

2019 年上海市崇明区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

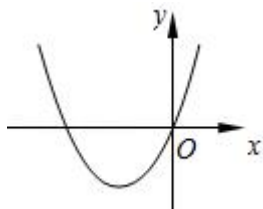
1. (4 分) 若 $2x = 3y$ ，则 $\frac{x}{y}$ 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\frac{AC}{BC}$ 表示 $\angle A$ 的 ()

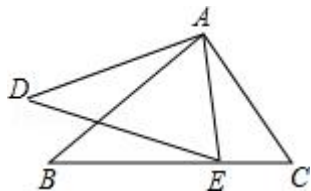
- A. 正弦 B. 正切 C. 余弦 D. 余切

3. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示，那么 a 、 b 的符号为 ()



- A. $a > 0, b > 0$ B. $a < 0, b > 0$ C. $a > 0, b < 0$ D. $a < 0, b < 0$

4. (4 分) 如图，如果 $\angle BAD = \angle CAE$ ，那么添加下列一个条件后，仍不能确定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 的是 ()



- A. $\angle B = \angle D$ B. $\angle C = \angle AED$ C. $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{BC}$ D. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

5. (4 分) 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么下列等式成立的是 ()

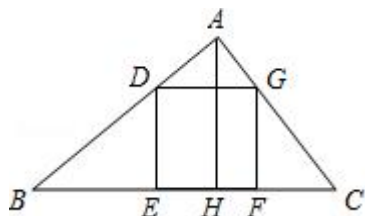
- A. $\vec{a} = \vec{b}$ B. $\vec{a} + \vec{b} = 2$ C. $\vec{a} - \vec{b} = 0$ D. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

6. (4 分) 如果两圆的圆心距为 2，其中一个圆的半径为 3，另一个圆的半径 $r > 1$ ，那么这两个圆的位置关系不可能是 ()

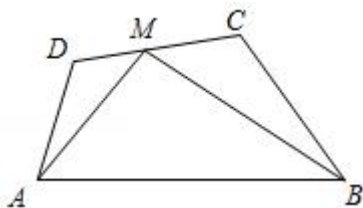
- A. 内含 B. 内切 C. 外离 D. 相交

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4分) 化简: $\frac{3}{2}\vec{a} - (\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}) =$ _____.
8. (4分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a=1$, $c=4$, 那么 $b=$ _____.
9. (4分) 在以 O 为坐标原点的直角坐标平面内有一点 $A(4, 3)$, 如果 AO 与 y 轴正半轴的夹角为 α , 那么 $\cos\alpha =$ _____.
10. (4分) 如果一个正六边形的半径为 2, 那么这个正六边形的周长为 _____.
11. (4分) 如果两个相似三角形的周长比为 4: 9, 那么它们的面积比是 _____.
12. (4分) 已知线段 AB 的长为 10cm , 点 C 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AC > BC$, 则 $AC =$ _____ cm . (结果保留根号)
13. (4分) 已知抛物线 $y = (x - 1)^2 - 4$, 那么这条抛物线的顶点坐标为 _____.
14. (4分) 已知二次函数 $y = -x^2 - 2$, 那么它的图象在对称轴的 _____ 部分是下降的 (填“左侧”或“右侧”).
15. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $CG =$ _____.
16. (4分) 如图, 正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上. 已知 $BC = 6$, $\triangle ABC$ 的高 $AH = 3$, 则正方形 $DEFG$ 的边长为 _____.



17. (4分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 8$. 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有唯一的公共点, 那么 $\odot C$ 的半径 R 的取值范围为 _____.
18. (4分) 如果从一个四边形一边上的点到对边的视角是直角, 那么称该点为直角点. 例如, 如图的四边形 $ABCD$ 中, 点 M 在 CD 边上, 连结 AM 、 BM , $\angle AMB = 90^\circ$, 则点 M 为直角点. 若点 E 、 F 分别为矩形 $ABCD$ 边 AB 、 CD 上的直角点, 且 $AB = 5$, $BC = \sqrt{6}$, 则线段 EF 的长为 _____.



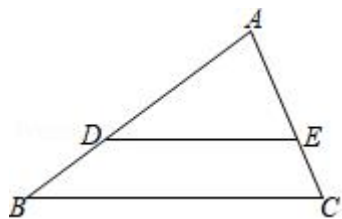
三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{2\cos 30^\circ} + \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

20.（10 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{2}{3}BC$.

（1）如果 $AC = 6$ ，求 AE 的长；

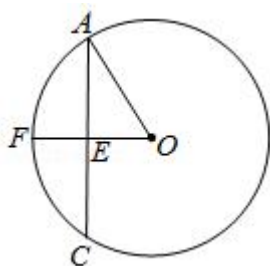
（2）设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，求向量 $\overrightarrow{DE}$ （用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）.



21.（10 分）已知：如图， AO 是 $\odot O$ 的半径， AC 为 $\odot O$ 的弦，点 F 为 $\widehat{AC}$ 的中点， OF 交 AC 于点 E ， $AC = 8$ ， $EF = 2$.

（1）求 AO 的长；

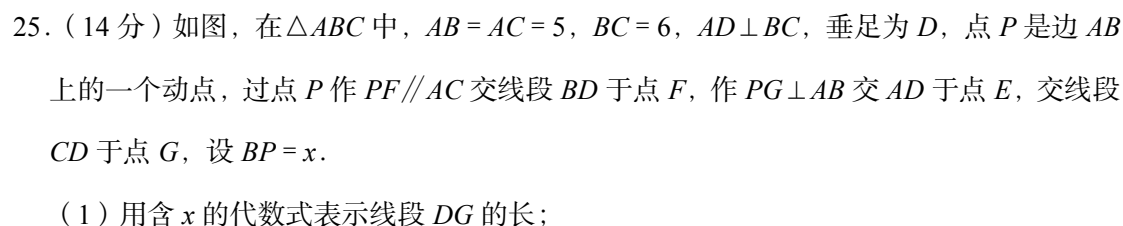
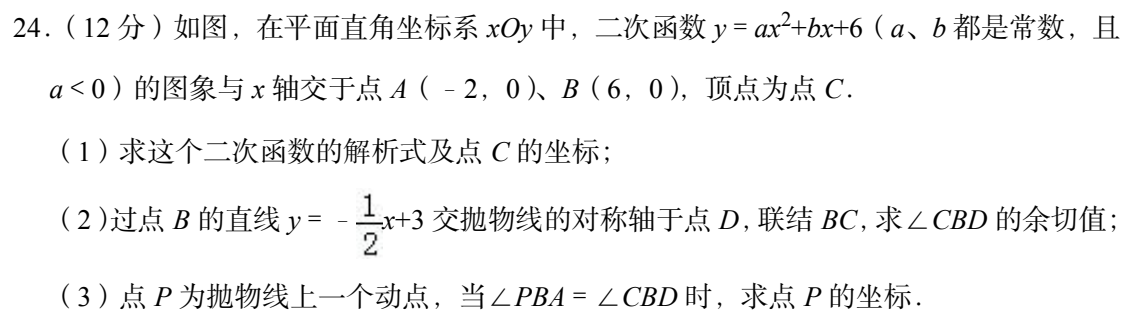
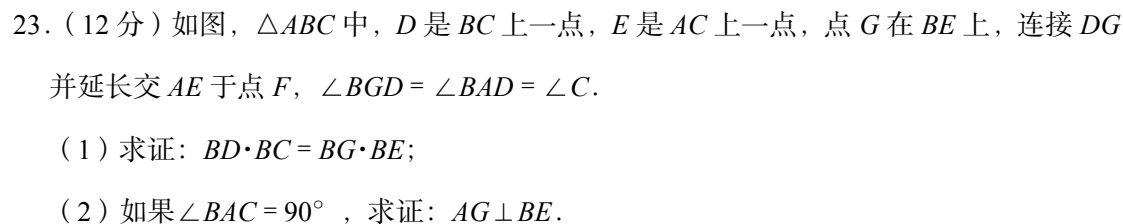
（2）过点 C 作 $CD \perp AO$ ，交 AO 延长线于点 D ，求 $\sin \angle ACD$ 的值.



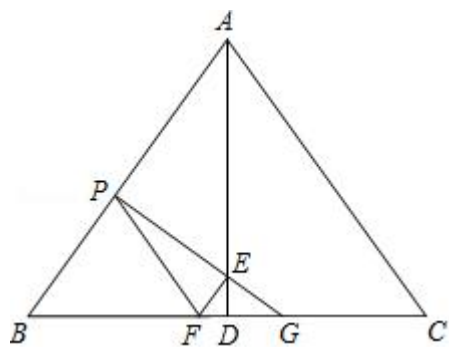
22.（10 分）安装在屋顶的太阳能热水器的横截面示意图如图所示．已知集热管 AE 与支架 BF 所在直线相交于水箱横截面 $\odot O$ 的圆心 O ， $\odot O$ 的半径为 0.2 米， AO 与屋面 AB 的夹角为 32° ，与铅垂线 OD 的夹角为 40° ， $BF \perp AB$ ，垂足为 B ， $OD \perp AD$ ，垂足为 D ， $AB = 2$ 米．

（1）求支架 BF 的长；

（2）求屋面 AB 的坡度．（参考数据： $\tan 18^\circ \approx \frac{1}{3}$ ， $\tan 32^\circ \approx \frac{31}{50}$ ， $\tan 40^\circ \approx \frac{21}{25}$ ）



- (2) 设 $\triangle DEF$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) $\triangle PEF$ 能否为直角三角形? 如果能, 求出 BP 的长; 如果不能, 请说明理由.



2019 年上海市崇明区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. (4 分) 若 $2x = 3y$, 则 $\frac{x}{y}$ 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

【分析】根据比例的基本性质: 两内项的积等于两外项的积即可求解.

【解答】解: $\because 2x = 3y$,

$$\therefore \frac{2x}{y} = 3,$$

$$\text{则 } \frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

故选: B.

【点评】本题考查了比例的基本性质: 两内项的积等于两内项的积.

2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle C = 90^\circ$, 那么 $\frac{AC}{BC}$ 表示 $\angle A$ 的 ()

- A. 正弦 B. 正切 C. 余弦 D. 余切

【分析】根据余切的定义求解可得.

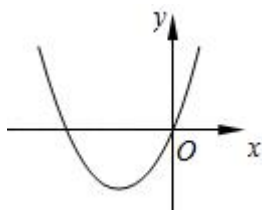
【解答】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \cot A = \frac{AC}{BC},$$

故选: D.

【点评】本题主要考查锐角三角函数的定义, 解题的关键是掌握正弦、余弦、正切、余切的定义.

3. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示, 那么 a 、 b 的符号为 ()



- A. $a > 0, b > 0$ B. $a < 0, b > 0$ C. $a > 0, b < 0$ D. $a < 0, b < 0$

【分析】根据函数图象的特点：开口方向、对称轴等即可判断出 a 、 b 的符号.

【解答】解：如图所示，抛物线开口向上，则 $a > 0$,

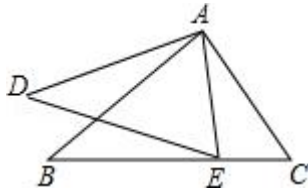
又因为对称轴在 y 轴左侧，故 $-\frac{b}{2a} < 0$,

因为 $a > 0$ ，所以 $b > 0$,

故选：A.

【点评】本题考查了二次函数的图象与系数的关系，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 系数符号由抛物线开口方向、对称轴确定.

4. (4分) 如图，如果 $\angle BAD = \angle CAE$ ，那么添加下列一个条件后，仍不能确定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 的是 ()



- A. $\angle B = \angle D$ B. $\angle C = \angle AED$ C. $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{BC}$ D. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

【分析】根据已知及相似三角形的判定方法对各个选项进行分析，从而得到最后答案.

【解答】解： $\because \angle BAD = \angle CAE$,

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC,$$

$\therefore A, B, D$ 都可判定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

选项 C 中不是夹这两个角的边，所以不相似，

故选：C.

【点评】此题考查了相似三角形的判定：

- ①如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似；
- ②如果两个三角形的两条对应边的比相等，且夹角相等，那么这两个三角形相似；
- ③如果两个三角形的两个对应角相等，那么这两个三角形相似.

5. (4分) 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么下列等式成立的是 ()

- A. $\vec{a} = \vec{b}$ B. $\vec{a} + \vec{b} = 2$ C. $\vec{a} - \vec{b} = 0$ D. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【分析】根据向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，可知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，由此即可判断.

【解答】解：A、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，但方向不一定相同，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 不一定成立，故

本选项错误.

B、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 但方向不一定相同, 则 $\vec{a} + \vec{b} = 2$ 不一定成立, 故本选项错误.

C、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 但方向不一定相同, 则 $\vec{a} - \vec{b} = 0$ 不一定成立, 故本选项错误.

D、向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 故本选项正确.

故选: D.

【点评】本题考查平面向量、单位向量, 属于概念题目, 记住概念是解题的关键.

6. (4 分) 如果两圆的圆心距为 2, 其中一个圆的半径为 3, 另一个圆的半径 $r > 1$, 那么这两个圆的位置关系不可能是 ()

A. 内含 B. 内切 C. 外离 D. 相交

【分析】利用两圆之和一定大于两圆的圆心距可判断这两个圆不可能外离.

【解答】解: $\because r > 1$,

$$\therefore 2 < 3 + r,$$

$\therefore$ 这两个圆的位置关系不可能外离.

故选: C.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系: 两圆的圆心距为 d 、两圆的半径分别为 r 、 R :

①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$; ②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$; ③两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$); ④

两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r$ ($R > r$); ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$ ($R > r$).

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 化简: $\frac{3}{2}\vec{a} - (\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

【分析】平面向量的加减计算法则与实数的加减计算法则相同.

【解答】解: 原式 $= \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

故答案是: $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

【点评】考查了平面向量, 解答此类题目时, 直接去括号, 然后计算加减法即可.

8. (4 分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a = 1$, $c = 4$, 那么 $b = \underline{2}$.

【分析】根据比例中项的定义可得 $b^2 = ac$, 从而易求 b .

【解答】解: $\because b$ 是 a 、 c 的比例中项,

$$\therefore b^2 = ac,$$

即 $b^2 = 4$,

$\therefore b = \pm 2$ (负数舍去).

故答案是: 2.

【点评】 本题考查了比例线段, 解题的关键是理解比例中项的含义.

9. (4分) 在以 O 为坐标原点的直角坐标平面内有一点 $A(4, 3)$, 如果 AO 与 y 轴正半轴的夹角为 α , 那么 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

【分析】 根据勾股定理以及锐角三角函数的定义即可求出答案.

【解答】 解: 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ,

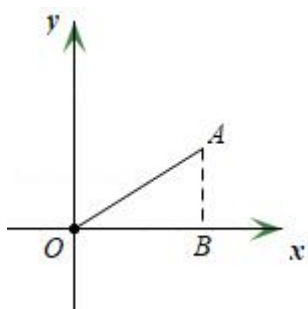
$\therefore A(4, 3)$,

$\therefore OB = 4, AB = 3$,

$\therefore$ 由勾股定理可知: $OA = 5$,

$\therefore \cos \alpha = \cos \angle A = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{5}$,

故答案为: $\frac{3}{5}$



【点评】 本题考查锐角三角函数, 解题的关键是根据勾股定理求出 OA 的长度, 本题属于基础题型.

10. (4分) 如果一个正六边形的半径为 2, 那么这个正六边形的周长为 12.

【分析】 根据正六边形的半径等于边长进行解答即可.

【解答】 解: $\because$ 正六边形的半径等于边长,

$\therefore$ 正六边形的边长 $a = 2$,

正六边形的周长 $= 6a = 12$,

故答案为: 12.

【点评】 本题考查的是正六边形的性质, 解答此题的关键是熟知正六边形的边长等于半径.

11. (4分) 如果两个相似三角形的周长比为 4: 9, 那么它们的面积比是 16: 81.

【分析】根据相似三角形周长的比等于相似比、相似三角形面积的比等于相似比的平方解答即可.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的周长比为 4: 9,

$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 4: 9,

$\therefore$ 两个相似三角形的面积比为 16: 81,

故答案为: 16: 81.

【点评】本题考查的是相似三角形的性质, 掌握相似三角形周长的比等于相似比、相似三角形面积的比等于相似比的平方是解题的关键.

12. (4分) 已知线段 AB 的长为 10cm , 点 C 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AC > BC$, 则 $AC =$ $5\sqrt{5} - 5$ cm . (结果保留根号)

【分析】根据黄金比值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 列式计算即可.

【解答】解: $\because$ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点, $AC > BC$,

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = (5\sqrt{5} - 5) \text{ cm},$$

故答案为: $5\sqrt{5} - 5$.

【点评】本题考查的是黄金分割的概念, 把一条线段分成两部分, 使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项, 这样的线段分割叫做黄金分割, 它们的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做黄金比.

13. (4分) 已知抛物线 $y = (x - 1)^2 - 4$, 那么这条抛物线的顶点坐标为 $(1, -4)$.

【分析】利用二次函数的顶点式是: $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$, 且 a, h, k 是常数), 顶点坐标是 (h, k) 进行解答.

【解答】解: $\because y = (x - 1)^2 - 4$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标是 $(1, -4)$

故填空答案: $(1, -4)$.

【点评】本题主要是对抛物线中顶点式的对称轴, 顶点坐标的考查.

14. (4分) 已知二次函数 $y = -x^2 - 2$, 那么它的图象在对称轴的 右侧 部分是下降的 (填“左侧”或“右侧”).

【分析】根据解析式判断开口方向, 结合对称轴回答问题.

【解答】解：∵二次函数 $y = -x^2 - 2$ 中， $a = -1 < 0$ ，抛物线开口向下，

∴抛物线图象在对称轴右侧， y 随 x 的增大而减小（下降）。

故答案为：右侧。

【点评】本题考查了二次函数的性质，根据抛物线的开口方向和对称轴，可判断抛物线的增减性。

15.（4分）已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， G 为 $\triangle ABC$ 的重心，那么 $CG = \frac{10}{3}$ 。

【分析】根据勾股定理求出 AB ，根据直角三角形的性质求出 CD ，根据三角形的重心的性质计算即可。

【解答】解： $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10,$$

∵ G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

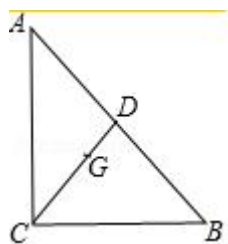
∴ CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

∵ G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

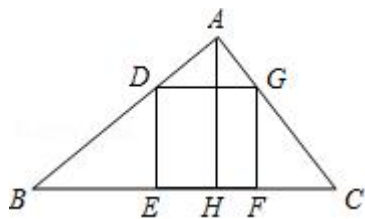
$$\therefore CG = \frac{2}{3}CD = \frac{10}{3},$$

故答案为： $\frac{10}{3}$ 。



【点评】本题考查的是三角形的重心的概念和性质，勾股定理，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍。

16.（4分）如图，正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上。已知 $BC = 6$ ， $\triangle ABC$ 的高 $AH = 3$ ，则正方形 $DEFG$ 的边长为 2。



【分析】高 AH 交 DG 于 M ，如图，设正方形 $DEFG$ 的边长为 x ，则 $DE = MH = x$ ，所以 $AM = 3 - x$ ，再证明 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，则利用相似比得到 $\frac{x}{6} = \frac{3-x}{3}$ ，然后根据比例的性质求出 x 即可．

【解答】解：高 AH 交 DG 于 M ，如图，

设正方形 $DEFG$ 的边长为 x ，则 $DE = MH = x$ ，

$$\therefore AM = AH - MH = 3 - x,$$

$$\because DG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC,$$

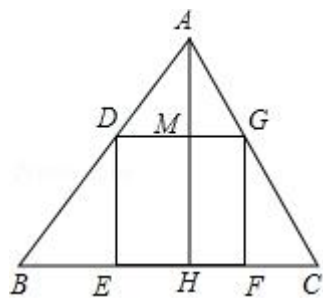
$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AM}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{6} = \frac{3-x}{3},$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore \text{正方形 } DEFG \text{ 的边长为 } 2.$$

答：正方形 $DEFG$ 的边长和面积分别为 2．

故答案为：2．



【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；也考查了正方形的性质．

17. (4 分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ．如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 有唯一的公共点，那么 $\odot C$ 的半径 R 的取值范围为 $r = 4.8$ 或 $6 < r \leq 8$ ．

【分析】因为要使圆与斜边只有一个公共点，所以该圆和斜边相切或和斜边相交，但只有一个交点在斜边上．若 $d < r$ ，则直线与圆相交；若 $d = r$ ，则直线与圆相切；若 $d > r$ ，

则直线与圆相离.

【解答】解：根据勾股定理求得 $BC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,

当圆和斜边相切时，则半径即是斜边上的高，等于 $\frac{24}{5}$;

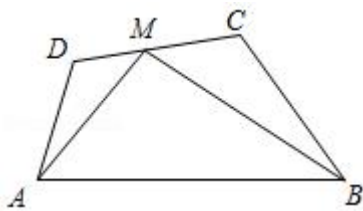
当圆和斜边相交，且只有一个交点在斜边上时，可以让圆的半径大于短直角边而小于长直角边，则 $6 < r \leq 8$.

故半径 r 的取值范围是 $r = 4.8$ 或 $6 < r \leq 8$.

故答案为： $r = 4.8$ 或 $6 < r \leq 8$.

【点评】此题考查了直线与圆的位置关系，此题注意考虑两种情况，只需保证圆和斜边只有一个公共点即可.

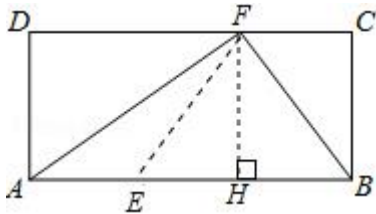
18. (4分) 如果从一个四边形一边上的点到对边的视角是直角，那么称该点为直角点. 例如，如图的四边形 $ABCD$ 中，点 M 在 CD 边上，连结 AM 、 BM ， $\angle AMB = 90^\circ$ ，则点 M 为直角点. 若点 E 、 F 分别为矩形 $ABCD$ 边 AB 、 CD 上的直角点，且 $AB = 5$ ， $BC = \sqrt{6}$ ，则线段 EF 的长为 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt{6}$.



【分析】作 $FH \perp AB$ 于点 H ，利用已知得出 $\triangle ADF \sim \triangle FCB$ ，进而得出 $\frac{AD}{FC} = \frac{DF}{BC}$ ，求得

构造的直角三角形的两条直角边即可得出答案.

【解答】解：作 $FH \perp AB$ 于点 H ，连接 EF .



$$\because \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD + \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle AMD + \angle DAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BFC$$

又 $\because \angle D = \angle C$,

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle FCB$,

$$\therefore \frac{AD}{FC} = \frac{DF}{BC}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{6}}{FC} = \frac{5-CF}{\sqrt{6}},$$

$\therefore FC = 2$ 或 3 .

$\because$ 点 F, E 分别为矩形 $ABCD$ 边 CD, AB 上的直角点,

$\therefore AE = FC$,

$\therefore$ 当 $FC = 2$ 时, $AE = 2, EH = 1$,

$$\therefore EF^2 = FH^2 + EH^2 = (\sqrt{6})^2 + 1^2 = 7,$$

$$\therefore EF = \sqrt{7}.$$

当 $FC = 3$ 时, 此时点 E 与点 H 重合, 即 $EF = BC = \sqrt{6}$.

综上, $EF = \sqrt{7}$ 或 $\sqrt{6}$.

故答案为: $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt{6}$.

【点评】 此题考查了相似三角形的判定定理及性质和勾股定理, 得出 $\triangle ADF \sim \triangle FCB$ 是解题关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{2 \cos 30^\circ} + \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值把相关数据代入进而得出答案.

【解答】 解: 原式 $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

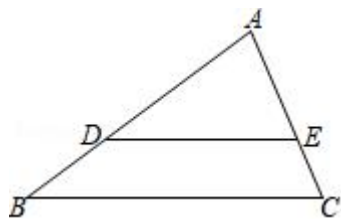
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{5}{3}.$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值, 正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{2}{3}BC$.

(1) 如果 $AC = 6$, 求 AE 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 求向量 $\overrightarrow{DE}$ (用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示).



【分析】(1) 由平行线截线段成比例求得 AE 的长度；

(2) 利用平面向量的三角形法则解答.

【解答】解：(1) 如图， $\because DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{2}{3}BC$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}.$$

又 $AC = 6$ ，

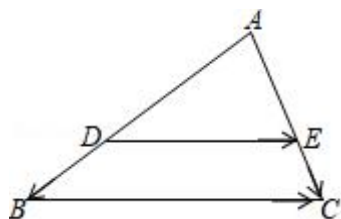
$$\therefore AE = 4.$$

$$(2) \because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\text{又 } DE \parallel BC, DE = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}).$$

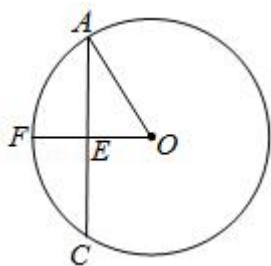


【点评】考查了平面向量，需要掌握平面向量的三角形法则和平行向量的定义.

21. (10分) 已知：如图， AO 是 $\odot O$ 的半径， AC 为 $\odot O$ 的弦，点 F 为 $\widehat{AC}$ 的中点， OF 交 AC 于点 E ， $AC = 8$ ， $EF = 2$.

(1) 求 AO 的长；

(2) 过点 C 作 $CD \perp AO$ ，交 AO 延长线于点 D ，求 $\sin \angle ACD$ 的值.



【分析】(1) 由垂径定理得出 $AE = 4$ ，设圆的半径为 r ，知 $OE = OF - EF = r - 2$ ，根据 $OA^2 = AE^2 + OE^2$ 求解可得；

(2) 由 $\angle OAE = \angle CAD$ ， $\angle AEO = \angle ADC = 90^\circ$ 知 $\angle AOE = \angle ACD$ ，从而根据 $\sin \angle ACD = \sin \angle AOE = \frac{AE}{AO}$ 可得答案．

【解答】解：(1) $\because O$ 是圆心，且点 F 为 $\widehat{AC}$ 的中点，

$$\therefore OF \perp AC,$$

$$\because AC = 8,$$

$$\therefore AE = 4,$$

设圆的半径为 r ，即 $OA = OF = r$ ，

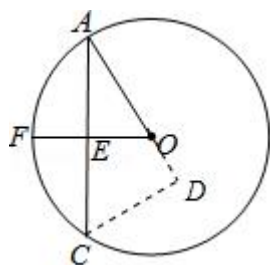
$$\text{则 } OE = OF - EF = r - 2,$$

$$\text{由 } OA^2 = AE^2 + OE^2 \text{ 得 } r^2 = 4^2 + (r - 2)^2,$$

解得： $r = 5$ ，即 $AO = 5$ ；

$$(2) \because \angle OAE = \angle CAD, \angle AEO = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle ACD,$$



$$\text{则 } \sin \angle ACD = \sin \angle AOE = \frac{AE}{AO} = \frac{4}{5}.$$

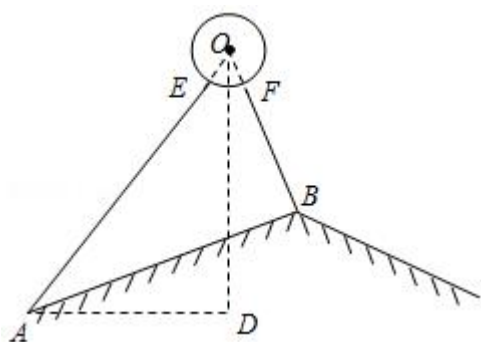
【点评】 本题主要考查圆周角定理，解题的关键是掌握圆周角定理、垂径定理及其推论和勾股定理等知识点．

22. (10 分) 安装在屋顶的太阳能热水器的横截面示意图如图所示．已知集热管 AE 与支架

BF 所在直线相交于水箱横截面 $\odot O$ 的圆心 O ， $\odot O$ 的半径为 0.2 米， AO 与屋面 AB 的夹角为 32° ，与铅垂线 OD 的夹角为 40° ， $BF \perp AB$ ，垂足为 B ， $OD \perp AD$ ，垂足为 D ， $AB = 2$ 米。

(1) 求支架 BF 的长；

(2) 求屋面 AB 的坡度。(参考数据： $\tan 18^\circ \approx \frac{1}{3}$ ， $\tan 32^\circ \approx \frac{31}{50}$ ， $\tan 40^\circ \approx \frac{21}{25}$)



【分析】(1) 然后在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，根据 $\tan \angle OAB = \frac{OB}{AB} = \tan 32^\circ$ ，求出 OB 的长度，继而可求得 BF ；

(2) 根据 $\angle AOD = 40^\circ$ ， $OD \perp AD$ ，可得 $\angle OAD = 50^\circ$ ，继而可求得 $\angle CAD$ 的度数，以及 AB 的坡度。

【解答】解： $\because$ (1) $\because \angle OAC = 32^\circ$ ， $OB \perp AD$ ，

$$\therefore \tan \angle OAB = \frac{OB}{AB} = \tan 32^\circ,$$

$$\because AB = 2m,$$

$$\therefore \frac{OB}{2} \approx \frac{31}{50},$$

$$\therefore OB = 1.24m,$$

$$\because \odot O \text{ 的半径为 } 0.2m,$$

$$\therefore BF = 1.04m;$$

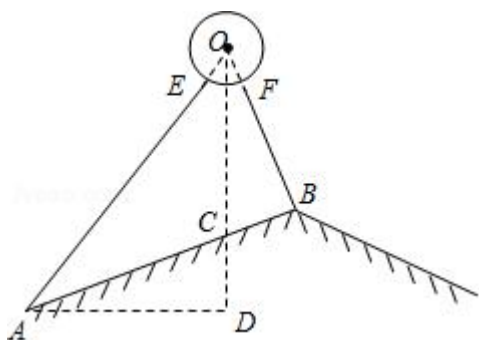
$$(2) \because \angle AOD = 40^\circ, OD \perp AD,$$

$$\therefore \angle OAD = 50^\circ,$$

$$\because \angle OAC = 32^\circ$$

$$\therefore \angle CAD = 18^\circ,$$

$$\therefore AB \text{ 的坡度为 } \tan 18^\circ = \frac{1}{3},$$

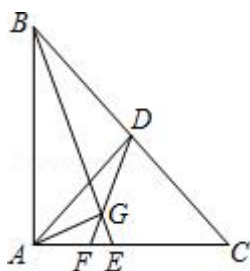


【点评】 本题主要考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是求出角的度数，利用三角函数的知识即可求解，难度一般．

23. (12分) 如图， $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 上一点， E 是 AC 上一点，点 G 在 BE 上，连接 DG 并延长交 AE 于点 F ， $\angle BGD = \angle BAD = \angle C$ ．

(1) 求证： $BD \cdot BC = BG \cdot BE$ ；

(2) 如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ，求证： $AG \perp BE$ ．



【分析】(1) 由 $\triangle BDG \sim \triangle BEC$ ，可得 $\frac{BG}{BC} = \frac{BD}{BE}$ ，即可推出结论；

(2) 由 $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ ，推出 $\angle BDA = \angle BAC = 90^\circ$ ，由 $\angle BAD = \angle BGD$ ，推出 A, B, D, G 四点共圆，推出 $\angle AGB = \angle ADB = 90^\circ$ ；

【解答】(1) 证明： $\because \angle DBG = \angle CBE$ ，

$$\angle BGD = \angle C,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{BG}{BC} = \frac{BD}{BE},$$

$$\therefore BD \cdot BC = BG \cdot BE;$$

(2) $\because \angle ABD = \angle CBA$ ， $\angle BAD = \angle C$ ，

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAD = \angle BGD,$$

$\therefore A, B, D, G$ 四点共圆,

$$\therefore \angle AGB = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore AG \perp BE.$$

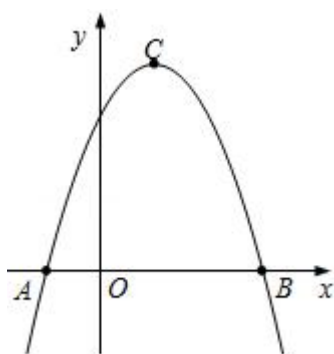
【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质，四点共圆等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx + 6$ (a, b 都是常数，且 $a < 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ ，顶点为点 C .

(1) 求这个二次函数的解析式及点 C 的坐标;

(2) 过点 B 的直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 交抛物线的对称轴于点 D ，联结 BC ，求 $\angle CBD$ 的余切值;

(3) 点 P 为抛物线上一个动点，当 $\angle PBA = \angle CBD$ 时，求点 P 的坐标.



【分析】 (1) 由点 A, B 的坐标，利用待定系数法即可求出二次函数的解析式，再利用配方法即可求出顶点 C 的坐标;

(2) 利用一次函数图象上点的坐标特征可求出点 D 的坐标，过点 D 作 $DE \perp BC$ ，垂足为点 E ，设抛物线对称轴与 x 轴的交点为点 F ，由点 B, C, D, F 的坐标可得出 CD, DF, BF 的长，利用勾股定理可得出 BC 的长，利用角的正切值不变可求出 DE 的长，进而可求出 BE 的长，再利用余切的定义即可求出 $\angle CBD$ 的余切值;

(3) 设直线 PB 与 y 轴交于点 M ，由 $\angle PBA = \angle CBD$ 及 $\angle CBD$ 的余切值可求出 OM 的长，进而可得出点 M 的坐标，由点 B, M 的坐标，利用待定系数法即可求出直线 BP 的解析式，联立直线 BP 及二次函数解析式成方程组，通过解方程组可求出点 P 的坐标.

【解答】 解：(1) 将 $A(-2, 0)$ ， $B(6, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 6$ ，得：

$$\begin{cases} 4a - 2b + 6 = 0 \\ 36a + 6b + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

∴二次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8,$$

∴点 C 的坐标为 $(2, 8)$.

$$(2) \text{ 当 } x=2 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}x + 3 = 2,$$

∴点 D 的坐标为 $(2, 2)$.

过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为点 E , 设抛物线对称轴与 x 轴的交点为点 F , 如图 1 所示.

∵抛物线的顶点坐标为 $(2, 8)$,

∴点 F 的坐标为 $(2, 0)$.

∵点 B 的坐标为 $(6, 0)$,

$$\therefore CF = 8, CD = 6, DF = 2, BF = 4, BC = \sqrt{CF^2 + BF^2} = 4\sqrt{5}, BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \sin \angle BCF = \frac{BF}{BC} = \frac{DE}{CD}, \text{ 即 } \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{DE}{6},$$

$$\therefore DE = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cot \angle CBD = \frac{BE}{DE} = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} = \frac{4}{3}.$$

(3) 设直线 PB 与 y 轴交于点 M , 如图 2 所示.

$$\because \angle PBA = \angle CBD,$$

$$\therefore \cot \angle PBA = \frac{OB}{OM} = \frac{4}{3}, \text{ 即 } \frac{6}{OM} = \frac{4}{3},$$

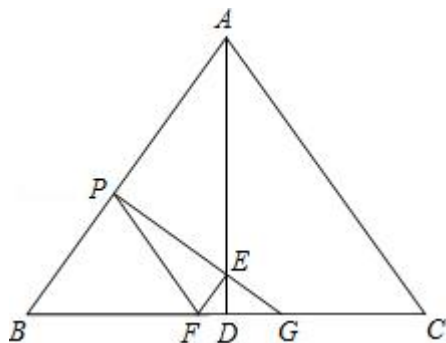
$$\therefore OM = \frac{9}{2},$$

∴点 M 的坐标为 $(0, \frac{9}{2})$ 或 $(0, -\frac{9}{2})$.

设直线 BP 的解析式为 $y = mx + n$ ($m \neq 0$),

$$\text{将 } B(6, 0), M(0, \frac{9}{2}) \text{ 代入 } y = mx + n, \text{ 得: } \begin{cases} 6m + n = 0 \\ n = \frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -\frac{3}{4} \\ n = \frac{9}{2} \end{cases},$$



【分析】(1) 根据等腰三角形的性质可得 $BD = 3$ ，通过证明 $\triangle ABD \sim \triangle GBP$ ，可得 $BG = \frac{5}{3}BP = \frac{5}{3}x$ ，即可得 DG 的长度；

(2) 根据相似三角形的性质可得 $FD = BD - BF = 3 - \frac{6}{5}x$ ， $DE = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}$ ，根据三角形面积公式可求 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 分 $EF \perp PG$ ， $EF \perp PF$ 两种情况讨论，根据相似三角形的性质可求 BP 的长．

【解答】解：(1) $\because AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ， $AD \perp BC$ ，

$$\therefore BD = CD = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 4,$$

$$\because \angle B = \angle B, \angle ADB = \angle BPG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle GBP$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{BP}{BG} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore BG = \frac{5}{3}BP = \frac{5}{3}x,$$

$$\therefore DG = BG - BD = \frac{5}{3}x - 3$$

$$(2) \because PF \parallel AC$$

$$\therefore \triangle BFP \sim \triangle BCA$$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{BP}{AB}$$

$$\text{即 } \frac{x}{5} = \frac{BF}{6}$$

$$\therefore BF = \frac{6}{5}x,$$

$$\therefore FD = BD - BF = 3 - \frac{6}{5}x,$$

$$\because \angle DGE + \angle DEG = \angle DGE + \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DEG, \angle ADG = \angle ADB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle DBA$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DG}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{DE}{\frac{5}{3}x - 3}$$

$$\therefore DE = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = y = \frac{1}{2} \times DF \times DE = \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{6}{5}x\right) \times \left(\frac{5}{4}x - \frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{129}{40}x - \frac{27}{8}$$

$$\left(\frac{9}{5} < x < \frac{5}{2}\right)$$

(3) 若 $EF \perp PG$ 时,

$$\because EF \perp PG, ED \perp FG,$$

$$\therefore \angle FED + \angle DEG = 90^\circ, \angle FED + \angle EFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle DEG, \text{ 且 } \angle EDF = \angle EDG,$$

$$\therefore \triangle EFD \sim \triangle GDE$$

$$\therefore \frac{ED}{DG} = \frac{DF}{ED}$$

$$\therefore ED^2 = FD \times DG$$

$$\therefore \left(\frac{5}{4}x - \frac{9}{4}\right)^2 = \left(3 - \frac{6}{5}x\right)\left(\frac{5}{3}x - 3\right)$$

$$\therefore 5 \times 57x^2 - 1138x + 225 \times 5 = 0$$

$$\therefore x = \frac{9}{5} \text{ (不合题意舍去)}, x = \frac{125}{57}$$

若 $EF \perp PF$,

$$\therefore \angle PFB + \angle EFD = 90^\circ, \text{ 且 } \angle PFB = \angle ACB, \angle ACB + \angle DAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EFD = \angle DAC, \text{ 且 } \angle EDF = \angle ADC = 90^\circ,$$

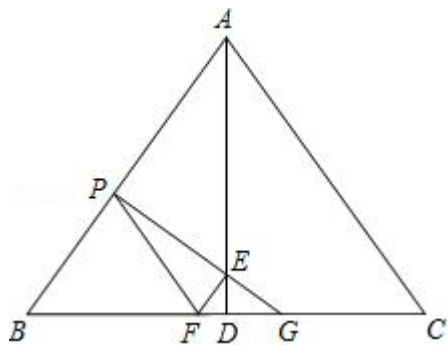
$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle CDA$$

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{CD}{AD}$$

$$\therefore \frac{\frac{5}{4}x - \frac{9}{4}}{3 - \frac{6}{5}x} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = \frac{90}{43}$$

综上所述：当 BP 为 $\frac{125}{57}$ 或 $\frac{90}{43}$ 时， $\triangle PEF$ 为直角三角形．



【点评】 本题是三角形综合题，考查了等腰三角形的性质，相似三角形判定和性质，以及分类讨论思想，熟练运用相似三角形的判定和性质是本题的关键．