

2019 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分）

1. (4 分) 某零件长 40 厘米，若该零件在设计图上的长是 2 毫米，则这幅设计图的比例尺是 ()

- A. 1: 2000 B. 1: 200 C. 200: 1 D. 2000: 1

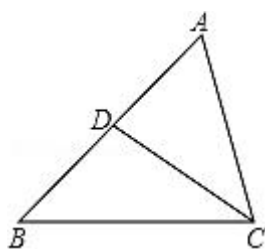
2. (4 分) 将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度所得的抛物线解析式为 ()

- A. $y = (x - 1)^2 + 2$ B. $y = (x + 1)^2 + 2$ C. $y = (x - 1)^2 - 2$ D. $y = (x + 1)^2 - 2$

3. (4 分) 若斜坡的坡比为 $1: \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则斜坡的坡角等于 ()

- A. 30° B. 45° C. 50° D. 60°

4. (4 分) 如图，下列条件中不能判定 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ 的是 ()



- A. $\angle ADC = \angle ACB$ B. $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$ C. $\angle ACD = \angle B$ D. $AC^2 = AD \cdot AB$

5. (4 分) 若 $\vec{a} = 2\vec{e}$ ，向量 $\vec{b}$ 和向量 $\vec{a}$ 方向相反，且 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ ，则下列结论中不正确的是 ()

- A. $|\vec{a}| = 2$ B. $|\vec{b}| = 4$ C. $\vec{b} = 4\vec{e}$ D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

6. (4 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	3	0	-1	m	3	...

① 抛物线开口向下；② 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ；③ m 的值为 0；④ 图象不经过第三象限．上述结论中正确的是 ()

- A. ①④ B. ②④ C. ③④ D. ②③

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分）

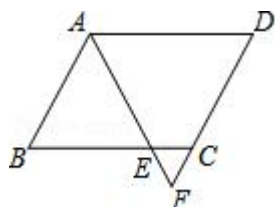
7. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{a}{a+b}$ 的值是_____.

8. (4 分) 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ， $AB = 4$ ，那么 $AP =$ _____.

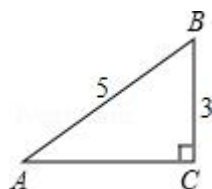
9. (4分) 计算: $\frac{3}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4\vec{b} =$ _____.

10. (4分) 已知 $A(-2, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 是抛物线 $y = (x - 1)^2 + c$ 上两点, 则 y_1 _____ y_2 . (填“>”、“=”或“<”)

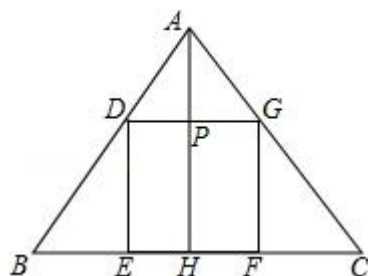
11. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 5$, AF 分别交 BC 于点 E 、交 DC 的延长线于点 F , 且 $CF = 1$, 则 CE 的长为 _____.



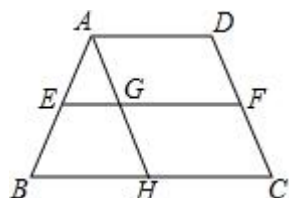
12. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 则 $\sin A =$ _____.



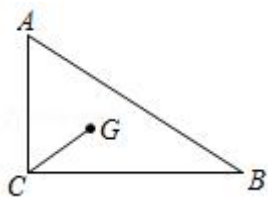
13. (4分) 如图, 正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上. 已知 BC 长为 40 厘米, 若正方形 $DEFG$ 的边长为 25 厘米, 则 $\triangle ABC$ 的高 AH 为 _____ 厘米.



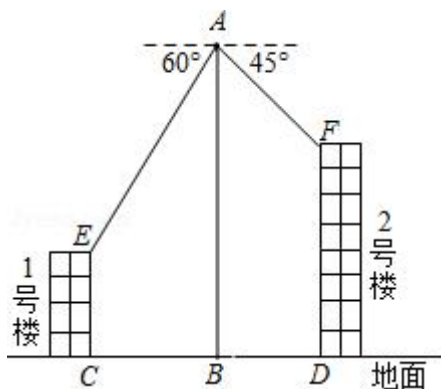
14. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $AH \parallel CD$ 分别交 EF 、 BC 于点 G 、 H , 若 $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, 则用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\vec{EG} =$ _____.



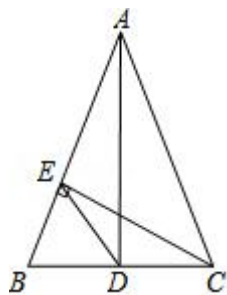
15. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $CG = 2$, $\sin \angle ACG = \frac{2}{3}$, 则 BC 长为 _____.



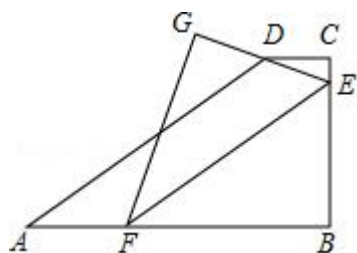
16. (4分) 如图, 某兴趣小组用无人机进行航拍测高, 无人机从1号楼和2号楼的地面正中间 B 点垂直起飞到高度为50米的 A 处, 测得1号楼顶部 E 的俯角为 60° , 测得2号楼顶部 F 的俯角为 45° . 已知1号楼的高度为20米, 则2号楼的高度为_____米 (结果保留根号).



17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BD = CD$, $CE \perp AB$ 于点 E , $\cos B = \frac{5}{13}$, 则 $\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABC}}$ = _____.



18. (4分) 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 6$, $CD = 2$, $\tan A = \frac{3}{4}$. 点 E 为 BC 上一点, 过点 E 作 $EF \parallel AD$ 交边 AB 于点 F . 将 $\triangle BEF$ 沿直线 EF 翻折得到 $\triangle GEF$, 当 EG 过点 D 时, BE 的长为_____.



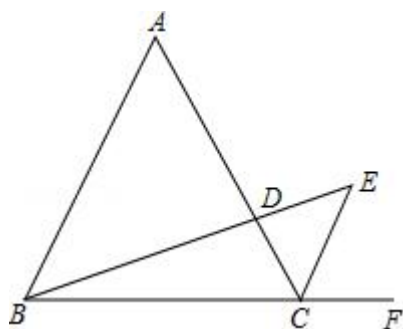
三、解答题 (本大题共7题, 满分78分)

19. (10分) 计算: $\frac{6\sin 30^\circ - 4\sin^2 45^\circ + \tan 60^\circ}{\sqrt{3} - \tan 45^\circ}$.

20. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = 2CD$, $AB \parallel EC$, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD}$;

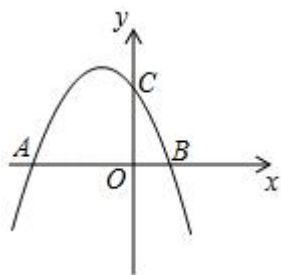
(2) 在图中作出 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 上的分向量, 并直接用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$.



21. (10分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$.

(1) 求抛物线的表达式, 并用配方法求出顶点 D 的坐标;

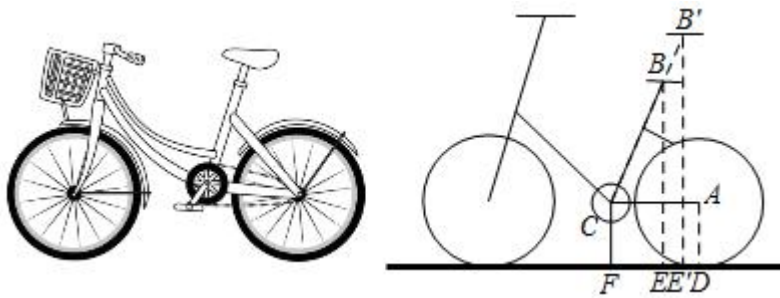
(2) 若点 E 是点 C 关于抛物线对称轴的对称点, 求 $\tan \angle CEB$ 的值.



22. (10分) 如图是某品牌自行车的最新车型实物图和简化图, 它在轻量化设计、刹车、车篮和座位上都做了升级. A 为后胎中心, 经测量车轮半径 AD 为 30cm , 中轴轴心 C 到地面的距离 CF 为 30cm , 座位高度最低刻度为 155cm , 此时车架中立管 BC 长为 54cm , 且 $\angle BCA = 71^\circ$. (参考数据: $\sin 71^\circ \approx 0.95$, $\cos 71^\circ \approx 0.33$, $\tan 71^\circ \approx 2.88$)

(1) 求车座 B 到地面的高度 (结果精确到 1cm);

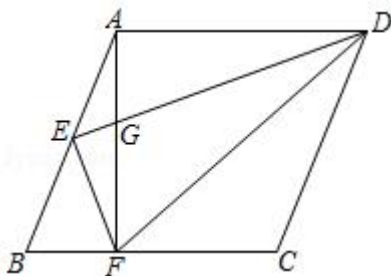
(2) 根据经验, 当车座 B' 到地面的距离 $B'E'$ 为 90cm 时, 身高 175cm 的人骑车比较舒适, 此时车架中立管 BC 拉长的长度 BB' 应是多少? (结果精确到 1cm)



23. (12分) 如图, 已知菱形 $ABCD$, 点 E 是 AB 的中点, $AF \perp BC$ 于点 F , 联结 EF 、 ED 、 DF , DE 交 AF 于点 G , 且 $AE^2 = EG \cdot ED$.

(1) 求证: $DE \perp EF$;

(2) 求证: $BC^2 = 2DF \cdot BF$.

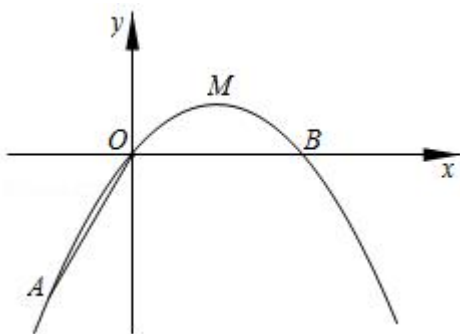


24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系中, 顶点为 M 的抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) 经过点 A 和 x 轴上的点 B , $AO = OB = 2$, $\angle AOB = 120^\circ$.

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 联结 AM , 求 $S_{\triangle AOM}$;

(3) 将抛物线 C_1 向上平移得到抛物线 C_2 , 抛物线 C_2 与 x 轴分别交于点 E 、 F (点 E 在点 F 的左侧), 如果 $\triangle MBF$ 与 $\triangle AOM$ 相似, 求所有符合条件的抛物线 C_2 的表达式.



25. (14分) 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC = BC = 10$, $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$, 点 E 在对角线 AC 上 (不与点 A 、 C 重合), $\angle EDC = \angle ACB$, DE 的延长线与射线 CB 交于点 F , 设 AD 的长为 x .

- (1) 如图 1, 当 $DF \perp BC$ 时, 求 AD 的长;
- (2) 设 $EC = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并直接写出定义域;
- (3) 当 $\triangle DFC$ 是等腰三角形时, 求 AD 的长.

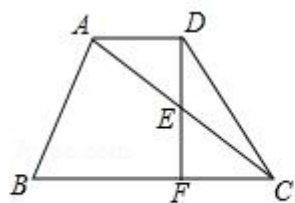


图1

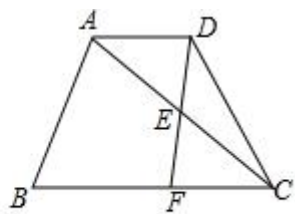


图2

2019 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分）

- 1.（4 分）某零件长 40 厘米，若该零件在设计图上的长是 2 毫米，则这幅设计图的比例尺是（ ）

A. 1: 2000 B. 1: 200 C. 200: 1 D. 2000: 1

【分析】图上距离和实际距离已知，依据“比例尺 = $\frac{\text{图上距离}}{\text{实际距离}}$ ”即可求得这幅设计图的比例尺.

【解答】解：因为 2 毫米 = 0.2 厘米，
则 0.2 厘米：40 厘米 = 1: 200；
所以这幅设计图的比例尺是 1: 200.
故选：B.

【点评】此题主要考查比例尺的计算方法，解答时要注意单位的换算.

- 2.（4 分）将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度所得的抛物线解析式为（ ）

A. $y = (x - 1)^2 + 2$ B. $y = (x + 1)^2 + 2$ C. $y = (x - 1)^2 - 2$ D. $y = (x + 1)^2 - 2$

【分析】根据“左加右减，上加下减”的法则进行解答即可.

【解答】解：将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 +2 个单位长度所得的抛物线解析式为 $y = (x - 1)^2 + 2$.
故选：A.

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知二次函数图象平移的法则解答此题的关键.

- 3.（4 分）若斜坡的坡比为 $1: \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则斜坡的坡角等于（ ）

A. 30° B. 45° C. 50° D. 60°

【分析】直接利用坡角的定义以及坡比的定义即可得出答案.

【解答】解： $\because$ 斜坡的坡比为 $1: \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，设坡角为 α ，

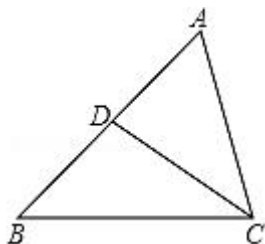
$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ.$$

故选：D.

【点评】此题考查了坡度坡角问题，借助解直角三角形的知识求解是关键.

4. (4分) 如图，下列条件中不能判定 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ 的是 ()



- A. $\angle ADC = \angle ACB$ B. $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$ C. $\angle ACD = \angle B$ D. $AC^2 = AD \cdot AB$

【分析】根据相似三角形的判定逐一判断可得.

【解答】解：A、由 $\angle ADC = \angle ACB$ ， $\angle A = \angle A$ 可得 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，此选项不符合题意；

B、由 $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$ 不能判定 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，此选项符合题意；

C、由 $\angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ 可得 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，此选项不符合题意；

D、由 $AC^2 = AD \cdot AB$ ，即 $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$ ，且 $\angle A = \angle A$ 可得 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，此选项不符合题意；

故选：B.

【点评】本题主要考查相似三角形的判定，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定定理.

5. (4分) 若 $\vec{a} = 2\vec{e}$ ，向量 $\vec{b}$ 和向量 $\vec{a}$ 方向相反，且 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ ，则下列结论中不正确的是 ()

- A. $|\vec{a}| = 2$ B. $|\vec{b}| = 4$ C. $\vec{b} = 4\vec{e}$ D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

【分析】根据已知条件可以得到： $\vec{b} = -4\vec{e}$ ，由此对选项进行判断.

【解答】解：A、由 $\vec{a} = 2\vec{e}$ 推知 $|\vec{a}| = 2$ ，故本选项不符合题意.

B、由 $\vec{b} = -4\vec{e}$ 推知 $|\vec{b}| = 4$ ，故本选项不符合题意.

C、依题意得： $\vec{b} = -4\vec{e}$ ，故本选项符合题意.

D、依题意得： $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ，故本选项不符合题意．

故选：C．

【点评】考查了平面向量，注意：平面向量既有大小，又有方向．

6. (4分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	3	0	-1	m	3	...

①抛物线开口向下；②抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ；③ m 的值为 0；④图象不经过第三象限．

上述结论中正确的是 ()

- A. ①④ B. ②④ C. ③④ D. ②③

【分析】根据二次函数的性质和表格中的数据，可以判断各个小题中的结论是否成立，本题得以解决．

【解答】解：由表格可知，

抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ，故②错误，

抛物线的顶点坐标是 (1, -1)，有最小值，故抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的开口向上，故①错误，

当 $y = 0$ 时， $x = 0$ 或 $x = 2$ ，故 m 的值为 0，故③正确，

当 $y \leq 0$ 时， x 的取值范围是 $0 \leq x \leq 2$ ，故④正确，

故选：C．

【点评】本题考查抛物线与 x 轴的交点、二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答．

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分)

7. (4分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{a}{a+b}$ 的值是 $\frac{2}{5}$ ．

【分析】已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，可设 $a = 2k$ ，则 $b = 3k$ ，代入所求的式子即可求解．

【解答】解： $\because \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ 设 $a = 2k$ ，则 $b = 3k$ ．

$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{2k}{2k+3k} = \frac{2}{5}$ ．

【点评】在解决本题时，根据已知中的比值，把几个未知数用一个未知数表示出来，是解决本题的关键.

8. (4分) 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ， $AB = 4$ ，那么 $AP = \underline{2\sqrt{5} - 2}$.

【分析】根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段；则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，代入数据即可得出 AP 的长.

【解答】解：由于 P 为线段 $AB = 4$ 的黄金分割点，
且 AP 是较长线段；

$$\text{则 } AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5} - 2.$$

故答案为 $2\sqrt{5} - 2$.

【点评】本题考查了黄金分割的概念. 应该识记黄金分割的公式：较短的线段 = 原线段的 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ，较长的线段 = 原线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. (4分) 计算： $\frac{3}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4\vec{b} = \underline{\frac{3}{2}\vec{a} - 7\vec{b}}$.

【分析】实数的运算法则同样适用于平面向量的计算.

$$\text{【解答】解：} \frac{3}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2} \times 2\vec{b} - 4\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - 7\vec{b}.$$

故答案是： $\frac{3}{2}\vec{a} - 7\vec{b}$.

【点评】本题考查了平面向量的有关概念，是基础题.

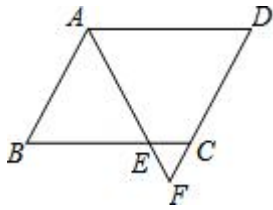
10. (4分) 已知 $A(-2, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 是抛物线 $y = (x-1)^2 + c$ 上两点，则 $y_1 \underline{<} y_2$. (填“>”、“=”或“<”)

【分析】根据二次函数的性质得到 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，然后根据自变量的大小得到对应函数值的大小.

【解答】解：抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，
而 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，
所以 $y_1 < y_2$.
故答案为 $<$.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了二次函数的性质.

11. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=5$, AF 分别交 BC 于点 E 、交 DC 的延长线于点 F , 且 $CF=1$, 则 CE 的长为 $\frac{5}{4}$.



【分析】根据平行四边形的性质和相似三角形的性质可得 $\frac{AB}{CF} = \frac{BE}{CE} = \frac{3}{1} = 3$, 可得 $BE = 3CE$, 即可求 CE 的长.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AB \parallel CD, AD = BC = 5,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FCE$$

$$\therefore \frac{AB}{CF} = \frac{BE}{CE} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\therefore BE = 3CE$$

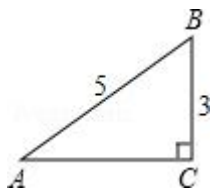
$$\because BC = BE + CE = 5$$

$$\therefore CE = \frac{5}{4}$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{4}$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质, 平行四边形的性质, 熟练运用相似三角形的性质求线段的长度是本题的关键.

12. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 则 $\sin A = \frac{3}{5}$.



【分析】根据正弦定义: 把锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$, 可代入数计算出答案.

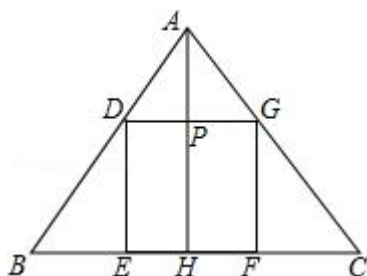
【解答】解: $\because \angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{5}.$$

【点评】此题主要考查了锐角三角函数定义，关键是掌握正弦定义．

13. (4分) 如图，正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 ABC 的边 BC 上，顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上．已知 BC 长为 40 厘米，若正方形 $DEFG$ 的边长为 25 厘米，则 ABC 的高 AH 为 $\frac{200}{3}$ 厘米．



【分析】由 $DG \parallel BC$ 得 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形对应边上高的比等于相似比，列方程求解．

【解答】解：设三角形 ABC 的高 AH 为 x 厘米．

由正方形 $DEFG$ 得， $DG \parallel EF$ ，即 $DG \parallel BC$ ，

$\therefore AH \perp BC$ ，

$\therefore AP \perp DG$ ．

由 $DG \parallel BC$ 得 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AP}{AH} = \frac{DG}{BC}.$$

$\because PH \perp BC$ ， $DE \perp BC$ ，

$\therefore PH = ED$ ， $AP = AH - PH$ ，

$\because BC$ 长为 40 厘米，若正方形 $DEFG$ 的边长为 25 厘米，

$$\therefore \frac{x-25}{x} = \frac{25}{40},$$

$$\text{解得 } x = \frac{200}{3}.$$

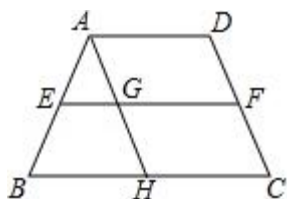
即 AH 为 $\frac{200}{3}$ 厘米．

故答案为： $\frac{200}{3}$ ．

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质．关键是由平行线得到相似三角形，利用相似三角形的性质列方程．

14. (4分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线， $AH \parallel CD$ 分别

交 EF 、 BC 于点 G 、 H ，若 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{EG} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$ 。



【分析】由梯形中位线定理得到 $EF = \frac{AD+BC}{2}$ ，结合梯形的性质，平行四边形的判定与性质求得 GF 的长度，利用平面向量表示即可。

【解答】解：∵ 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，则 $AD \parallel HC$ ， $AH \parallel CD$ ，
∴ 四边形 $AHCD$ 是平行四边形。

∴ $AD = HC$ 。

又 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

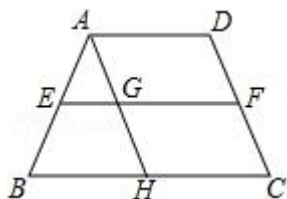
∴ $EF = \frac{AD+BC}{2}$ ，且 $GF = AD$ 。

∴ $EG = EF - GF = \frac{AD+BC}{2} - AD = \frac{BC-AD}{2}$ 。

∴ $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

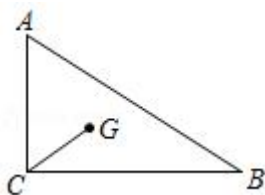
∴ $\overrightarrow{EG} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$ 。

故答案是： $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$ 。



【点评】考查了平面向量和梯形中位线定理，注意：向量既有大小又有方向。

15. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $CG = 2$ ， $\sin \angle ACG = \frac{2}{3}$ ，则 BC 长为 4。



【分析】延长 CG 交 AB 于 D ，作 $DE \perp BC$ 于 E ，由点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，得到 $CG = 2$ ，

求得 $CD = 3$ ，点 D 为 AB 的中点，根据等腰三角形的性质得到 $DC = DB$ ，又 $DE \perp BC$ ，求得 $CE = BE = \frac{1}{2}BC$ ，解直角三角形即可得到结论．

【解答】解：延长 CG 交 AB 于 D ，作 $DE \perp BC$ 于 E ，

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore CG = 2$ ，

$\therefore CD = 3$ ，点 D 为 AB 的中点，

$\therefore DC = DB$ ，又 $DE \perp BC$ ，

$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore \angle ACG + \angle DCE = \angle DCE + \angle CDE = 90^\circ$ ，

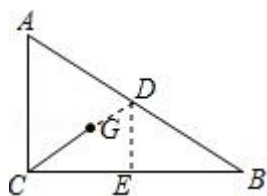
$\therefore \angle ACG = \angle CDE$ ，

$\therefore \sin \angle ACG = \sin \angle CDE = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore CE = 2$ ，

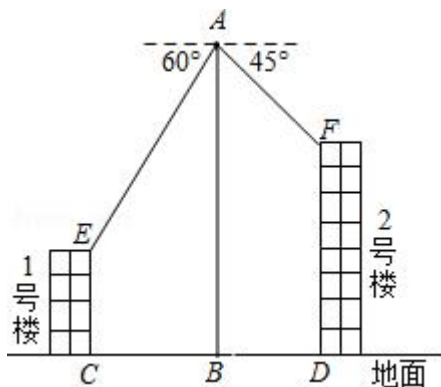
$\therefore BC = 4$

故答案为：4．



【点评】本题考查的是三角形的重心的概念和性质以及锐角三角函数的定义，掌握三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键．

16. (4 分) 如图，某兴趣小组用无人机进行航拍测高，无人机从 1 号楼和 2 号楼的地面正中间 B 点垂直起飞到高度为 50 米的 A 处，测得 1 号楼顶部 E 的俯角为 60° ，测得 2 号楼顶部 F 的俯角为 45° ．已知 1 号楼的高度为 20 米，则 2 号楼的高度为 $(50 - 10\sqrt{3})$ 米 (结果保留根号)．



【分析】过点 E 作 $EG \perp AB$ 于 G ，过点 F 作 $FH \perp AB$ 于 H ，可得四边形 $ECBG$ ， $HBDF$ 是矩形，在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中，根据三角函数求得 EG ，在 $\text{Rt}\triangle AHP$ 中，根据三角函数求得 AH ，再根据线段的和差关系即可求解．

【解答】解：过点 E 作 $EG \perp AB$ 于 G ，过点 F 作 $FH \perp AB$ 于 H ，
则四边形 $ECBG$ ， $HBDF$ 是矩形，

$$\therefore EC = GB = 20, HB = FD,$$

$\because B$ 为 CD 的中点，

$$\therefore EG = CB = BD = HF,$$

由已知得： $\angle EAG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $\angle AFH = 45^\circ$ ．

在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中， $AG = AB - GB = 50 - 20 = 30$ 米，

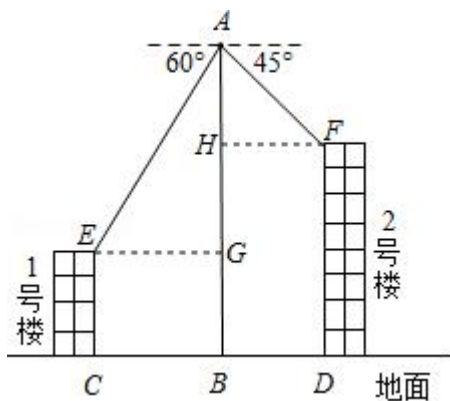
$$\therefore EG = AG \cdot \tan 30^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle AHP$ 中， $AH = HF \cdot \tan 45^\circ = 10\sqrt{3}$ 米，

$$\therefore FD = HB = AB - AH = 50 - 10\sqrt{3} \text{ (米)}.$$

答：2 号楼的高度为 $(50 - 10\sqrt{3})$ 米．

故答案为： $(50 - 10\sqrt{3})$ ．

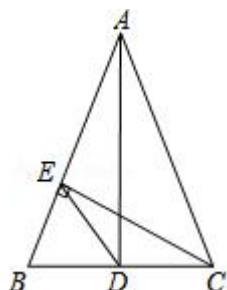


【点评】此题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题的知识．此题难度适中，注意

能借助仰角或俯角构造直角三角形并解直角三角形是解此题的关键.

17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BD = CD$, $CE \perp AB$ 于点 E , $\cos B = \frac{5}{13}$, 则 $\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABC}}$

$$= \frac{25}{169}.$$



【分析】根据等腰三角形的性质得到 $AD \perp BC$, 设 $BD = 5x$, $AB = 13x$, 根据勾股定理得到 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 12x$, 求得 $BC = 2BD = 10x$, 根据相似三角形的性质得到 $BE = \frac{50}{13}x$, $CE = \frac{120}{13}x$, 于是得到结论.

【解答】解: $\because AB = AC$, $BD = CD$,

$\therefore AD \perp BC$,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$$\because \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{13},$$

设 $BD = 5x$, $AB = 13x$,

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 12x,$$

$$\therefore BC = 2BD = 10x,$$

$\because CE \perp AB$,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$,

$\because \angle B = \angle B$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBE$,

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BE}{BD} = \frac{CE}{AD},$$

$$\therefore \frac{10x}{13x} = \frac{BE}{5x} = \frac{CE}{12x},$$

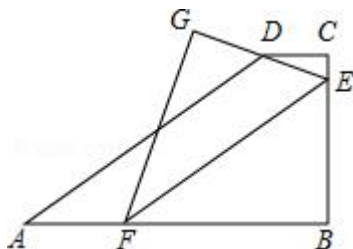
$$\therefore BE = \frac{50}{13}x, \quad CE = \frac{120}{13}x,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{50}{13} x \times \frac{120}{13} x}{\frac{1}{2} \times 10x \times 12x} = \frac{25}{169},$$

故答案为: $\frac{25}{169}$.

【点评】本题考查了解直角三角形，等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，正确的识别图形是解题的关键.

18. (4分) 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 6$, $CD = 2$, $\tan A = \frac{3}{4}$. 点 E 为 BC 上一点, 过点 E 作 $EF \parallel AD$ 交边 AB 于点 F . 将 $\triangle BEF$ 沿直线 EF 翻折得到 $\triangle GEF$, 当 EG 过点 D 时, BE 的长为 $\frac{65}{12}$.



【分析】根据平行线的性质得到 $\angle A = \angle EFB$, $\angle GFE = \angle AMF$, 根据轴对称的性质得到 $\angle GFE = \angle BFE$, 求得 $\angle A = \angle AMF$, 得到 $AF = FM$, 作 $DQ \perp AB$ 于点 Q , 求得 $\angle AQD = \angle DQB = 90^\circ$. 根据矩形的性质得到 $CD = QB = 2$, $QD = CB = 6$, 求得 $AQ = 10 - 2 = 8$, 根据勾股定理得到 $AD = \sqrt{64+36} = 10$, 设 $EB = 3x$, 求得 $FB = 4x$, $CE = 6 - 3x$, 求得 $AF = MF = 10 - 4x$, $GM = 8x - 10$, 根据相似三角形的性质得到 $GD = 6x - \frac{15}{2}$, 求得 $DE = \frac{15}{2} - 3x$, 根据勾股定理列方程即可得到结论.

【解答】解: 如图, $\because EF \parallel AD$,

$$\therefore \angle A = \angle EFB, \angle GFE = \angle AMF,$$

$\because \triangle GFE$ 与 $\triangle BFE$ 关于 EF 对称,

$$\therefore \triangle GFE \cong \triangle BFE,$$

$$\therefore \angle GFE = \angle BFE,$$

$$\therefore \angle A = \angle AMF,$$

$\therefore \triangle AMF$ 是等腰三角形,

$$\therefore AF = FM,$$

作 $DQ \perp AB$ 于点 Q ,

$$\therefore \angle AQD = \angle DQB = 90^\circ.$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle CDQ = 90^\circ.$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CDQB$ 是矩形,

$$\therefore CD = QB = 2, QD = CB = 6,$$

$$\therefore AQ = 10 - 2 = 8,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADQ$ 中, 由勾股定理得

$$AD = \sqrt{64+36} = 10,$$

$$\because \tan A = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan \angle EFB = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{4},$$

设 $EB = 3x$,

$$\therefore FB = 4x, CE = 6 - 3x,$$

$$\therefore AF = MF = 10 - 4x,$$

$$\therefore GM = 8x - 10,$$

$$\because \angle G = \angle B = \angle DQA = 90^\circ, \angle GMD = \angle A,$$

$$\therefore \triangle DGM \sim \triangle DQA,$$

$$\therefore \frac{DG}{DQ} = \frac{GM}{AQ},$$

$$\therefore GD = 6x - \frac{15}{2},$$

$$\therefore DE = \frac{15}{2} - 3x,$$

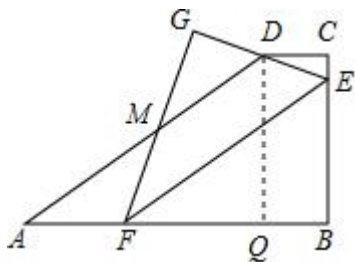
在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中, 由勾股定理得

$$\left(\frac{15}{2} - 3x\right)^2 - (6 - 3x)^2 = 4,$$

$$\text{解得: } 3x = \frac{65}{12},$$

$$\therefore \text{当 } EG \text{ 过点 } D \text{ 时 } BE = \frac{65}{12}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{65}{12}.$$



【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定及性质的运用，矩形的性质的运用，勾股定理的性质的运用，轴对称的性质的运用，正确的作出辅助线是解题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $\frac{6\sin 30^\circ - 4\sin^2 45^\circ + \tan 60^\circ}{\sqrt{3} - \tan 45^\circ}$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值分别代入求出答案.

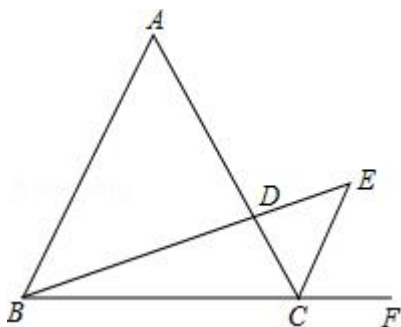
$$\begin{aligned} \text{【解答】 解: 原式} &= \frac{6 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{3 - 2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点评】 此题主要考查了实数运算，正确记忆特殊角的三角函数值是解题关键.

20. (10 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = 2CD$, $AB \parallel EC$, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\vec{CD}$;

(2) 在图中作出 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 上的分向量, 并直接用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$.



【分析】(1) 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{CA}$ ，再根据 $CD = \frac{1}{3}CA$ 求出 $\overrightarrow{CD}$ 即可解决问题.

(2) 利用平行四边形法则，画出分向量，根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ 计算即可.

【解答】解：(1) $\because \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{b} + \vec{a},$

$\because AD = 2CD,$

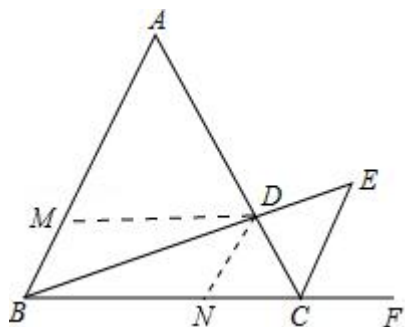
$\therefore CD = \frac{1}{3}CA,$

$\therefore \overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 同向，

$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b};$

(2) 如图 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 上的分向量分别为 $\overrightarrow{BM}$ ， $\overrightarrow{BN}$.

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$



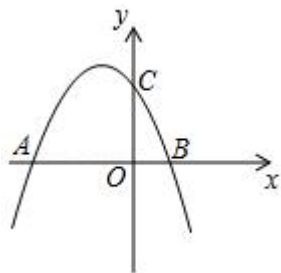
【点评】本题考查作图 - 复杂作图，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

21. (10 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A (-

3, 0) 和点 B ，与 y 轴交于点 C (0, 2).

(1) 求抛物线的表达式，并用配方法求出顶点 D 的坐标；

(2) 若点 E 是点 C 关于抛物线对称轴的对称点，求 $\tan \angle CEB$ 的值.



【分析】(1) 根据抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 可以得到抛物线的解析式, 然后将解析式化为顶点式, 即可得到顶点 D 的坐标;

(2) 根据题意, 可以求得点 E 的坐标, 从而可以求得直线 EB 的函数解析式, 进而求得与 y 轴的交点, 从而可以求得 $\tan \angle CEB$ 的值.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2}{3} \times (-3)^2 + b \times (-3) + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} b = -\frac{4}{3} \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + \frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{抛物线顶点 } D \text{ 的坐标为 } (-1, \frac{8}{3}),$$

即该抛物线的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$, 顶点 D 的坐标为 $(-1, \frac{8}{3})$;

$$(2) \because y = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + \frac{8}{3},$$

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

$\because$ 点 E 是点 C 关于抛物线对称轴的对称点, 点 $C(0, 2)$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-2, 2)$,

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } 0 = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + \frac{8}{3}, \text{ 得 } x_1 = -3, x_2 = 1,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1, 0)$,

设直线 BE 的函数解析式为 $y = kx + n$,

$$\begin{cases} k+n=0 \\ -2k+n=2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k=-\frac{2}{3} \\ n=\frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BE \text{ 的函数解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3},$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = \frac{2}{3},$$

设直线 BE 与 y 轴交于点 F , 则点 F 的坐标为 $(0, \frac{2}{3})$,

$$\therefore OF = \frac{2}{3},$$

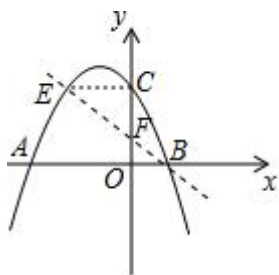
$\because$ 点 $C(0, 2)$, 点 $E(-2, 2)$,

$\therefore OC = 2, CE = 2$,

$\therefore CF = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$,

$\therefore \tan \angle CEF = \frac{CE}{CF} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = 1$,

即 $\tan \angle CEB$ 的值是 $\frac{2}{3}$.

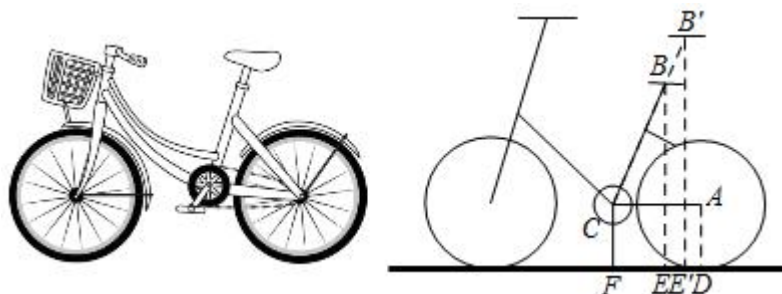


【点评】 本题考查抛物线与 x 轴的交点、二次函数的性质、待定系数法求二次函数解析式和一次函数解析式、锐角三角函数，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

22. (10 分) 如图是某品牌自行车的最新车型实物图和简化图，它在轻量化设计、刹车、车篮和座位上都做了升级. A 为后胎中心，经测量车轮半径 AD 为 30cm ，中轴轴心 C 到地面的距离 CF 为 30cm ，座位高度最低刻度为 155cm ，此时车架中立管 BC 长为 54cm ，且 $\angle BCA = 71^\circ$. (参考数据: $\sin 71^\circ \approx 0.95$, $\cos 71^\circ \approx 0.33$, $\tan 71^\circ \approx 2.88$)

(1) 求车座 B 到地面的高度 (结果精确到 1cm);

(2) 根据经验，当车座 B' 到地面的距离 $B'E'$ 为 90cm 时，身高 175cm 的人骑车比较舒适，此时车架中立管 BC 拉长的长度 BB' 应是多少? (结果精确到 1cm)



【分析】 (1) 根据上题证得的结论分别求得 BH 的长，利用正弦函数的定义即可得到结论;

(2) 设 $B'E'$ 与 AC 交于点 H' ，则有 $B'H' \parallel BH$ ，得到 $\triangle B'H'C \sim \triangle BHC$ ，利用相似三角形

的性质求得 BB' 的长即可.

【解答】解: (1) 设 AC 于 BE 交于 H ,

$$\because AD \perp l, CF \perp l, HE \perp l,$$

$$\therefore AD \parallel CF \parallel HE,$$

$$\because AD = 30\text{cm}, CF = 30\text{cm},$$

$$\therefore AD = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形,

$$\because \angle ADF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFC$ 是矩形,

$$\therefore HE = AD = 30\text{cm},$$

$$\because BC \text{ 长为 } 54\text{cm}, \text{ 且 } \angle BCA = 71^\circ,$$

$$\therefore BH = BC \cdot \sin 71^\circ = 51.3\text{cm},$$

$$\therefore BE = BH + EH = BH + AD = 51.3 + 30 \approx 81\text{cm};$$

答: 车座 B 到地面的高度是 81cm ;

(2) 如图所示, $B'E' = 96.8\text{cm}$, 设 $B'E'$ 与 AC 交于点 H' , 则有 $B'H' \parallel BH$,

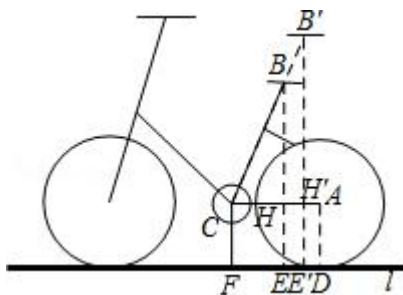
$$\therefore \triangle B'H'C \sim \triangle BHC, \text{ 得 } \frac{B'H'}{BH} = \frac{B'C}{BC}.$$

$$\text{即 } \frac{96.8 - 30}{51} = \frac{B'C}{54},$$

$$\therefore B'C = 63\text{cm}.$$

$$\text{故 } BB' = B'C - BC = 63 - 54 = 9 (\text{cm}).$$

$\therefore$ 车架中立管 BC 拉长的长度 BB' 应是 9cm .

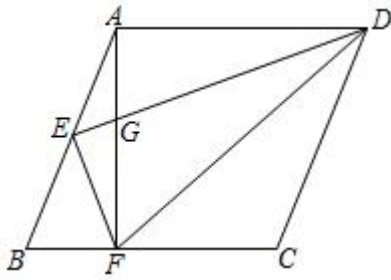


【点评】本题考查了相似三角形的应用、切线的性质解解直角三角形的应用, 解题的难点在于从实际问题中抽象出数学问题, 难度较大.

23. (12分) 如图, 已知菱形 $ABCD$, 点 E 是 AB 的中点, $AF \perp BC$ 于点 F , 联结 EF 、 ED 、 DF , DE 交 AF 于点 G , 且 $AE^2 = EG \cdot ED$.

(1) 求证: $DE \perp EF$;

(2) 求证: $BC^2 = 2DF \cdot BF$.



【分析】(1) 根据直角三角形的性质得到 $AE = FE$, 根据相似三角形的性质得到 $\angle EAG = \angle ADG$, 求得 $\angle DAG = \angle FEG$, 根据菱形的性质得到 $AD \parallel BC$, 求得 $\angle DAG = \angle AFB = 90^\circ$, 于是得到结论;

(2) 由 $AE = EF$, $AE^2 = EG \cdot ED$, 得到 $FE^2 = EG \cdot ED$, 推出 $\triangle FEG \sim \triangle DEF$, 根据相似三角形的性质得到 $\angle EFG = \angle EDF$, 根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

【解答】(1) 证明: $\because AF \perp BC$ 于点 F ,

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$\because$ 点 E 是 AB 的中点,

$$\therefore AE = FE,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle AFE,$$

$$\because AE^2 = EG \cdot ED,$$

$$\therefore \frac{AE}{EG} = \frac{DE}{AE},$$

$$\because \angle AEG = \angle DEA,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle DEA,$$

$$\therefore \angle EAG = \angle ADG,$$

$$\because \angle AGD = \angle FGE,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle FEG,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEG = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \perp EF;$$

(2) 解: $\because AE = EF$, $AE^2 = EG \cdot ED$,

$$\begin{aligned}
&\therefore FE^2 = EG \cdot ED, \\
&\therefore \frac{EF}{DE} = \frac{EG}{EF}, \\
&\because \angle FEG = \angle DEF, \\
&\therefore \triangle FEG \sim \triangle DEF, \\
&\therefore \angle EFG = \angle EDF, \\
&\therefore \angle BAF = \angle EDF, \\
&\because \angle DEF = \angle AFB = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle ABF \sim \triangle DFE, \\
&\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{BF}{EF}, \\
&\because \text{四边形 } ACBD \text{ 是菱形}, \\
&\therefore AB = BC, \\
&\because \angle AFB = 90^\circ, \\
&\because \text{点 } E \text{ 是 } AB \text{ 的中点}, \\
&\therefore FE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC, \\
&\therefore \frac{BC}{DF} = \frac{BF}{\frac{1}{2}BC}, \\
&\therefore BC^2 = 2DF \cdot BF.
\end{aligned}$$

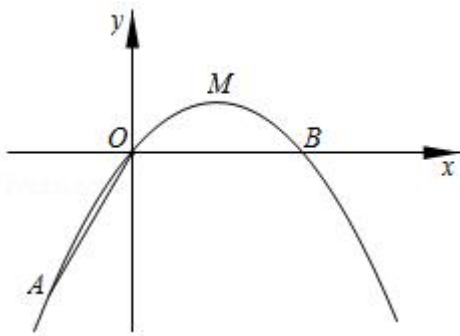
【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，菱形的性质，直角三角形的性质，正确的识别图形是解题的关键．

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系中，顶点为 M 的抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) 经过点 A 和 x 轴上的点 B ， $AO = OB = 2$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ．

(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 联结 AM ，求 $S_{\triangle AOM}$ ；

(3) 将抛物线 C_1 向上平移得到抛物线 C_2 ，抛物线 C_2 与 x 轴分别交于点 E 、 F (点 E 在点 F 的左侧)，如果 $\triangle MBF$ 与 $\triangle AOM$ 相似，求所有符合条件的抛物线 C_2 的表达式．



【分析】(1) 根据题意，可以写出点 B 和点 A 的坐标，从而可以得到该抛物线的表达式；

(2) 根据 (1) 中的函数解析式，可以求得点 M 的坐标，从而可以求得直线 AM 的函数解析式，从而可以求得 $S_{\triangle AOM}$ ；

(3) 根据题意，利用分类讨论的方法和三角形相似的知识可以求得点 F 的坐标，从而可以求得抛物线 C_2 的表达式．

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) 经过点 A 和 x 轴上的点 B ， $AO = OB = 2$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，

$\therefore$ 点 $B(2, 0)$ ，点 $A(-1, -\sqrt{3})$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 = a \times 2^2 + b \times 2 \\ -\sqrt{3} = a \times (-1)^2 + b \times (-1) \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ ；

(2) 连接 MO ， AM ， AM 与 y 轴交于点 D ，

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ，

设过点 $A(-1, -\sqrt{3})$ ， $M(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 的直线解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\begin{cases} -m + n = -\sqrt{3} \\ m + n = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} m = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ n = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AM 的函数解析式为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ，

$$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AOM} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle MOD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1}{2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

(3) 当 $\triangle AOM \sim \triangle FBM$ 时,

$$\frac{OM}{BM} = \frac{OA}{BF},$$

$\because OA = 2$, 点 $O(0, 0)$, 点 $M(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, 点 $B(2, 0)$,

$$\therefore OM = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad BM = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{BF},$$

解得, $BF = 2$,

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(4, 0)$,

设抛物线 C_2 的函数解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + c$,

$\because$ 点 $F(4, 0)$ 在抛物线 C_2 上,

$$\therefore 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(4-1)^2 + c, \text{ 得 } c = 3\sqrt{3},$$

$\therefore$ 抛物线 C_2 的函数解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + 3\sqrt{3}$;

当 $\triangle AOM \sim \triangle MBF$ 时,

$$\frac{OM}{BF} = \frac{OA}{BM},$$

$\because OA = 2$, 点 $O(0, 0)$, 点 $M(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, 点 $B(2, 0)$,

$$\therefore OM = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad BM = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{BF} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}},$$

解得, $BF = \frac{2}{3}$,

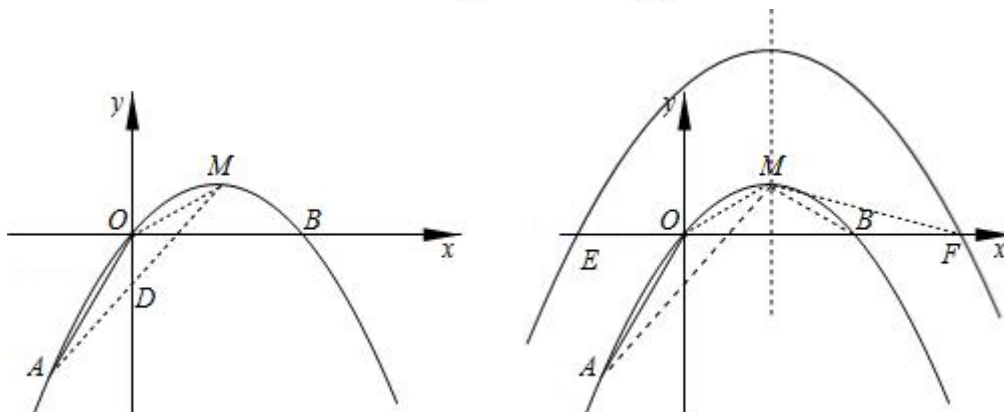
$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(\frac{8}{3}, 0)$,

设抛物线 C_2 的函数解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + d$,

$\because$ 点 $F(\frac{8}{3}, 0)$ 在抛物线 C_2 上,

$$\therefore 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{8}{3}-1)^2 + d, \text{ 得 } d = \frac{25\sqrt{3}}{27},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2 \text{ 的函数解析式为: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + \frac{25\sqrt{3}}{27}.$$



【点评】 本题是一道二次函数综合题, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的函数解析式, 作出合适的辅助线, 找出所求问题需要的条件, 利用分类讨论和数形结合的思想解答.

25. (14分) 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC = BC = 10$, $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$, 点 E 在对角线 AC 上 (不与点 A 、 C 重合), $\angle EDC = \angle ACB$, DE 的延长线与射线 CB 交于点 F , 设 AD 的长为 x .

(1) 如图 1, 当 $DF \perp BC$ 时, 求 AD 的长;

(2) 设 $EC = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并直接写出定义域;

(3) 当 $\triangle DFC$ 是等腰三角形时, 求 AD 的长.

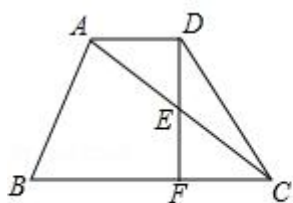


图1

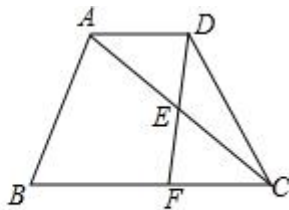


图2

【分析】 (1) 证明 $\triangle ADC \sim \triangle DCE$, 利用 $AC \cdot CE = CD^2 = DF^2 + FC^2 = 36 + 16a^2 = 10 \cdot 5a$, 即可求解;

(2) 过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H , $CD^2 = CH^2 + DH^2 = (AC \sin \alpha)^2 + (AC \cos \alpha - x)^2$, 即可求解;

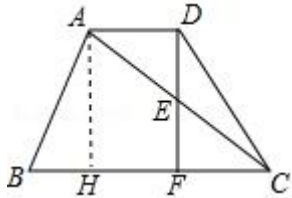
(3) 分 $DF = DC$ 、 $FC = DC$ 、 $FC = FD$ 三种情况, 求解即可.

【解答】解：（1）设： $\angle ACB = \angle EDC = \angle \alpha = \angle CAD$,

$$\because \cos \alpha = \frac{4}{5}, \therefore \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

过点 A 作 $AH \perp BC$ 交于点 H ,

$$AH = AC \cdot \sin \alpha = 6 = DF, BH = 2,$$



如图 1, 设: $FC = 4a$,

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{4}{5}, \text{ 则 } EF = 3a, EC = 5a,$$

$$\because \angle EDC = \angle \alpha = \angle CAD, \angle ACD = \angle ACD,$$

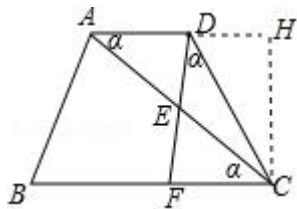
$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore AC \cdot CE = CD^2 = DF^2 + FC^2 = 36 + 16a^2 = 10 \cdot 5a,$$

$$\text{解得: } a = 2 \text{ 或 } \frac{9}{8} \text{ (舍去 } a = 2 \text{),}$$

$$AD = HF = 10 - 2 - 4a = \frac{7}{2};$$

（2）过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ,



$$CD^2 = CH^2 + DH^2 = (AC \sin \alpha)^2 + (AC \cos \alpha - x)^2,$$

$$\text{即: } CD^2 = 36 + (8 - x)^2,$$

$$\text{由 (1) 得: } AC \cdot CE = CD^2,$$

$$\text{即: } y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{8}{5}x + 10 \text{ (} 0 < x < 16 \text{ 且 } x \neq 10 \text{)} \cdots \textcircled{1},$$

（3）①当 $DF = DC$ 时,

$$\because \angle ECF = \angle FDC = \alpha, \angle DFC = \angle DFC,$$

$$\therefore \triangle DFC \sim \triangle CFE, \because DF = DC,$$

$$\therefore FC = EC = y, \therefore x + y = 10,$$

$$\text{即: } 10 = \frac{1}{10}x^2 - \frac{8}{5}x + 10 + x,$$

解得: $x = 6$;

②当 $FC = DC$,

则 $\angle DFC = \angle FDC = \alpha$,

则: $EF = EC = y$, $DE = AE = 10 - y$,

$$\text{在等腰 } \triangle ADE \text{ 中, } \cos \angle DAE = \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}AD}{AE} = \frac{\frac{1}{2}x}{10-y} = \frac{4}{5},$$

$$\text{即: } 5x + 8y = 80,$$

$$\text{将上式代入①式并解得: } x = \frac{39}{4};$$

③当 $FC = FD$,

则 $\angle FCD = \angle FDC = \alpha$, 而 $\angle ECF = \alpha \neq \angle FCD$, 不成立,

故: 该情况不存在;

故: AD 的长为 6 和 $\frac{39}{4}$.

【点评】 本题为四边形的综合题, 涉及到解直角三角形、一元二次方程, 三角形相似等诸多知识点, 其中三角形相似是本题的突破点, 难度较大.