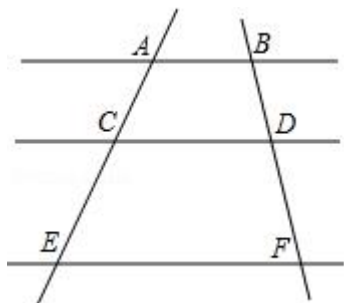


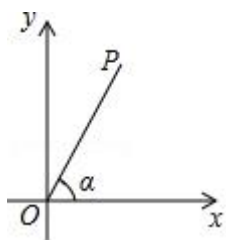
2019 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题,每题 4 分,满分 24 分）

1. (4 分) 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $BD:DF=1:2$, 那么下列结论正确的是 ()



- A. $AC:AE=1:3$ B. $CE:EA=1:3$ C. $CD:EF=1:2$ D. $AB:CD=1:2$
2. (4 分) 下列命题中, 正确的是 ()
- A. 两个直角三角形一定相似
- B. 两个矩形一定相似
- C. 两个等边三角形一定相似
- D. 两个菱形一定相似
3. (4 分) 已知二次函数 $y=ax^2-1$ 的图象经过点 $(1, -2)$, 那么 a 的值为 ()
- A. $a=-2$ B. $a=2$ C. $a=1$ D. $a=-1$
4. (4 分) 如图, 直角坐标平面内有一点 $P(2, 4)$, 那么 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的余切值为 ()

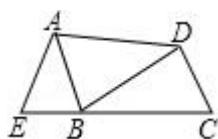


- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$
5. (4 分) 设 m, n 为实数, 那么下列结论中错误的是 ()
- A. $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ B. $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
- C. $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ D. 若 $m\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $\vec{a} = \vec{0}$
6. (4 分) 若 $\odot A$ 的半径为 5, 圆心 A 的坐标是 $(1, 2)$, 点 P 的坐标是 $(5, 2)$, 那么点 P 的位置为 ()

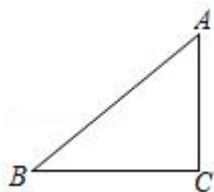
- A. 在 $\odot A$ 内 B. 在 $\odot A$ 上 C. 在 $\odot A$ 外 D. 不能确定

二、填空题（本大题共 12 题,每题 4 分,满分 48 分）

7. (4 分) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 的顶点坐标是_____.
8. (4 分) 将二次函数 $y = 2x^2$ 的图象向右平移 3 个单位, 所得图象的对称轴为_____.
9. (4 分) 请写出一个开口向下且过点 $(0, 2)$ 的抛物线解析式: _____.
10. (4 分) 若 $2|\vec{a}| = 3$, 那么 $3|\vec{a}| =$ _____.
11. (4 分) 甲、乙两地的实际距离为 500 千米, 甲、乙两地在地图上的距离为 $10cm$, 那么图上 $4.5cm$ 的两地之间的实际距离为_____千米.
12. (4 分) 如果两个相似三角形的周长的比等于 $1:4$, 那么它们的面积的比等于_____.
13. (4 分) $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2AC$, 那么 $\sin B =$ _____.
14. (4 分) 直角三角形的重心到直角顶点的距离为 $4cm$, 那么该直角三角形的斜边长为_____.
15. (4 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, 点 E 在 CB 延长线上, $\angle ABD = \angle CEA$, 若 $3AE = 2BD$, $BE = 1$, 那么 $DC =$ _____.



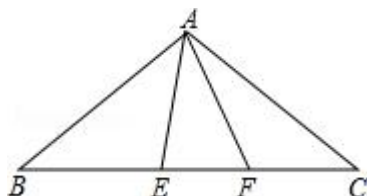
16. (4 分) $\odot O$ 的直径 $AB = 6$, C 在 AB 延长线上, $BC = 2$, 若 $\odot C$ 与 $\odot O$ 有公共点, 那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是_____.
17. (4 分) 我们将等腰三角形腰长与底边长的差的绝对值称为该三角形的“边长正度值”, 若等腰三角形腰长为 5, “边长正度值”为 3, 那么这个等腰三角形底角的余弦值等于_____.
18. (4 分) 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 5$, 点 P 为 AC 上一点, 将 $\triangle BCP$ 沿直线 BP 翻折, 点 C 落在 C' 处, 连接 AC' , 若 $AC' \parallel BC$, 那么 CP 的长为_____.



三、解答题（本大题共 7 题,满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $\sin 30^\circ \tan 30^\circ + \cos 60^\circ \cot 30^\circ$.

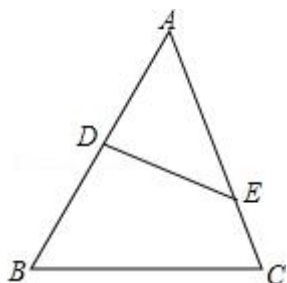
20. (10分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 E 、 F 在边 BC 上, $\angle EAF=\angle B$. 求证: $BF \cdot CE = AB^2$.



21. (10分) 如图, 已知: $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上, $AB=9$, $AC=6$, $AD=2$, $AE=3$.

(1) 求 $\frac{DE}{BC}$ 的值;

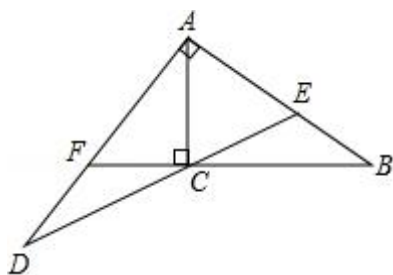
(2) 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, 求 $\overrightarrow{DE}$ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



22. (10分) 如图, 已知: $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 E 为 AB 上一点, $AC=AE=3$, $BC=4$, 过点 A 作 AB 的垂线交射线 EC 于点 D , 延长 BC 交 AD 于点 F .

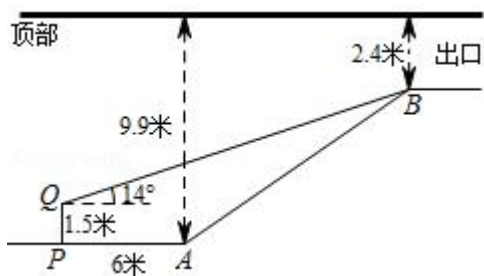
(1) 求 CF 的长;

(2) 求 $\angle D$ 的正切值.



23. (12分) 地铁10号线某站点出口横截面平面图如图所示, 电梯 AB 的两端分别距顶部9.9米和2.4米, 在距电梯起点 A 端6米的 P 处, 用1.5米的测角仪测得电梯终端 B 处的仰角为 14° , 求电梯 AB 的坡度与长度.

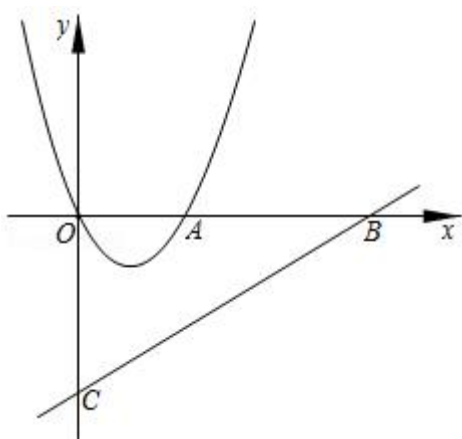
参考数据: $\sin 14^\circ \approx 0.24$, $\tan 14^\circ \approx 0.25$, $\cos 14^\circ \approx 0.97$.



24. (12分) 如图, 已知: 二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象交 x 轴正半轴于点 A , 顶点为 P , 一次函数 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 的图象交 x 轴于点 B , 交 y 轴于点 C , $\angle OCA$ 的正切值为 $\frac{2}{3}$.

(1) 求二次函数的解析式与顶点 P 坐标;

(2) 将二次函数图象向下平移 m 个单位, 设平移后抛物线顶点为 P' , 若 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BCP}$, 求 m 的值.

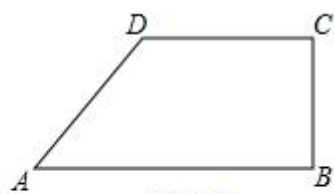
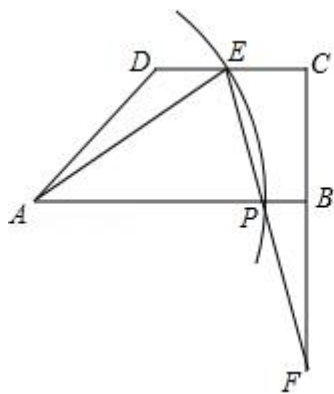


25. (14分) 如图, 已知: 梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle DAB = 45^\circ$, $AB \parallel DC$, $DC = 3$, $AB = 5$, 点 P 在 AB 边上, 以点 A 为圆心 AP 为半径作弧交边 DC 于点 E , 射线 EP 于射线 CB 交于点 F .

(1) 若 $AP = \sqrt{13}$, 求 DE 的长;

(2) 联结 CP , 若 $CP = EP$, 求 AP 的长;

(3) 线段 CF 上是否存在点 G , 使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle FGE$ 相似? 若相似, 求 FG 的值; 若不相似, 请说明理由.



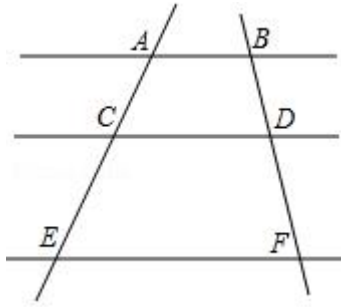
备用图

2019 年上海市宝山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题,每题 4 分,满分 24 分）

1.（4 分）如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $BD:DF=1:2$ ，那么下列结论正确的是（ ）



A. $AC:AE=1:3$ B. $CE:EA=1:3$ C. $CD:EF=1:2$ D. $AB:CD=1:2$

【分析】根据平行线分线段成比例定理得到 $AC:CE=BD:DF=1:2$ ，然后利用比例性质对各选项进行判断．

【解答】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ，

$\therefore AC:CE=BD:DF=1:2$ ，

即 $CE=2AC$ ，

$\therefore AC:CE=1:3$ ， $CE:EA=2:3$ ．

故选：A．

【点评】本题考查了平行线分线段成比例：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例．

2.（4 分）下列命题中，正确的是（ ）

A. 两个直角三角形一定相似

B. 两个矩形一定相似

C. 两个等边三角形一定相似

D. 两个菱形一定相似

【分析】根据相似三角形的判定方法对 A、C 进行判断；利用反例可对 B、D 进行判断．

【解答】解：两个直角三角形不一定相似，两个矩形不一定相似，两个菱形不一定相似，而两个等边三角形一定相似．

故选：C．

【点评】 本题考查了命题与定理：命题的“真”“假”是就命题的内容而言．任何一个命题非真即假．要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可．

3. (4分) 已知二次函数 $y = ax^2 - 1$ 的图象经过点 $(1, -2)$ ，那么 a 的值为 ()

- A. $a = -2$ B. $a = 2$ C. $a = 1$ D. $a = -1$

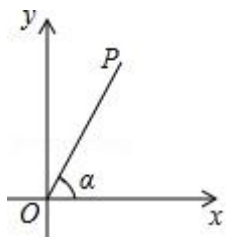
【分析】 把已知点的坐标代入抛物线解析式可得到 a 的值．

【解答】 解：把 $(1, -2)$ 代入 $y = ax^2 - 1$ 得 $a - 1 = -2$ ，解得 $a = -1$ ．

故选：D．

【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式：二次函数图象上点的坐标满足其解析式．也考查了二次函数的性质．

4. (4分) 如图，直角坐标平面内有一点 $P(2, 4)$ ，那么 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的余切值为 ()



- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

【分析】 过点 P 作 $PA \perp x$ 轴于点 A ．由 P 点的坐标得 PA 、 OA 的长，根据余切函数的定义得结论．

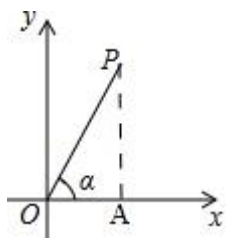
【解答】 解：过点 P 作 $PA \perp x$ 轴于点 A ．

由于点 $P(2, 4)$ ，

$$\therefore PA = 4, OA = 2$$

$$\therefore \cot \alpha = \frac{OA}{PA} = \frac{1}{2}.$$

故选：B．



【点评】 本题考查了点在平面直角坐标系里的意义及解直角三角形．解决本题的关键是

构造直角三角形.

5. (4分) 设 m, n 为实数, 那么下列结论中错误的是 ()

A. $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

B. $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

C. $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

D. 若 $m\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $\vec{a} = \vec{0}$

【分析】 根据平面向量的性质, 即可判断 A, B, C 正确, 根据向量的计算法则即可得 D 错误.

【解答】 解: A 、如果 m, n 为实数, 那么 $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$, 故本选项结论正确;

B 、如果 m, n 为实数, 那么 $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, 故本选项结论正确;

C 、如果 m, n 为实数, 那么 $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$, 故本选项结论正确;

D 、如果 m 为实数, 那么若 $m\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $m = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$, 故本选项结论错误.

故选: D .

【点评】 此题考查了平面向量的性质. 题目比较简单, 注意向量是有方向性的, 掌握平面向量的性质是解此题的关键.

6. (4分) 若 $\odot A$ 的半径为 5, 圆心 A 的坐标是 $(1, 2)$, 点 P 的坐标是 $(5, 2)$, 那么点 P 的位置为 ()

A. 在 $\odot A$ 内

B. 在 $\odot A$ 上

C. 在 $\odot A$ 外

D. 不能确定

【分析】 先根据两点间的距离公式计算出 PA 的长, 然后比较 PA 与半径的大小, 再根据点与圆的关系的判定方法进行判断.

【解答】 解: $\because$ 圆心 A 的坐标是 $(1, 2)$, 点 P 的坐标是 $(5, 2)$,

$$\therefore AP = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2} = 4 < 5,$$

$\therefore$ 点 P 在 $\odot A$ 内,

故选: A .

【点评】 本题考查了对点与圆的位置关系的判断. 关键要记住若半径为 r , 点到圆心的距离为 d , 则有: 当 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d = r$ 时, 点在圆上, 当 $d < r$ 时, 点在圆内. 也考查了坐标与图形性质.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 的顶点坐标是 $(0, -1)$.

【分析】形如 $y = ax^2 + k$ 的顶点坐标为 $(0, k)$ ，据此可以直接求顶点坐标.

【解答】解：抛物线 $y = x^2 - 1$ 的顶点坐标为 $(0, -1)$.

故答案是： $(0, -1)$.

【点评】本题考查了二次函数的性质. 二次函数的顶点式方程 $y = a(x - k)^2 + h$ 的顶点坐标是 (k, h) ，对称轴方程是 $x = k$.

8. (4分) 将二次函数 $y = 2x^2$ 的图象向右平移 3 个单位，所得图象的对称轴为 直线 $x = 3$.

【分析】直接利用二次函数平移规律得出平移后解析式进而得出答案.

【解答】解：将二次函数 $y = 2x^2$ 的图象向右平移 3 个单位，所得解析式为： $y = 2(x - 3)^2$,

故其图象的对称轴为：直线 $x = 3$.

故答案为：直线 $x = 3$.

【点评】此题主要考查了二次函数图象与几何变换，正确记忆平移规律是解题关键.

9. (4分) 请写出一个开口向下且过点 $(0, 2)$ 的抛物线解析式： $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一).

【分析】根据二次函数的性质，二次项系数小于 0 时，函数图象的开口向下，再利用过点 $(0, 2)$ 得出即可.

【解答】解： $\because$ 开口向下且过点 $(0, 2)$ 的抛物线解析式，

$\therefore$ 可以设顶点坐标为 $(0, 2)$ ，故解析式为： $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一).

故答案为： $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一).

【点评】本题考查了二次函数图象的性质，是开放型题目，答案不唯一.

10. (4分) 若 $2|\vec{a}| = 3$ ，那么 $3|\vec{a}| = \frac{9}{2}$.

【分析】实数的乘除运算法则同样适用于向量的运算.

【解答】解：由 $2|\vec{a}| = 3$ 得到： $|\vec{a}| = \frac{3}{2}$,

故 $3|\vec{a}| = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

故答案是： $\frac{9}{2}$.

【点评】考查了平面向量的知识，解题时，可以与实数的运算法则联系起来考虑，属于基础题.

11. (4分) 甲、乙两地的实际距离为 500 千米, 甲、乙两地在地图上的距离为 10cm, 那么图上 4.5cm 的两地之间的实际距离为 225 千米.

【分析】依据甲、乙两地的实际距离为 500 千米, 甲、乙两地在地图上的距离为 10cm, 即可得到比例尺, 即可得出图上 4.5cm 的两地之间的实际距离.

【解答】解: $\because$ 甲、乙两地的实际距离为 500 千米, 甲、乙两地在地图上的距离为 10cm,

$$\therefore \text{比例尺} = \frac{10}{50000000} = \frac{1}{5000000},$$

设图上 4.5cm 的两地之间的实际距离为 x cm, 则

$$\frac{4.5}{x} = \frac{1}{5000000},$$

解得 $x = 22500000$,

$$\therefore 22500000\text{cm} = 225\text{km},$$

$\therefore$ 图上 4.5cm 的两地之间的实际距离为 225 千米.

故答案为: 225.

【点评】本题主要考查了比例线段, 解题时注意: 比例尺等于图上距离与实际距离的比值.

12. (4分) 如果两个相似三角形的周长的比等于 1: 4, 那么它们的面积的比等于 1: 16.

【分析】由两个相似三角形的周长的比等于 1: 4, 即可求得它们的相似比, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 即可求得它们的面积的比.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的周长的比等于 1: 4,

$\therefore$ 它们的相似比为 1: 4,

$\therefore$ 它们的面积的比等于 1: 16.

故答案为: 1: 16.

【点评】此题考查了相似三角形的性质. 注意相似三角形的面积比等于相似比的平方, 相似三角形的对应高线、角平分线、中线的比等于相似比.

13. (4分) $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2AC$, 那么 $\sin B = \frac{1}{2}$.

【分析】根据锐角的正弦等于对边比斜边, 可得答案.

【解答】解: 由题意, 得

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义, 利用锐角的正弦等于对边比斜边是解题关键.

14. (4分) 直角三角形的重心到直角顶点的距离为 4cm , 那么该直角三角形的斜边长为 12cm .

【分析】根据三角形的重心的性质求出 CD , 根据直角三角形的性质计算即可.

【解答】解: 由题意得, $CG = 4$,

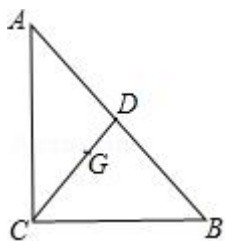
$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore CD = \frac{3}{2}CG = 6$, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

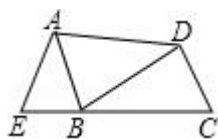
$\therefore AB = 2CD = 12(\text{cm})$,

故答案为: 12cm .



【点评】本题考查的是三角形的重心的概念和性质, 直角三角形的性质, 掌握三角形的重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键.

15. (4分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, 点 E 在 CB 延长线上, $\angle ABD = \angle CEA$, 若 $3AE = 2BD$, $BE = 1$, 那么 $DC = \frac{3}{2}$.



【分析】根据平行线的性质得到 $\angle ABD = \angle BDC$, 推出 $\triangle AEB \sim \triangle BDC$, 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】解: $\because AB \parallel DC$,

$\therefore \angle ABD = \angle BDC$,

$\because \angle ABD = \angle CEA$,

$\therefore \angle AEB = \angle BDC$,

$\therefore \angle EAB = 180^\circ - \angle AEB - \angle ABE$, $\angle CBD = 180^\circ - \angle ABD - \angle ABE$,

$$\therefore \angle EAB = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{BE}{CD},$$

$$\because 3AE = 2BD, BE = 1,$$

$$\therefore CD = \frac{3}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2}.$$

【点评】 本题考查了平行线的性质，相似三角形的判定和性质，证得 $\triangle AEB \sim \triangle BDC$ 是解题的关键.

16. (4分) $\odot O$ 的直径 $AB = 6$, C 在 AB 延长线上, $BC = 2$, 若 $\odot C$ 与 $\odot O$ 有公共点, 那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是 $2 \leq r \leq 8$.

【分析】 利用 $\odot C$ 与 $\odot O$ 相切或相交确定 r 的范围.

【解答】 解: $\because \odot O$ 的直径 $AB = 6$, C 在 AB 延长线上, $BC = 2$,

$$\therefore CA = 8,$$

$\because \odot C$ 与 $\odot O$ 有公共点, 即 $\odot C$ 与 $\odot O$ 相切或相交,

$$\therefore r = 2 \text{ 或 } r = 8 \text{ 或 } 2 < r < 8, \text{ 即 } 2 \leq r \leq 8.$$

故答案为 $2 \leq r \leq 8$.

【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系: 两圆的圆心距为 d 、两圆的半径分别为 r 、 R :

①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$; ②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$; ③两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$); ④

两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r$ ($R > r$); ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$ ($R > r$).

17. (4分) 我们将等腰三角形腰长与底边长的差的绝对值称为该三角形的“边长正度值”, 若等腰三角形腰长为 5, “边长正度值”为 3, 那么这个等腰三角形底角的余弦值等于 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$.

【分析】 根据题意, 可以求得底边的长, 然后利用分类讨论的方法和锐角三角函数可以求得相应的角的三角函数值.

【解答】 解: 设等腰三角形的底边长为 a ,

$$|5 - a| = 3,$$

解得, $a = 2$ 或 $a = 8$,

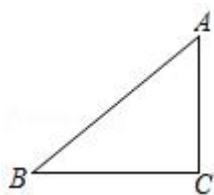
当 $a = 2$ 时, 这个等腰三角形底角的余弦值是: $\frac{1}{5}$,

当 $a = 8$ 时, 这个等腰三角形底角的余弦值是: $\frac{4}{5}$,

故答案为: $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$

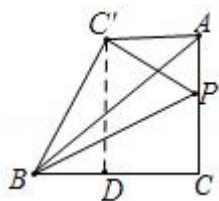
【点评】 本题考查解直角三角形、等腰三角形的性质、锐角三角函数, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的角的三角函数值.

18. (4 分) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 5$, 点 P 为 AC 上一点, 将 $\triangle BCP$ 沿直线 BP 翻折, 点 C 落在 C' 处, 连接 AC' , 若 $AC' \parallel BC$, 那么 CP 的长为 $\frac{5}{2}$.



【分析】 过点 C' 作 $C'D \perp BC$ 于点 D , 通过题意可证四边形 $C'DCA$ 是矩形, 可得 $CD = AC'$, $CD = AC = 4$, 根据勾股定理可求 $BD = 3$, 即 $CD = AC' = 2$, 根据勾股定理可求 CP 的长.

【解答】 解: 过点 C' 作 $C'D \perp BC$ 于点 D ,



$\because AC' \parallel BC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle C'AC = \angle ACB = 90^\circ$, 且 $C'D \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $C'DCA$ 是矩形,

$\therefore CD = AC'$, $CD = AC = 4$,

$\because$ 折叠

$\therefore BC' = BC = 5$, $CP = C'P$,

在 $\text{Rt}\triangle BDC'$ 中, $BD = \sqrt{C'B^2 - C'D^2} = 3$

$\therefore CD = BC - BD = 2$

$\therefore AC' = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle ACP$ 中, $CP^2 = CA^2 + AP^2$,

$\therefore CP^2 = 4 + (4 - CP)^2$,

$$\therefore CP = \frac{5}{2}$$

故答案为: $\frac{5}{2}$

【点评】本题是翻折变换，考查了矩形的判定和性质，折叠的性质，勾股定理，添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

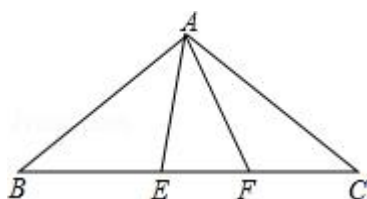
19. (10 分) 计算: $\sin 30^\circ \tan 30^\circ + \cos 60^\circ \cot 30^\circ$.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值把相关数据代入进而得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10 分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 E 、 F 在边 BC 上, $\angle EAF = \angle B$. 求证: $BF \cdot CE = AB^2$.



【分析】利用两角对应成比例可得 $\triangle ABF \sim \triangle ECA$, 对应边成比例可得相应的比例式, 整理可得所求的乘积式.

【解答】证明: $\because \angle AEC = \angle B + \angle BAE = \angle EAF + \angle BAE = \angle BAF$,

又 $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ECA,$$

$$\therefore AB : CE = BF : AC,$$

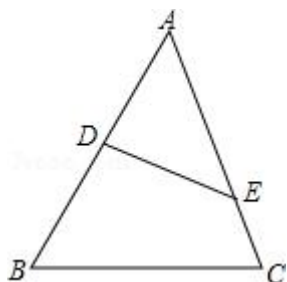
$$\therefore BF \cdot EC = AB \cdot AC = AB^2.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质. 注意证得 $\triangle ABF \sim \triangle ECA$ 是解此题的关键.

21. (10 分) 如图, 已知: $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上, $AB = 9$, $AC = 6$, $AD = 2$, $AE = 3$.

(1) 求 $\frac{DE}{BC}$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 求 $\overrightarrow{DE}$ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



【分析】(1) 根据已知 $\angle AED = \angle ABC$, $\angle A = \angle A$, 进而得出 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 由该相似三角形的性质解答;

(2) 由三角形法则解答即可.

【解答】解: (1) $\because \angle AED = \angle ABC$, $\angle A = \angle A$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

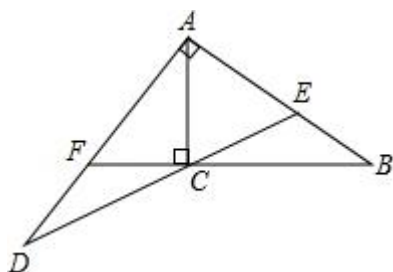
【点评】考查了平面向量和相似三角形的判定与性质. 注意: 平面向量是有方向的.

22. (10分) 如图, 已知: $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 E 为 AB 上一点, $AC = AE = 3$,

$BC = 4$, 过点 A 作 AB 的垂线交射线 EC 于点 D , 延长 BC 交 AD 于点 F .

(1) 求 CF 的长;

(2) 求 $\angle D$ 的正切值.



【分析】(1) 证 $\triangle ABC \sim \triangle FAC$, 得 $\frac{AC}{CF} = \frac{BC}{AC}$, 将相关线段的长代入计算可得;

(2) 作 $CH \perp AB$, 先计算 $AB = 5$, 据此可得 $CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5}$, $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{9}{5}$,

$EH = AE - AH = \frac{6}{5}$, 依据 $\tan D = \tan \angle ECH = \frac{EH}{CH}$ 可得答案.

【解答】解：（1） $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACF = \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle B + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because AD \perp AB,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAF = 90^\circ,$$

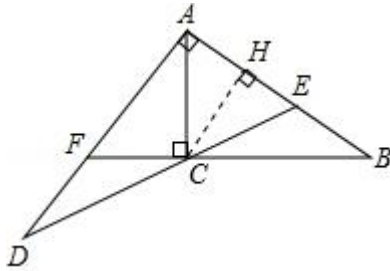
$$\therefore \angle B = \angle CAF,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{CF} = \frac{BC}{AC}, \quad \text{即} \quad \frac{3}{CF} = \frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } CF = \frac{9}{4};$$

（2）如图，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，



$$\because AC = 3, \quad BC = 4,$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\text{则 } CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5},$$

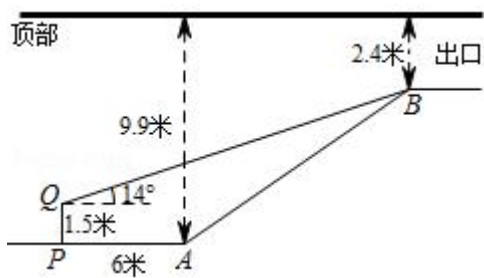
$$\therefore AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{9}{5}, \quad EH = AE - AH = \frac{6}{5},$$

$$\therefore \tan D = \tan \angle ECH = \frac{EH}{CH} = \frac{1}{2}.$$

【点评】本题主要考查解直角三角形与相似三角形的判定和性质，解题的关键是添加辅助线构造与 $\angle D$ 相等的角，并熟练掌握相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识点．

- 23.（12分）地铁10号线某站点出口横截面平面图如图所示，电梯 AB 的两端分别距顶部9.9米和2.4米，在距电梯起点 A 端6米的 P 处，用1.5米的测角仪测得电梯终端 B 处的仰角为 14° ，求电梯 AB 的坡度与长度．

参考数据： $\sin 14^\circ \approx 0.24$ ， $\tan 14^\circ \approx 0.25$ ， $\cos 14^\circ \approx 0.97$ ．



【分析】根据题意作出合适的辅助线，然后根据锐角三角函数即可求得电梯 AB 的坡度，然后根据勾股定理即可求得 AB 的长度．

【解答】解：作 $BC \perp PA$ 交 PA 的延长线于点 C ，作 $QD \parallel PC$ 交 BC 于点 D ，

由题意可得， $BC = 9.9 - 2.4 = 7.5$ 米， $QP = DC = 1.5$ 米， $\angle BQD = 14^\circ$ ，

则 $BD = BC - DC = 7.5 - 1.5 = 6$ 米，

$$\because \tan \angle BQD = \frac{BD}{QD},$$

$$\therefore \tan 14^\circ = \frac{6}{6+ED},$$

$$\text{即 } 0.25 = \frac{6}{6+ED},$$

解得， $ED = 18$ ，

$$\therefore AC = ED = 18,$$

$$\because BC = 7.5,$$

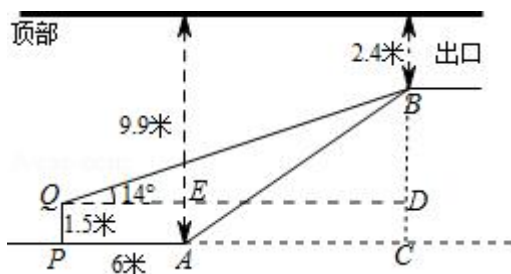
$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{7.5}{18} = \frac{5}{12},$$

即电梯 AB 的坡度是 5：12，

$$\because BC = 7.5, AC = 18, \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{7.5^2 + 18^2} = 19.5,$$

即电梯 AB 的坡度是 5：12，长度是 19.5 米．



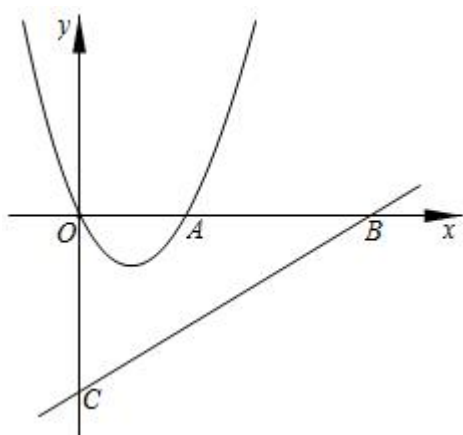
【点评】本题考查解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题、坡度坡角问题，解答本题的关键是明确题意，利用锐角三角函数和数形结合的思想解答．

24. (12 分) 如图，已知：二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象交 x 轴正半轴于点 A ，顶点为 P ，一次

函数 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 的图象交 x 轴于点 B ，交 y 轴于点 C ， $\angle OCA$ 的正切值为 $\frac{2}{3}$ 。

(1) 求二次函数的解析式与顶点 P 坐标；

(2) 将二次函数图象向下平移 m 个单位，设平移后抛物线顶点为 P' ，若 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BCP}$ ，求 m 的值。



【分析】(1) 先由直线解析式求出点 B ， C 坐标，利用 $\angle OCA$ 正切值求得点 A 坐标，再利用待定系数法求解可得；

(2) 由平移知点 P' 坐标为 $(1, -1-m)$ ，设抛物线对称轴与 x 轴交于点 H ，与 BC 交于点 M ，知 $M(1, -\frac{5}{2})$ ，先得出 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PH = 2(m+1)$ ， $S_{\triangle BCP} = S_{\triangle P'MC} + S_{\triangle P'MB} = \frac{1}{2}P'M \cdot OB = 3|\frac{3}{2} - m|$ ，根据 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BCP}$ 列出方程求解可得。

【解答】解：(1) $\because y = \frac{1}{2}x - 3$ ，

$\therefore x = 0$ 时， $y = -3$ ，

当 $y = 0$ 时， $\frac{1}{2}x - 3 = 0$ ，解得 $x = 6$ ，

$\therefore$ 点 $B(6, 0)$ ， $C(0, -3)$ ，

$\because \tan \angle OCA = \frac{OA}{OC} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore OA = 2$ ，即 $A(2, 0)$ ，

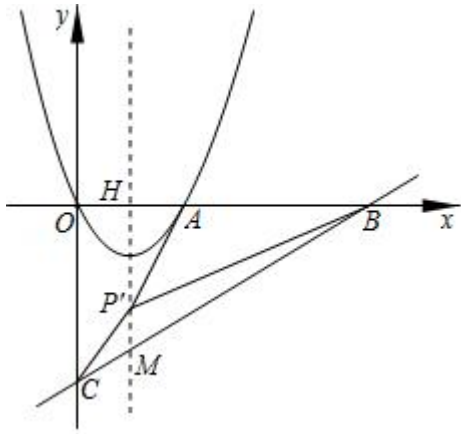
将 $A(2, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx$ ，得 $4 + 2b = 0$ ，

解得 $b = -2$ ，

$\therefore y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ ，

则抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x$ ，顶点 P 的坐标为 $(1, -1)$ ；

(2) 如图,



由平移知点 P' 坐标为 $(1, -1-m)$,

设抛物线对称轴与 x 轴交于点 H , 与 BC 交于点 M , 则 $M(1, -\frac{5}{2})$,

$$S_{\triangle ABP'} = \frac{1}{2}AB \cdot P'H = \frac{1}{2} \times 4(m+1) = 2(m+1),$$

$$S_{\triangle BCP'} = S_{\triangle P'MC} + S_{\triangle P'MB} = \frac{1}{2}P'M \cdot OB = \frac{1}{2}|-1-m+\frac{5}{2}| \times 6 = 3|\frac{3}{2}-m|,$$

$$\therefore 2(m+1) = 3|\frac{3}{2}-m|,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2} \text{ 或 } m = \frac{13}{2}.$$

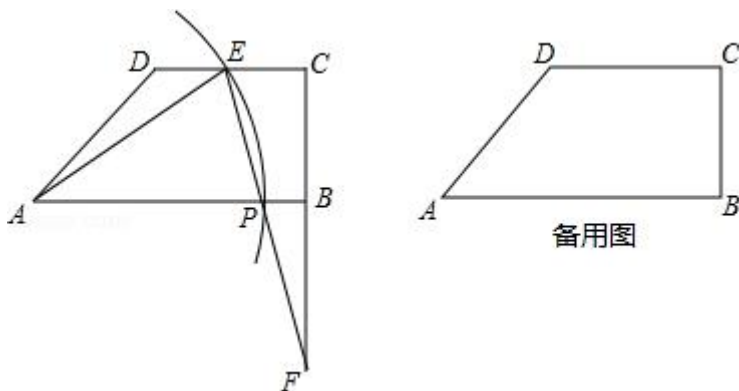
【点评】 本题主要考查抛物线与 x 轴的交点, 解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式, 二次函数的图象与性质及三角函数的应用等知识点.

25. (14 分) 如图, 已知: 梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle DAB = 45^\circ$, $AB \parallel DC$, $DC = 3$, $AB = 5$, 点 P 在 AB 边上, 以点 A 为圆心 AP 为半径作弧交边 DC 于点 E , 射线 EP 于射线 CB 交于点 F .

(1) 若 $AP = \sqrt{13}$, 求 DE 的长;

(2) 联结 CP , 若 $CP = EP$, 求 AP 的长;

(3) 线段 CF 上是否存在点 G , 使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle FGE$ 相似? 若相似, 求 FG 的值; 若不相似, 请说明理由.

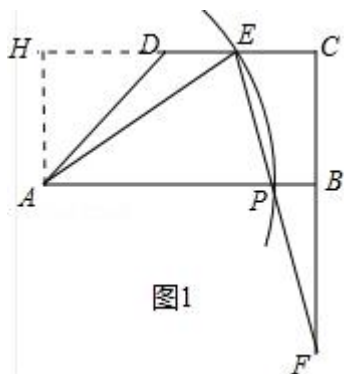


【分析】(1) 如图，过点 A ，作 $AH \parallel BC$ ，交 CD 的延长线于点 H ，在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 中求出 AE ，即可求解；

(2) 设： $AP = x$ ，利用 $\triangle APE \sim \triangle PEC$ ，得出 $PC^2 = CE \cdot AP$ ，利用勾股定理得出 $PC^2 = PB^2 + BC^2$ ，即可求解；

(3) 利用 $\triangle ADE \sim \triangle FGE$ ，得到 $3\alpha = 45^\circ$ ，进而求出相应线段的长度，再利相似比 $\frac{AD}{FG} = \frac{DE}{GE}$ ，即可求解．

【解答】解：(1) 如图 1 中，过点 A ，作 $AH \parallel BC$ ，交 CD 的延长线于点 H ．



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABC + \angle C = 180^\circ$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle ABC = \angle H = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AHCB$ 是矩形,

$\therefore AB = CH = 5$, $\because CD = 3$,

$\therefore DH = CH - CD = 2$,

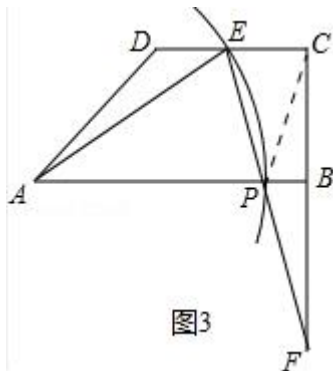
$\because \angle HAB = 90^\circ$, $\angle DAB = 45^\circ$,

$\therefore \angle HAD = \angle HDA = 45^\circ$

$$\therefore HD = AH = 2, AE = AP = \sqrt{13},$$

根据勾股定理得, $HE = \sqrt{AE^2 - AH^2} = 3$, 则 $ED = 1$;

(2) 连接 CP , 设 $AP = x$.



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle EPA = \angle CEP$, 即等腰 $\triangle APE$ 、等腰 $\triangle PEC$ 两个底角相等,

$$\therefore \triangle APE \sim \triangle PEC, \therefore \frac{PE}{EC} = \frac{AE}{PE},$$

$$\text{即: } PE^2 = AE \cdot CE,$$

$$\text{而 } EC = 2PB = 2(5 - x),$$

$$\text{即: } PC^2 = CE \cdot AP = 2(5 - x)x,$$

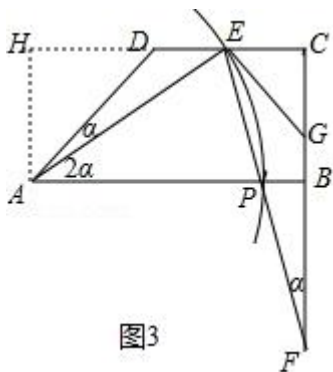
$$\text{而 } PC^2 = PB^2 + BC^2, \text{ 即: } PC^2 = (5 - x)^2 + 2^2,$$

$$\therefore 2(5 - x)x = (5 - x)^2 + 2^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{10 + \sqrt{13}}{3} \text{ (不合题意值已舍去),}$$

$$\text{即: } AP = \frac{10 + \sqrt{13}}{3};$$

(3) 如图 3 中, 在线段 CF 上取一点 G , 连接 EG .



设 $\angle F = \alpha$, 则 $\angle APE = \angle AEP = \angle BPF = 90^\circ - \alpha$,

则： $\angle EAP = 180^\circ - 2\angle APE = 2\alpha$ ，

$\because \triangle ADE \sim \triangle FGE$ ，设 $\angle DAE = \angle F = \alpha$ ，

由 $\angle DAB = 45^\circ$ ，可得 $3\alpha = 45^\circ$ ， $2\alpha = 30^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $AH = DH = 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 中， $\angle HEA = \angle EAB = 2\alpha = 30^\circ$ ， $\angle HAE = 60^\circ$ ，

$$\therefore HE = AH \cdot \tan \angle HAE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = HE - HD = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$EC = HC - HE = 5 - 2\sqrt{3},$$

$\because \triangle ADE \sim \triangle FGE$ ，

$$\therefore \angle ADC = \angle EGF = 135^\circ,$$

则 $\angle CEG = 45^\circ$ ，

$$\therefore EG = \sqrt{2}EC = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{AD}{FG} = \frac{DE}{GE},$$

$$\text{即：} \frac{2\sqrt{2}}{FG} = \frac{2\sqrt{3}-2}{5\sqrt{2}-2\sqrt{6}},$$

$$\text{解得：} FG = 3\sqrt{3} - 1.$$

【点评】 本题属于三角形相似综合题，涉及到解直角三角形、勾股定理等知识点，其中

(3) 中，利用三角形相似，确定 α 的大小，是本题的突破点，属于中考压轴题.