, D 四点共圆, 可得 $\angle DCE = \angle ABD$ 即可解决问题.

(3) 如图 2-1 中, 连接 AF . 设 $AE = x$, $FB = y$, $EB = m$, 由 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot FB = 3$, 推出 $xy = 6$, 由 $AD \parallel FB$, 推出 $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{FB}$, 推出 $\frac{x}{m} = \frac{3}{y}$, 可得 $xy = 3m$, 推出 $6 = 3m$, 推出 $m = 2$, 可得 $EB = 2$, $AE = 4$, 再利用勾股定理求出 DE , DC 即可解决问题.

【解答】解: (1) 如图 1 中,



(图 1)

$\because AD \parallel BC$, $AB \perp BC$,

$\therefore \angle ABC = \angle A = 90^\circ$,

$\because AE = EB = 3$, $AD = 3$,

$\therefore AD = AE$,

$\therefore \angle AED = \angle ADE = \angle BEF = \angle F = 45^\circ$,

$\therefore EF = DE = 3\sqrt{2}$, $FB = 3$,

$\because DF \perp DC$,

$\therefore \angle FDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle F = 45^\circ$,

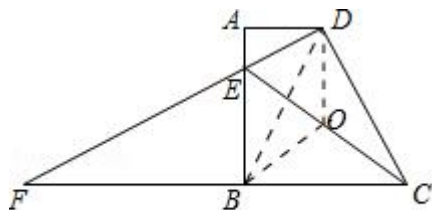
$\therefore DF = DC = 6\sqrt{2}$,

$\therefore CF = \sqrt{2}DC = 12$,

$\therefore BC = CF - BF = 12 - 3 = 9$.

(2) 结论: $\angle DCE$ 的大小是定值.

理由: 如图 2 中, 连接 BD . 取 EC 的中点 O , 连接 OD , OB .



(图 2)

$\because \angle EBC = \angle EDC = 90^\circ$, $EO = OC$,

$$\therefore OD = OE = OC = OB,$$

$\therefore E, B, C, D$ 四点共圆,

$$\therefore \angle DCE = \angle ABD,$$

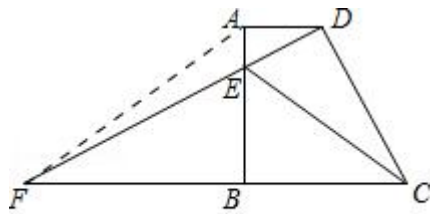
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } \tan \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \angle ABD$ 的大小是定值,

$\therefore \angle DCE$ 的大小是定值,

$$\therefore \tan \angle DCE = \frac{1}{2}.$$

(3) 如图 2-1 中, 连接 AF .



(图 2-1)

设 $AE = x$, $FB = y$, $EB = m$,

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot FB = 3,$$

$$\therefore xy = 6,$$

$$\therefore AD \parallel FB,$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{FB},$$

$$\therefore \frac{x}{m} = \frac{3}{y},$$

$$\therefore xy = 3m,$$

$$\therefore 6 = 3m,$$

$$\therefore m = 2,$$

$$\therefore EB = 2, AE = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } DE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEC \text{ 中, } \therefore \tan \angle DCE = \frac{DE}{DC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DC = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DC = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25.$$

当点 E 在 AB 的延长线上时，同法可得 $AE = 8$ ， $DE = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$ ，

$$\therefore CD = 2DE = 2\sqrt{73},$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DC = 573.$$

综上所述， $\triangle DEC$ 的面积为 25 或 73.

【点评】 本题属于四边形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，四点共圆，平行线的性质，勾股定理，三角形的面积，锐角三角函数等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，学会利用四点共圆解决问题，属于中考压轴题.