

2019 年上海市徐汇实验中学中考数学一模试卷

一. 选择题 (满分 24 分, 每小题 4 分)

1. (4 分) 下列四条线段中, 不能成比例的是 ()

A. $a=4, b=8, c=5, d=10$

B. $a=2, b=2\sqrt{5}, c=\sqrt{5}, d=5$

C. $a=1, b=2, c=3, d=4$

D. $a=1, b=2, c=2, d=4$

2. (4 分) 把抛物线 $y = -2x^2$ 向上平移 1 个单位, 再向右平移 1 个单位, 得到的抛物线是 ()

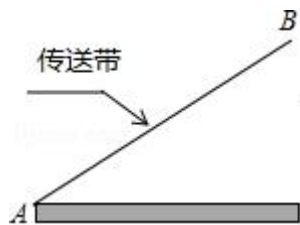
A. $y = -2(x+1)^2 + 1$

B. $y = -2(x-1)^2 + 1$

C. $y = -2(x-1)^2 - 1$

D. $y = -2(x+1)^2 - 1$

3. (4 分) 如图, 传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 1:2, 物体从地面沿着该斜坡前进了 10 米, 那么物体离地面的高度为 ()



A. 5 米

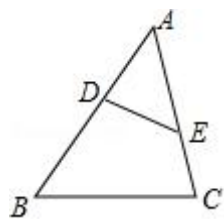
B. $5\sqrt{3}$ 米

C. $2\sqrt{5}$ 米

D. $4\sqrt{5}$ 米

4. (4 分) 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边上, 下列条件中: ① $\angle ADE = \angle C$;

② $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$; ③ $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$. 使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ACB$ 一定相似的是 ()



A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ①②③

5. (4 分) 下列判断错误的是 ()

A. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

B. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$, 其中 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

C. 设 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$

D. 如果 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -2\vec{b}$

6. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象经过 $(0, 1)$, $(4, 0)$, 当该二次函数

的自变量分别取 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2 < 4$) 时, 对应的函数值是 y_1, y_2 , 且 $y_1 = y_2$, 设该函数图象的对称轴是 $x = m$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $0 < m < 1$ B. $1 < m \leq 2$ C. $2 < m < 4$ D. $0 < m < 4$

二. 填空题 (共 12 小题, 满分 48 分, 每小题 4 分)

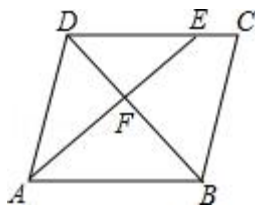
7. (4 分) 已知 $\frac{x}{3} = \frac{2}{y}$, 则 $xy =$ _____.

8. (4 分) 若点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AB = 10\text{cm}$, 则较长线段 AP 的长是 _____ cm .

9. (4 分) 若 $2|\vec{a}| = 3$, 那么 $3|\vec{a}| =$ _____.

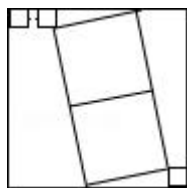
10. (4 分) 如果抛物线 $y = 2x^2 + x + m - 1$ 经过原点, 那么 m 的值等于 _____.

11. (4 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 DC 上, $\triangle DEF$ 的面积与 $\triangle BAF$ 的面积之比为 $9:16$, 则 $DE:EC =$ _____.

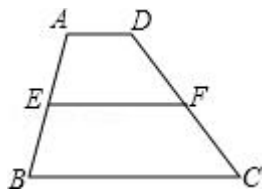


12. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 8$, 则 $\cos A =$ _____.

13. (4 分) 如图, 图中所有四边形都是正方形, 其中左上角的 n 个小正方形与右下角的 1 个小正方形边长相等, 若最大正方形边长是最小正方形边长的 m 倍, 则用含 n 的代数式表示 m 的结果为 $m =$ _____.



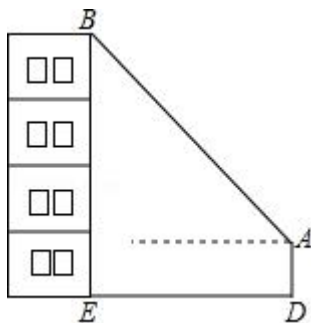
14. (4 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, EF 是梯形的中位线, 点 E 在 AB 上, 若 $AD:BC = 1:3$, $\vec{AD} = \vec{a}$, 则用 $\vec{a}$ 表示 $\vec{FE}$ 是: $\vec{FE} =$ _____.



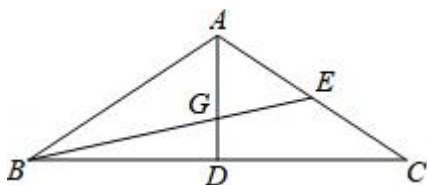
15. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 如果点 G 为重心, 那么 $\angle GCB$ 的余切值为 _____.

16. (4 分) 为了测量某建筑物 BE 的高度 (如图), 小明在离建筑物 15 米 (即 $DE = 15$ 米)

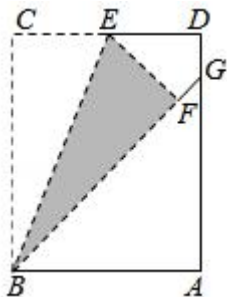
的 A 处，用测角仪测得建筑物顶部 B 的仰角为 45° ，已知测角仪高 $AD = 1.8$ 米，则 BE = _____ 米.



17. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线， $AB = AC = 5$ ， $\cos \angle C = \frac{4}{5}$ ，那么 $GE =$ _____.



18. (4分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠后得到 $\triangle BEF$ ，且点 F 在矩形 $ABCD$ 的内部，将 BF 延长交 AD 于点 G 。若 $\frac{DG}{GA} = \frac{1}{7}$ ，则 $\frac{AD}{AB} =$ _____.



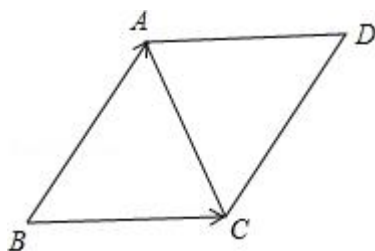
三. 解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\sin 30^\circ + |-2| - \tan 45^\circ + (-1)^{2019}$

20. (10分) 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 填空: $\overrightarrow{CA} =$ _____ (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

(2) 在图中求作 $\vec{a} + \vec{b}$. (不要求写出作法, 只需写出结论即可)



21. (10分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(2, -1)$, $B(-1, -4)$ 两点.

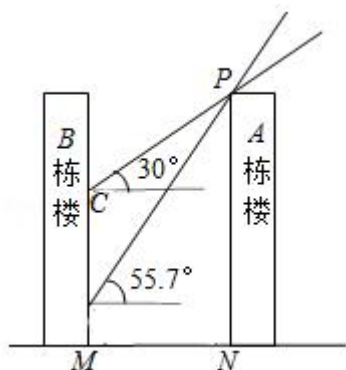
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 用配方法求抛物线的顶点坐标.

22. (10分) 如图, 某小区 A 栋楼在 B 栋楼的南侧, 两楼高度均为 $90m$, 楼间距为 MN . 春分日正午, 太阳光线与水平面所成的角为 55.7° , A 栋楼在 B 栋楼墙面上的影高为 DM ; 冬至日正午, 太阳光线与水平面所成的角为 30° , A 栋楼在 B 栋楼墙面上的影高为 CM . 已知 $CD = 44.5m$.

(1) 求楼间距 MN ;

(2) 若 B 号楼共 30 层, 每层高均为 $3m$, 则点 C 位于第几层? (参考数据: $\tan 30^\circ \approx 0.58$, $\sin 55.7^\circ \approx 0.83$, $\cos 55.7^\circ \approx 0.56$, $\tan 55.7^\circ \approx 1.47$)

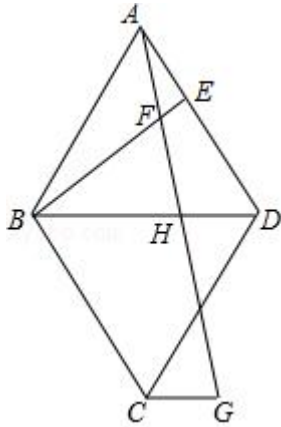


23. (12分) 如图, 菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 点 E 在边 AD 上, 连接 BE , 在 BE 上取点 F , 连接 AF 并延长交 BD 于 H , 且 $\angle AFE = 60^\circ$, 过 C 作 $CG \parallel BD$, 直线 CG 、 AF 交于 G .

(1) 求证: $\angle FAE = \angle EBA$;

(2) 求证: $AH = BE$;

(3) 若 $AE = 3$, $BH = 5$, 求线段 FG 的长.

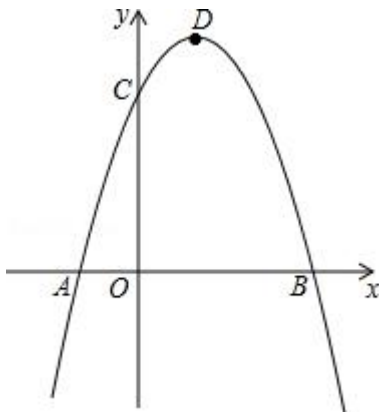


24. (12 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 3a$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，与 x 轴交于另一点 B ，抛物线的顶点为 D 。

(1) 求此二次函数解析式；

(2) 连接 DC 、 BC 、 DB ，求证： $\triangle BCD$ 是直角三角形；

(3) 在对称轴右侧的抛物线上是否存在点 P ，使得 $\triangle PDC$ 为等腰三角形？若存在，求出符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

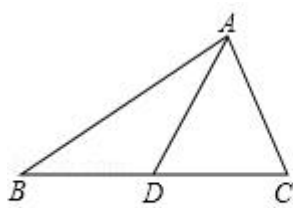


25. (14 分) 小儒在学习了定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”之后做了如下思考：

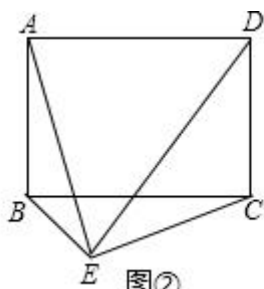
(1) 他认为该定理有逆定理，即“如果一个三角形某条边上的中线等于该边长的一半，那么这个三角形是直角三角形”应该成立，你能帮小儒证明一下吗？如图①，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，若 $AD = BD = CD$ ，求证： $\angle BAC = 90^\circ$ 。

(2) 接下来，小儒又遇到一个问题：如图②，已知矩形 $ABCD$ ，如果在矩形外存在一点 E ，使得 $AE \perp CE$ ，求证： $BE \perp DE$ ，请你作出证明，可以直接用到第 (1) 问的结论。

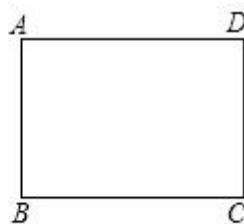
(3) 在第 (2) 问的条件下，如果 $\triangle AED$ 恰好是等边三角形，直接用等式表示出此时矩形的两条邻边 AB 与 BC 的数量关系。



图①



图②



备用图

2019 年上海市徐汇实验中学中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一. 选择题 (满分 24 分, 每小题 4 分)

1. (4 分) 下列四条线段中, 不能成比例的是 ()

A. $a = 4, b = 8, c = 5, d = 10$

B. $a = 2, b = 2\sqrt{5}, c = \sqrt{5}, d = 5$

C. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

D. $a = 1, b = 2, c = 2, d = 4$

【分析】 根据比例线段的概念, 让最小的和最大的相乘, 另外两条相乘, 看它们的积是否相等即可得出答案.

【解答】 解: A、 $4 \times 10 = 5 \times 8$, 能成比例;

B、 $2 \times 5 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5}$, 能成比例;

C、 $1 \times 4 \neq 2 \times 3$, 不能成比例;

D、 $1 \times 4 = 2 \times 2$, 能成比例.

故选: C.

【点评】 此题考查了比例线段, 理解成比例线段的概念, 注意在线段两两相乘的时候, 要让最小的和最大的相乘, 另外两条相乘, 看它们的积是否相等进行判断.

2. (4 分) 把抛物线 $y = -2x^2$ 向上平移 1 个单位, 再向右平移 1 个单位, 得到的抛物线是 ()

A. $y = -2(x+1)^2 + 1$

B. $y = -2(x-1)^2 + 1$

C. $y = -2(x-1)^2 - 1$

D. $y = -2(x+1)^2 - 1$

【分析】 易得原抛物线的顶点及平移后新抛物线的顶点, 根据平移不改变二次项系数利用顶点式可得抛物线解析式.

【解答】 解: $\because$ 函数 $y = -2x^2$ 的顶点为 $(0, 0)$,

$\therefore$ 向上平移 1 个单位, 再向右平移 1 个单位的顶点为 $(1, 1)$,

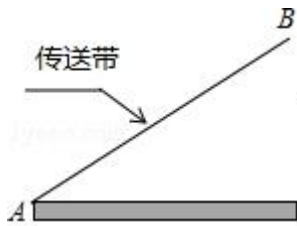
$\therefore$ 将函数 $y = -2x^2$ 的图象向上平移 1 个单位, 再向右平移 1 个单位, 得到抛物线的解析式为 $y = -2(x-1)^2 + 1$,

故选: B.

【点评】 考查二次函数的平移情况, 二次函数的平移不改变二次项的系数; 关键是根据上下平移改变顶点的纵坐标, 左右平移改变顶点的横坐标得到新抛物线的顶点.

3. (4 分) 如图, 传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 1: 2, 物体从地面沿着该斜坡前进了

10 米，那么物体离地面的高度为（ ）



- A. 5 米 B. $5\sqrt{3}$ 米 C. $2\sqrt{5}$ 米 D. $4\sqrt{5}$ 米

【分析】作 $BC \perp$ 地面于点 C ，根据坡度的概念、勾股定理列式计算即可．

【解答】解：作 $BC \perp$ 地面于点 C ，

设 $BC = x$ 米，

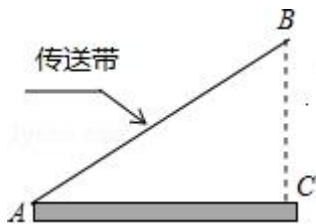
$\because$ 传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 1:2，

$\therefore AC = 2x$ 米，

由勾股定理得， $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，即 $(2x)^2 + x^2 = 10^2$ ，

解得， $x = 2\sqrt{5}$ ，即 $BC = 2\sqrt{5}$ 米，

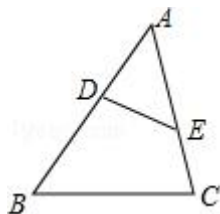
故选：C．



【点评】本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，掌握坡度坡角的概念是解题的关键．

4. (4 分) 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边上，下列条件中：① $\angle ADE = \angle C$ ；

② $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ；③ $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ．使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ACB$ 一定相似的是（ ）



- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

【分析】根据有两组角对应相等的两个三角形相似对①进行判断；根据两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似对②③进行判断．

【解答】解：∵ $\angle DAE = \angle BAC$,

∴ 当 $\angle ADE = \angle C$ 时, $\triangle ADE \sim \triangle ACB$;

当 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ 时, $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.

故选: C.

【点评】本题考查了相似三角形的判定: 三组对应边的比相等的两个三角形相似; 两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似; 有两组角对应相等的两个三角形相似.

5. (4分) 下列判断错误的是 ()

A. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

B. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$, 其中 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

C. 设 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$

D. 如果 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -2\vec{b}$

【分析】轨迹平面向量的性质一一判断即可.

【解答】解: A、 $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, 正确, 故本选项不符合题意.

B、由 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$, 得到: $\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{c}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$, 故两向量方向相反, $\vec{a} // \vec{b}$,

正确, 故本选项不符合题意.

C、 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$, 正确, 故本选项不符合题意.

D、由 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 只能得到两向量模间的数量关系, 不能判断其方向, 判断错误, 故本选项符合题意.

故选: D.

【点评】本题考查平面向量的性质, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

6. (4分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象经过 $(0, 1)$, $(4, 0)$, 当该二次函数的自变量分别取 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2 < 4$) 时, 对应的函数值是 y_1, y_2 , 且 $y_1 = y_2$, 设该函数图象的对称轴是 $x = m$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $0 < m < 1$

B. $1 < m \leq 2$

C. $2 < m < 4$

D. $0 < m < 4$

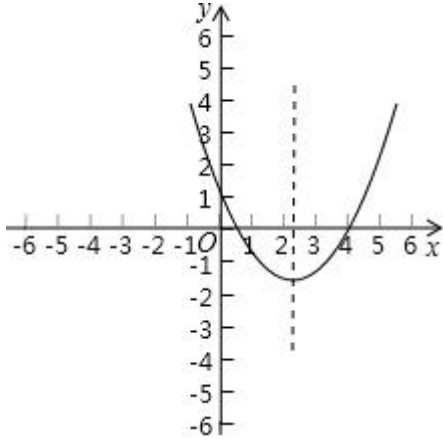
【分析】根据二次函数图象上点的坐标特征即可求得.

【解答】解：当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上，则点 $(0, 1)$ 的对称点为 $(x_0, 1)$ ，

$$\therefore x_0 > 4,$$

$\therefore$ 对称轴为 $x = m$ 中 $2 < m < 4$ ，

故选：C.



【点评】本题考查了二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，画出草图更直观.

二. 填空题（共 12 小题，满分 48 分，每小题 4 分）

7. (4 分) 已知 $\frac{x}{3} = \frac{2}{y}$ ，则 $xy = \underline{6}$.

【分析】根据两内项之积等于两外项之积解答即可.

【解答】解： $\because \frac{x}{3} = \frac{2}{y}$ ，

$$\therefore xy = 6.$$

故答案为：6.

【点评】本题主要考查比例的性质，可根据比例的基本性质直接求解.

8. (4 分) 若点 P 是线段 AB 的黄金分割点， $AB = 10\text{cm}$ ，则较长线段 AP 的长是 $\underline{5\sqrt{5} - 5}$ cm .

【分析】根据黄金分割的概念得到 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，把 $AB = 10\text{cm}$ 代入计算即可.

【解答】解： $\because P$ 是线段 AB 的黄金分割点， $AP > BP$ ，

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

而 $AB = 10\text{cm}$ ，

$$\therefore AP = 10 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 5\sqrt{5} - 5;$$

故答案为： $5\sqrt{5} - 5$.

【点评】 本题考查了黄金分割的概念：如果一个点把一条线段分成两条线段，并且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项，那么就说这个点把这条线段黄金分割，这个点叫这条线段的黄金分割点；较长线段是整个线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍.

9. (4分) 若 $2|\vec{a}|=3$, 那么 $3|\vec{a}|=\frac{9}{2}$.

【分析】 实数的乘除运算法则同样适用于向量的运算.

【解答】 解：由 $2|\vec{a}|=3$ 得到： $|\vec{a}|=\frac{3}{2}$,

故 $3|\vec{a}|=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

故答案是： $\frac{9}{2}$.

【点评】 考查了平面向量的知识，解题时，可以与实数的运算法则联系起来考虑，属于基础题.

10. (4分) 如果抛物线 $y=2x^2+x+m-1$ 经过原点，那么 m 的值等于 1.

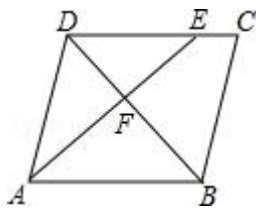
【分析】 把原点坐标代入抛物线解析式即可得到对应 m 的值.

【解答】 解：把 $(0, 0)$ 代入 $y=2x^2+x+m-1$ 得 $m-1=0$ ，解得 $m=1$ ，

故答案为 1.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

11. (4分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 DC 上， $\triangle DEF$ 的面积与 $\triangle BAF$ 的面积之比为 9:16，则 $DE:EC=\underline{3:1}$.



【分析】 根据平行四边形的性质可得出 $DE\parallel AB$ 、 $DC=AB$ ，进而可得出 $\triangle DEF\sim\triangle BAF$ ，根据相似三角形的性质可得出 $\frac{DE}{BA}=\frac{3}{4}$ ，再结合 $EC=CD-DE$ 即可求出结论.

【解答】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore DE\parallel AB, DC=AB,$$

$$\therefore \triangle DEF\sim\triangle BAF.$$

$$\because \triangle DEF \text{ 的面积与 } \triangle BAF \text{ 的面积之比为 } 9:16,$$

$$\therefore \frac{DE}{BA} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{DE}{EC} = \frac{DE}{CD-DE} = \frac{3}{4-3} = 3.$$

故答案为：3：1.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质以及平行四边形的性质，根据相似三角形的性质求出 DE 、 BA 之间的关系是解题的关键.

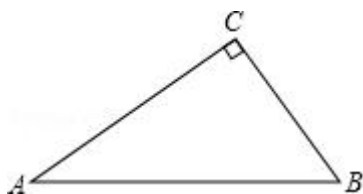
12. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ，则 $\cos A = \frac{4}{5}$.

【分析】作出图形，根据锐角的余弦等于邻边比斜边，列式计算即可得解.

【解答】解：如图， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ，

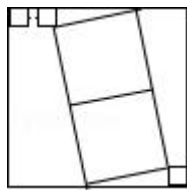
$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

故答案为： $\frac{4}{5}$.



【点评】本题考查了锐角三角函数的定义，在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

13. (4分) 如图，图中所有四边形都是正方形，其中左上角的 n 个小正方形与右下角的 1 个小正方形边长相等，若最大正方形边长是最小正方形边长的 m 倍，则用含 n 的代数式表示 m 的结果为 $m = \frac{2n+5}{1}$.



【分析】如图，过 A 作 $AB \perp FG$ 于 B ，根据相似三角形的性质得到 $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{CE} = 2$ ，设

小正方形的边长为 1，则大正方形的边长为 m ，求得 $BC = 2DE = 2$ ， $CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(m - 1)$ ，列方程即可得到结论.

【解答】解：如图，过 A 作 $AB \perp FG$ 于 B ，

则 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ ，

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{CE} = 2,$$

设小正方形的边长为 1，则大正方形的边长为 m ，

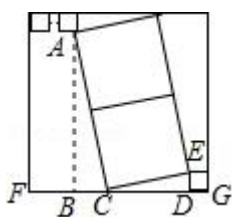
$$\therefore AB = m - 1, BF = n, DE = 1,$$

$$\therefore BC = 2DE = 2, CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(m - 1),$$

$$\therefore FG = FB + BC + CD + DG = n + 2 + \frac{1}{2}(m - 1) + 1 = m,$$

$$\therefore m = 2n + 5,$$

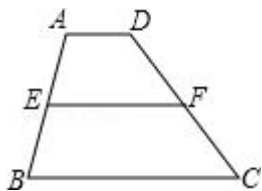
故答案为: $2n + 5$.



【点评】 本题考查了列代数式，相似三角形的性质和判定，正方形的性质，正确的作出辅助线构造相似三角形是解题的关键.

14. (4 分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， EF 是梯形的中位线，点 E 在 AB 上，若 AD :

$BC = 1:3$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ，则用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{FE}$ 是: $\overrightarrow{FE} = \underline{-2\vec{a}}$.



【分析】 此题只需根据梯形的中位线定理得到 EF 和 AD 的关系即可.

【解答】 解: 根据 $AD:BC = 1:3$ ，则 $BC = 3AD$.

根据梯形的中位线定理，得 $EF = 2AD$.

$$\text{又} \because \overrightarrow{AD} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{FE} = -2\vec{a}.$$

【点评】 考查了梯形的中位线定理.

15. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ，如果点 G 为重心，那么 $\angle GCB$ 的余切值为 $\underline{4}$.

【分析】 根据等腰三角形的三线合一，勾股定理求出 AD 的长，利用重心的性质即可求

出 DG 的长，利用余切的定义解答即可．

【解答】解：作 $AD \perp BC$ 于 D ，

则点 G 在 AD 上，连接 GC ，

$$\because AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 4,$$

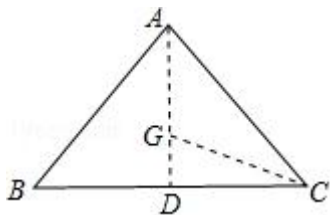
$$\text{由勾股定理得, } AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3,$$

$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore DG = \frac{1}{3}AD = 1,$$

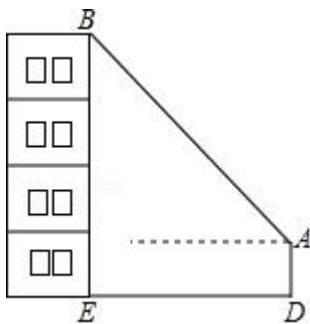
$$\therefore \cot \angle GCB = \frac{CD}{DG} = 4,$$

故答案为：4．



【点评】本题考查的是重心的概念和性质，锐角三角函数的定义，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍．

16. (4 分) 为了测量某建筑物 BE 的高度 (如图)，小明在离建筑物 15 米 (即 $DE = 15$ 米) 的 A 处，用测角仪测得建筑物顶部 B 的仰角为 45° ，已知测角仪高 $AD = 1.8$ 米，则 BE = 16.8 米．



【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知角的邻边求对边，可以用正切求 BC ，再加上 CE 即可．

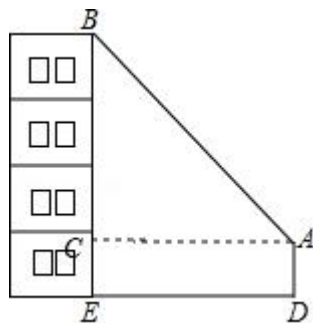
【解答】解：过 A 作 $AC \perp BE$ 于 C ，

则 $AC = DE = 15$ ，

根据题意：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，有 $BC = AC \times \tan 45^\circ = 15$ ，

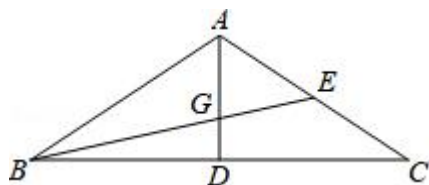
则 $BE = BC + CE = 16.8$ (米),

故答案为: 16.8.



【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 理解仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的概念是解题的关键.

17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, $AB = AC = 5$, $\cos \angle C = \frac{4}{5}$, 那么 $GE = \frac{\sqrt{17}}{2}$.



【分析】 根据题意, 作出合适的辅助线, 然后根据勾股定理、三角形相似可以求得 GE 的长, 本题得以解决.

【解答】 解: 作 $EF \perp BC$ 于点 F ,

$$\because AD、BE \text{ 分别是边 } BC、AC \text{ 上的中线}, AB = AC = 5, \cos \angle C = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AD \perp BC, AD = 3, CD = 4,$$

$$\therefore AD \parallel EF, BC = 8,$$

$$\therefore EF = 1.5, DF = 2, \triangle BDG \sim \triangle BFE,$$

$$\therefore \frac{DG}{FE} = \frac{BD}{BF} = \frac{BG}{BE}, BF = 6,$$

$$\therefore DG = 1,$$

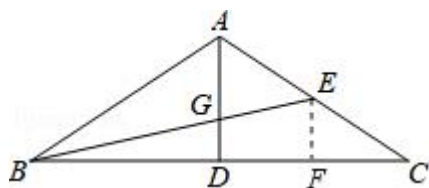
$$\therefore BG = \sqrt{17},$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{17}}{BE},$$

$$\text{得 } BE = \frac{3\sqrt{17}}{2},$$

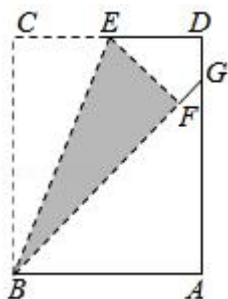
$$\therefore GE = BE - BG = \frac{3\sqrt{17}}{2} - \sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.



【点评】本题考查解直角三角形，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

18. (4分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠后得到 $\triangle BEF$ ，且点 F 在矩形 $ABCD$ 的内部，将 BF 延长交 AD 于点 G 。若 $\frac{DG}{GA} = \frac{1}{7}$ ，则 $\frac{AD}{AB} = \underline{\sqrt{2}}$ 。



【分析】由中点定义可得 $DE = CE$ ，再由翻折的性质得出 $DE = EF$ ， $BF = BC$ ， $\angle BFE = \angle D = 90^\circ$ ，从而得到 $DE = EF$ ，连接 EG ，利用“HL”证明 $\text{Rt}\triangle EDG \cong \text{Rt}\triangle EFG$ ，得出 $DG = FG$ ，设 $DG = a$ ，求出 GA 、 AD ，再由矩形的对边相等得出 $AD = BC$ ，求出 BF ，再求出 BG ，由勾股定理得出 AB ，再求比值即可。

【解答】解：连接 GE ，

$\because$ 点 E 是 CD 的中点，

$\therefore EC = DE$ ，

$\because$ 将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠后得到 $\triangle BEF$ 、且点 F 在矩形 $ABCD$ 的内部，

$\therefore EF = DE$ ， $\angle BFE = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EDG$ 和 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中

$$\begin{cases} GE = GE \\ DE = EF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle EDG \cong \text{Rt}\triangle EFG$ (HL),

$\therefore FG = DG$ ，

$$\therefore \frac{DG}{GA} = \frac{1}{7},$$

$\therefore$ 设 $DG = FG = a$ ，则 $AG = 7a$ ，

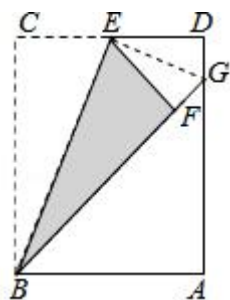
故 $AD = BC = 8a$,

则 $BG = BF + FG = 9a$,

$$\therefore AB = \sqrt{(9a)^2 - (7a)^2} = 4\sqrt{2}a,$$

$$\text{故 } \frac{AD}{AB} = \frac{8a}{4\sqrt{2}a} = \sqrt{2}.$$

故答案为: $\sqrt{2}$.



【点评】 本题考查了矩形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理的应用、以及翻折变换的性质；熟记性质并作辅助线构造出全等三角形是解题的关键.

三. 解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\sin 30^\circ + |-2| - \tan 45^\circ + (-1)^{2019}$

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值以及绝对值的性质分别化简得出答案.

$$\text{【解答】解: 原式} = \frac{1}{2} + 2 - 1 - 1$$

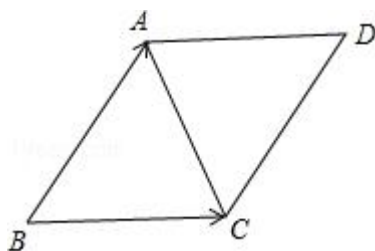
$$= \frac{1}{2}.$$

【点评】 此题主要考查了实数运算, 正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 填空: $\overrightarrow{CA} = \underline{\vec{a} - \vec{b}}$ (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

(2) 在图中求作 $\vec{a} + \vec{b}$. (不要求写出作法, 只需写出结论即可)



【分析】 (1) 根据三角形法则可知: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$, 延长即可解决问题;

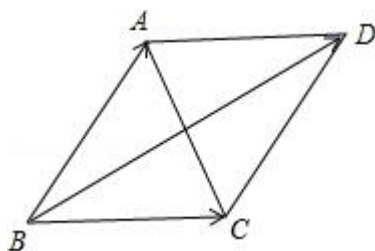
(2) 连接 BD . 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, 即可推出 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

【解答】解: (1) $\because \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$.

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}.$$

故答案为 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

(2) 连接 BD .



$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

$\therefore \overrightarrow{BD}$ 即为所求;

【点评】本题考查作图 - 复杂作图、平行四边形的性质、平面向量等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

21. (10 分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(2, -1)$, $B(-1, -4)$ 两点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 用配方法求抛物线的顶点坐标.

【分析】(1) 利用待定系数法确定函数关系式;

(2) 利用配方法将所求的函数解析式转化为顶点式, 即可直接得到答案.

【解答】解: (1) 把 $A(2, -1)$, $B(-1, -4)$ 两点代入 $y = -2x^2 + bx + c$, 得
$$\begin{cases} -8 + 2b + c = -1 \\ -2 - b + c = -4 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 3 \\ c = 1 \end{cases},$$

故该抛物线解析式为: $y = -2x^2 + 3x + 1$.

(2) 由 (1) 知, 抛物线解析式为: $y = -2x^2 + 3x + 1$.

$$y = -2x^2 + 3x + 1 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + 1 + \frac{9}{8} = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}.$$

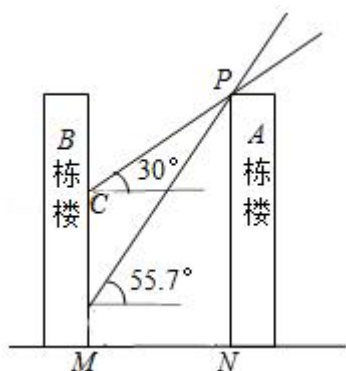
所以抛物线的顶点坐标是 $(\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$.

【点评】考查了抛物线与 x 轴的交点坐标，二次函数的三种形式以及待定系数法确定函数解析式，掌握配方法是将二次函数解析式的三种形式间转换的关键.

22. (10 分) 如图，某小区 A 栋楼在 B 栋楼的南侧，两楼高度均为 $90m$ ，楼间距为 MN . 春分日正午，太阳光线与水平面所成的角为 55.7° ， A 栋楼在 B 栋楼墙面上的影高为 DM ；冬至日正午，太阳光线与水平面所成的角为 30° ， A 栋楼在 B 栋楼墙面上的影高为 CM . 已知 $CD = 44.5m$.

(1) 求楼间距 MN ;

(2) 若 B 号楼共 30 层，每层高均为 $3m$ ，则点 C 位于第几层？(参考数据： $\tan 30^\circ \approx 0.58$ ， $\sin 55.7^\circ \approx 0.83$ ， $\cos 55.7^\circ \approx 0.56$ ， $\tan 55.7^\circ \approx 1.47$)



【分析】(1) 过点 P 作 $PE \parallel MN$ ，交 B 栋楼与点 E ，构造矩形 $EPNM$ 、直角 $\triangle PEC$ 和直角 $\triangle PED$. 利用锐角三角函数用含 EP 的代数式表示出 EC 、 ED ，由 $CD = ED - EC$ 得方程，求解即可；

(2) 计算 EC ，得 CM 的高，由 3 米一层得点 C 所在层数.

【解答】解：(1) 过点 P 作 $PE \parallel MN$ ，交 B 栋楼与点 E ，
则四边形 $PEMN$ 为矩形.

$$\therefore EP = MN$$

由题意知： $\angle EPD = 55.7^\circ$

$$\angle EPC = 30^\circ.$$

在 $Rt\triangle ECP$ 中， $EC = \tan \angle EPC \times EP$

$$= \tan 30^\circ \times EP = \frac{\sqrt{3}}{3} EP \approx 0.58EP,$$

在 $Rt\triangle EDP$ 中， $ED = \tan \angle EPD \times EP$

$$= \tan 55.7^\circ \times EP \approx 1.47EP,$$

$$\because CD = ED - EC,$$

$$\therefore 1.47EP - 0.58EP = 44.5$$

$$\therefore EP = MN = 50 \text{ (m)}$$

答：楼间距 MN 为 $50m$ 。

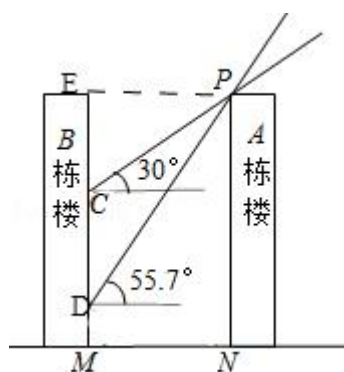
$$(2) \because EC = 0.58EP$$

$$= 0.58 \times 50 = 29 \text{ (m)}$$

$$\therefore CM = 90 - 29 = 61 \text{ (m)}$$

$$\because 61 \div 3 \approx 20.3 \approx 21 \text{ (层)}$$

答：点 C 位于第 21 层。



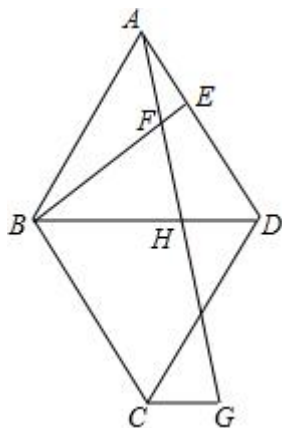
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用．解决此问题的关键在于正确理解题意的基础上建立数学模型，把实际问题转化为数学问题．

23. (12 分) 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ，点 E 在边 AD 上，连接 BE ，在 BE 上取点 F ，连接 AF 并延长交 BD 于 H ，且 $\angle AFE = 60^\circ$ ，过 C 作 $CG \parallel BD$ ，直线 CG 、 AF 交于 G 。

(1) 求证： $\angle FAE = \angle EBA$ ；

(2) 求证： $AH = BE$ ；

(3) 若 $AE = 3$ ， $BH = 5$ ，求线段 FG 的长。



【分析】(1) 由 $\angle AFE = \angle BAE = 60^\circ$ 、 $\angle AEF = \angle BEA$ 证 $\triangle AEF \sim \triangle BEA$ ，据此可得；

(2) 根据菱形的性质得 $AB = AD$ 、 $\angle BAE = \angle ADB = 60^\circ$ ，利用“ASA”证 $\triangle ABE \cong \triangle DAH$ 可得答案；

(3) 连接 AC 交 BD 于点 P ，则 $AC \perp BD$ ，且 AC 平分 BD ，利用 $AE = DH = 3$ 、 $BH = 5$ ，结合菱形的性质可得 $AC = 2AP = 8\sqrt{3}$ 、 $PH = 1$ ，由 $CG \parallel BD$ 且 P 为 AC 中点知 $CG = 2$ ，根据勾股定理知 $AG = 14$ ， $BE = AH = \frac{1}{2}AG = 7$ ，利用 $\triangle AEF \sim \triangle BEA$ 知 $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{BE}$ ，据此求得 $AF = \frac{24}{7}$ ，由 $FG = AG - AF$ 可得答案。

【解答】解：(1) $\because \angle AFE = \angle BAE = 60^\circ$ 、 $\angle AEF = \angle BEA$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BEA$ ，

$\therefore \angle FAE = \angle ABE$ ；

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ，

$\therefore AB = AD$ 、 $\angle BAE = \angle ADB = 60^\circ$ ，

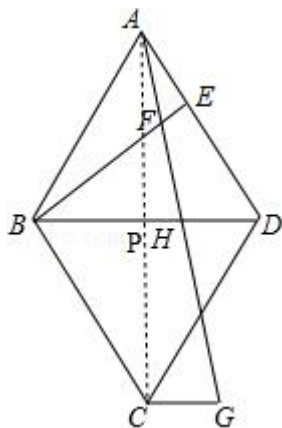
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAH$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle ABE = \angle DAH \\ AB = DA \\ \angle BAE = \angle ADB \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAH$ (ASA)，

$\therefore AH = BE$ ；

(3) 如图，连接 AC 交 BD 于点 P ，则 $AC \perp BD$ ，且 AC 平分 BD ，



$$\because \triangle ABE \cong \triangle DAH,$$

$$\therefore AE = DH = 3,$$

$$\text{则 } BD = BH + DH = 8,$$

$$\therefore BP = PD = 4, \quad PH = BH - BP = 1,$$

$$\because AB = BD = 8,$$

$$\therefore AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\text{则 } AC = 2AP = 8\sqrt{3},$$

$$\because CG \parallel BD, \text{ 且 } P \text{ 为 } AC \text{ 中点},$$

$$\therefore \angle ACG = 90^\circ, \quad CG = 2PH = 2,$$

$$\therefore AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = 14, \quad BE = AH = \frac{1}{2}AG = 7,$$

$$\because \triangle AEF \sim \triangle BEA,$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{BE}, \text{ 即 } \frac{AF}{8} = \frac{3}{7},$$

$$\text{解得: } AF = \frac{24}{7},$$

$$\therefore FG = AG - AF = 14 - \frac{24}{7} = \frac{74}{7}.$$

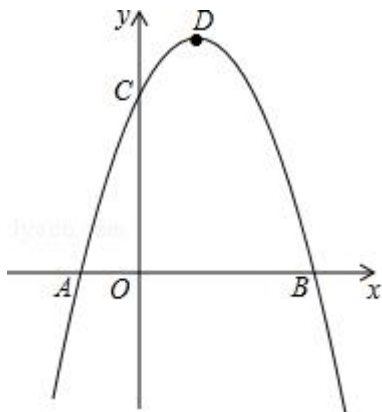
【点评】 本题主要考查相似三角形的判定与性质及菱形的性质，解题的关键是熟练掌握菱形的性质和中位线定理、勾股定理及相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定和性质等知识点。

24. (12分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 3a$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，与 x 轴交于另一点 B ，抛物线的顶点为 D 。

(1) 求此二次函数解析式；

(2) 连接 DC 、 BC 、 DB ，求证： $\triangle BCD$ 是直角三角形；

(3) 在对称轴右侧的抛物线上是否存在点 P ，使得 $\triangle PDC$ 为等腰三角形？若存在，求出符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



【分析】(1) 将 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 代入二次函数 $y = ax^2 + bx - 3a$ 求得 a 、 b 的值即可确定二次函数的解析式；

(2) 分别求得线段 BC 、 CD 、 BD 的长，利用勾股定理的逆定理进行判定即可；

(3) 分以 CD 为底和以 CD 为腰两种情况讨论．运用两点间距离公式建立起 P 点横坐标和纵坐标之间的关系，再结合抛物线解析式即可求解。

【解答】解：(1) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx - 3a$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，

$\therefore$ 根据题意，得 $\begin{cases} a - b - 3a = 0 \\ -3a = 3 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2) 由 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$ 得， D 点坐标为 $(1, 4)$ ，

定义抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ ．令 $y = 0$ ， $-x^2 + 2x + 3 = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 3 ，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$\therefore CD = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$ ，

$BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，

$BD = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore CD^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 20$ ， $BD^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ ，

$\therefore CD^2 + BC^2 = BD^2$ ，

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形；

(3) 存在.

$y = -x^2 + 2x + 3$ 对称轴为直线 $x = 1$.

①若以 CD 为底边, 则 $P_1D = P_1C$,

设 P_1 点坐标为 (x, y) , 根据勾股定理可得 $P_1C^2 = x^2 + (3 - y)^2$, $P_1D^2 = (x - 1)^2 + (4 - y)^2$,

因此 $x^2 + (3 - y)^2 = (x - 1)^2 + (4 - y)^2$,

即 $y = 4 - x$.

又 P_1 点 (x, y) 在抛物线上,

$\therefore 4 - x = -x^2 + 2x + 3$,

即 $x^2 - 3x + 1 = 0$,

解得 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, 应舍去,

$\therefore x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

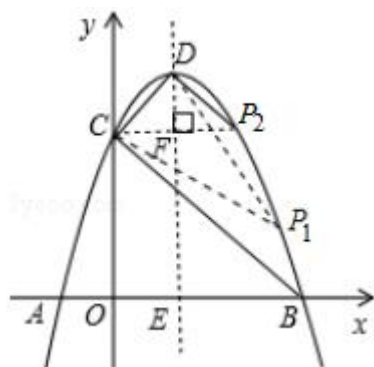
$\therefore y = 4 - x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$,

即点 P_1 坐标为 $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2})$.

②若以 CD 为一腰,

$\because$ 点 P_2 在对称轴右侧的抛物线上, 由抛物线对称性知, 点 P_2 与点 C 关于直线 $x = 1$ 对称, 此时点 P_2 坐标为 $(2, 3)$.

$\therefore$ 符合条件的点 P 坐标为 $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2})$ 或 $(2, 3)$.



【点评】 此题是一道典型的“存在性问题”, 结合二次函数图象和等腰三角形、直角梯形的性质, 考查了它们存在的条件, 有一定的开放性.

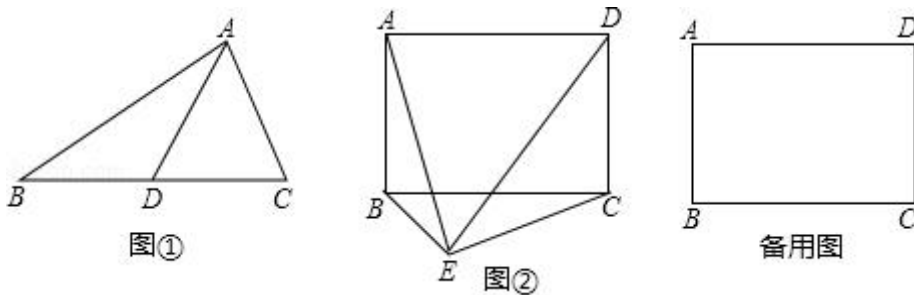
25. (14 分) 小儒在学习了定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”之后做了如下

思考：

(1) 他认为该定理有逆定理，即“如果一个三角形某条边上的中线等于该边长的一半，那么这个三角形是直角三角形”应该成立，你能帮小儒证明一下吗？如图①，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，若 $AD = BD = CD$ ，求证： $\angle BAC = 90^\circ$ 。

(2) 接下来，小儒又遇到一个问题：如图②，已知矩形 $ABCD$ ，如果在矩形外存在一点 E ，使得 $AE \perp CE$ ，求证： $BE \perp DE$ ，请你作出证明，可以直接用到第(1)问的结论。

(3) 在第(2)问的条件下，如果 $\triangle AED$ 恰好是等边三角形，直接用等式表示出此时矩形的两条邻边 AB 与 BC 的数量关系。



【分析】(1) 利用等腰三角形的性质和三角形内角和即可得出结论；

(2) 先判断出 $OE = \frac{1}{2}AC$ ，即可得出 $OE = \frac{1}{2}BD$ ，即可得出结论；

(3) 先判断出 $\triangle ABE$ 是底角是 30° 的等腰三角形，即可构造直角三角形即可得出结论。

【解答】解：(1) $\because AD = BD$,

$$\therefore \angle B = \angle BAD,$$

$$\because AD = CD,$$

$$\therefore \angle C = \angle CAD,$$

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B + \angle C + \angle BAC = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle B + \angle C + \angle BAD + \angle CAD = \angle B + \angle C + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

(2) 如图②，连接 AC ， BD ， OE ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD,$$

$\because AE \perp CE$,

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ ,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \angle BED = 90^\circ ,$$

$$\therefore BE \perp DE;$$

(3) 如图 3, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC, \angle BAD = 90^\circ ,$$

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore AE = AD = BC, \angle DAE = \angle AED = 60^\circ ,$$

由 (2) 知, $\angle BED = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA = 30^\circ ,$$

过点 B 作 $BF \perp AE$ 于 F ,

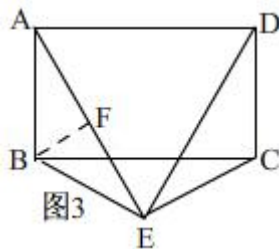
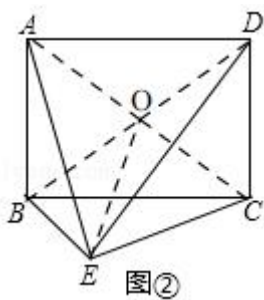
$$\therefore AE = 2AF, \text{ 在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } \angle BAE = 30^\circ ,$$

$$\therefore AB = 2BF, AF = \sqrt{3}BF,$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{3}BF,$$

$$\therefore AE = \sqrt{3}AB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}AB.$$



【点评】此题是四边形综合题，主要考查了矩形的性质，直角三角形的性质和判定，含 30° 角的直角三角形的性质，三角形的内角和公式，解 (1) 的关键是判断出 $\angle B = \angle BAD$ ，解 (2) 的关键是判断出 $OE = \frac{1}{2}AC$ ，解 (3) 的关键是判断出 $\triangle ABE$ 是底角为 30° 的等腰三角形，进而构造直角三角形，是一道中等难度的中考常考题。