

2019 年上海市奉贤区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

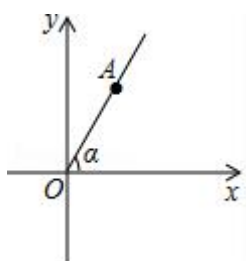
1. (4 分) 已知线段 a 、 b ，如果 $a:b=5:2$ ，那么下列各式中一定正确的是（ ）

- A. $a+b=7$ B. $5a=2b$ C. $\frac{a+b}{b}=\frac{7}{2}$ D. $\frac{a+5}{b+2}=1$

2. (4 分) 关于二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象，下列说法正确的是（ ）

- A. 开口向下
B. 经过原点
C. 对称轴右侧的部分是下降的
D. 顶点坐标是 $(-1, 0)$

3. (4 分) 如图，在直角坐标平面内，射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α ，如果 $OA=\sqrt{10}$ ， $\tan\alpha=3$ ，那么点 A 的坐标是（ ）



- A. $(1, 3)$ B. $(3, 1)$ C. $(1, \sqrt{10})$ D. $(3, \sqrt{10})$

4. (4 分) 对于非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，如果 $2|\vec{a}|=3|\vec{b}|$ ，且它们的方向相同，那么用向量 $\vec{a}$ 表示向量 $\vec{b}$ 正确的是（ ）

- A. $\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}$ B. $\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}$ C. $\vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{a}$ D. $\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{a}$

5. (4 分) 某同学在利用描点法画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 的图象时，先取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y ，如下表所示：

x	$\cdots$	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	0	-1	0	-3	$\cdots$

接着，他在描点时发现，表格中有一组数据计算错误，他计算错误的一组数据是（ ）

- A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

6. (4 分) 已知 $\odot A$ 的半径 AB 长是 5，点 C 在 AB 上，且 $AC=3$ ，如果 $\odot C$ 与 $\odot A$ 有公共点，

那么 $\odot C$ 的半径长 r 的取值范围是()

A. $r \geq 2$

B. $r \leq 8$

C. $2 < r < 8$

D. $2 \leq r \leq 8$

二、填空题(本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) =$ _____.

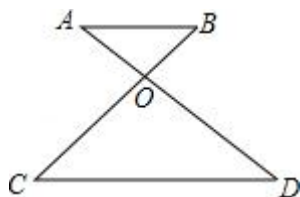
8. (4 分) 计算: $\sin 30^\circ \tan 60^\circ =$ _____.

9. (4 分) 如果函数 $y = (m - 1)x^2 + x$ (m 是常数) 是二次函数, 那么 m 的取值范围是_____.

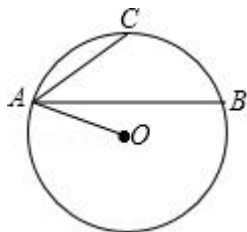
10. (4 分) 如果一个二次函数的图象在其对称轴左侧部分是上升的, 那么这个二次函数的解析式可以是_____. (只需写一个即可)

11. (4 分) 如果将抛物线 $y = -2x^2$ 向右平移 3 个单位, 那么所得到的新抛物线的对称轴是直线_____.

12. (4 分) 如图, AD 与 BC 相交于点 O , 如果 $\frac{AO}{DO} = \frac{1}{3}$, 那么当 $\frac{BO}{CO}$ 的值是_____时, $AB \parallel CD$.



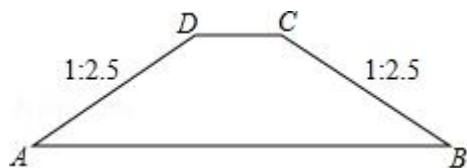
13. (4 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 联结 OA , AC , 如果 $\angle OAB = 20^\circ$, 那么 $\angle CAB$ 的度数是_____.



14. (4 分) 联结三角形各边中点, 所得的三角形的周长与原三角形周长的比是_____.

15. (4 分) 如果正 n 边形的内角是它中心角的两倍, 那么边数 n 的值是_____.

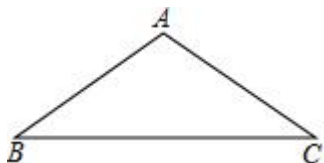
16. (4 分) 如图, 某水库大坝的横假面是梯形 $ABCD$, 坝顶宽 DC 是 10 米, 坝底宽 AB 是 90 米, 背水坡 AD 和迎水坡 BC 的坡度都为 $1:2.5$, 那么这个水库大坝的坝高是_____米.



17. (4 分) 我们把边长是两条对角线长度的比例中项的菱形叫做“钻石菱形”. 如果一个“钻

石菱形”的面积为 6，那么它的边长是_____.

18. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $\sin C = \frac{3}{5}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，点 B 、 C 分别与点 D 、 E 对应， AD 与边 BC 交于点 F 。如果 $AE \parallel BC$ ，那么 BF 的长是_____.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 已知抛物线 $y = x(x - 2) + 2$.

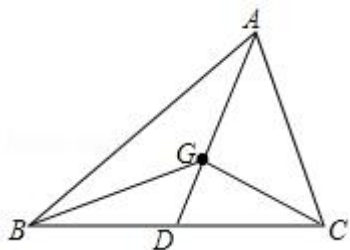
(1) 用配方法把这个抛物线的表达式化成 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式，并写出它的顶点坐标；

(2) 将抛物线 $y = x(x - 2) + 2$ 上下平移，使顶点移到 x 轴上，求新抛物线的表达式.

20. (10 分) 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， G 是重心.

(1) 设 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{BC} = \vec{b}$ ，用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\vec{BG}$ ；

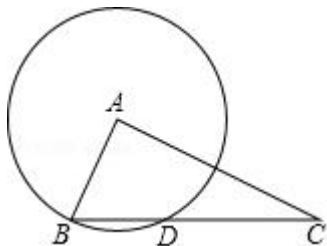
(2) 如果 $AB = 3$ ， $AC = 2$ ， $\angle GAC = \angle GCA$ ，求 BG 的长.



21. (10 分) 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ，以 A 为圆心、 AB 为半径画圆，与边 BC 交于另一点 D .

(1) 求 BD 的长；

(2) 连接 AD ，求 $\angle DAC$ 的正弦值.



22. (10 分) “滑块铰链”是一种用于连接窗扇和窗框，使窗户能够开启和关闭的连杆式活动链接装置（如图 1）。图 2 是“滑块铰链”的平面示意图，滑轨 MN 安装在窗框上，悬

图 1

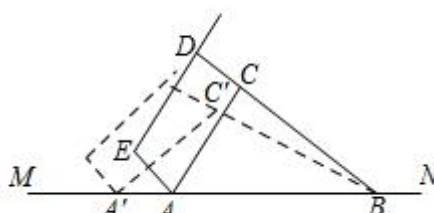
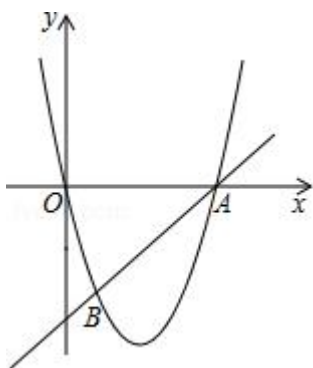


图2

(2) 如果 $BD = CD$, 求证: $AB^2 = AD \cdot AC$.

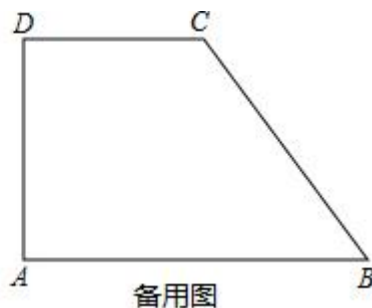
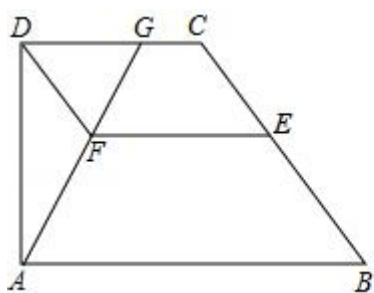
(1) 求这条抛物线的表达式和直线 AB 的表达式;

(2) 如果点 C 在直线 AB 上, 且 $\angle BOC$ 的正切值是 $\frac{3}{2}$, 求点 C 的坐标.



25. (14分) 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AD = 4$, $AB = 2CD = 6$, E 是边 BC 上一点, 过点 D 、 E 分别作 BC 、 CD 的平行线交于点 F , 联结 AF 并延长, 与射线 DC 交于点 G .

- (1) 当点 G 与点 C 重合时, 求 $CE:BE$ 的值;
- (2) 当点 G 在边 CD 上时, 设 $CE = m$, 求 $\triangle DFG$ 的面积; (用含 m 的代数式表示)
- (3) 当 $\triangle AFD \sim \triangle ADG$ 时, 求 $\angle DAG$ 的余弦值.



2019 年上海市奉贤区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）已知线段 a 、 b ，如果 $a:b=5:2$ ，那么下列各式中一定正确的是（ ）

- A. $a+b=7$ B. $5a=2b$ C. $\frac{a+b}{b}=\frac{7}{2}$ D. $\frac{a+5}{b+2}=1$

【分析】根据比例的性质进行判断即可．

【解答】解：A、当 $a=10$ ， $b=4$ 时， $a:b=5:2$ ，但是 $a+b=14$ ，故本选项错误；

B、由 $a:b=5:2$ ，得 $2a=5b$ ，故本选项错误；

C、由 $a:b=5:2$ ，得 $\frac{a+b}{b}=\frac{7}{2}$ ，故本选项正确；

D、由 $a:b=5:2$ ，得 $\frac{a+5}{b+2}=\frac{5}{2}$ ，故本选项错误．

故选：C．

【点评】本题考查了比例的性质及式子的变形，用到的知识点：在比例里，两个外项的积等于两个内项的积，比较简单．

2.（4 分）关于二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象，下列说法正确的是（ ）

- A. 开口向下
B. 经过原点
C. 对称轴右侧的部分是下降的
D. 顶点坐标是 $(-1, 0)$

【分析】由二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ ，可得其对称轴、顶点坐标；由二次项系数，可知图象开口向上；对每个选项分析、判断即可；

【解答】解：A、由二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 中 $a=\frac{1}{2}>0$ ，则抛物线开口向上；故本项错误；

B、当 $x=0$ 时， $y=\frac{1}{2}$ ，则抛物线不过原点；故本项错误；

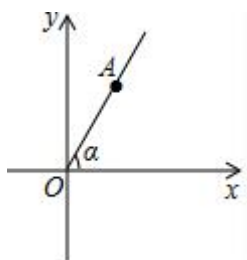
C、由二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 得，开口向上，对称轴为直线 $x=-1$ ，对称轴右侧的图象上升；故本项错误；

D、由二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 得，顶点为 $(-1, 0)$ ；故本项正确；

故选：D.

【点评】本题主要考查了二次函数的性质，应熟练掌握二次函数的性质：顶点、对称轴的求法及图象的特点.

3. (4分) 如图，在直角坐标平面内，射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α ，如果 $OA = \sqrt{10}$ ， $\tan \alpha = 3$ ，那么点 A 的坐标是 ()



- A. $(1, 3)$ B. $(3, 1)$ C. $(1, \sqrt{10})$ D. $(3, \sqrt{10})$

【分析】过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，由于 $\tan \alpha = 3$ ，设 $AB = 3x$ ， $OB = x$ ，根据勾股定理列出方程即可求出 x 的值，从而可求出点 A 的坐标.

【解答】解：过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，

由于 $\tan \alpha = 3$ ，

$$\therefore \frac{AB}{OB} = 3,$$

设 $AB = 3x$ ， $OB = x$ ，

$$\because OA = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{由勾股定理可知：} 9x^2 + x^2 = 10,$$

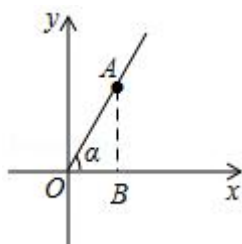
$$\therefore x^2 = 1,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore AB = 3, OB = 1,$$

$$\therefore A \text{ 的坐标为 } (1, 3),$$

故选：A.



【点评】 本题考查解直角三角形，解题的关键是熟练作出辅助线后，利用勾股定理列出方程，本题属于中等题型．

4. (4 分) 对于非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，如果 $2|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ ，且它们的方向相同，那么用向量 $\vec{a}$ 表示向量 $\vec{b}$ 正确的是 ()

A. $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$ B. $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$ C. $\vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{a}$ D. $\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{a}$

【分析】 根据已知条件得到非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的模间的数量关系，再结合它们的方向相同解题．

【解答】 解： $\because 2|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$,

$$\therefore |\vec{b}| = \frac{2}{3}|\vec{a}|.$$

又 $\because$ 非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同，

$$\therefore \vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}.$$

故选：B．

【点评】 本题考查的是平面向量的知识，即长度不为 0 的向量叫做非零向量，向量包括长度及方向，而长度等于 1 个单位长度的向量叫做单位向量，注意单位向量只规定大小没规定方向．

5. (4 分) 某同学在利用描点法画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象时，先取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y ，如下表所示：

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	-3	0	-1	0	-3	...

接着，他在描点时发现，表格中有一组数据计算错误，他计算错误的一组数据是 ()

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

【分析】 除了 $x = 2$ ， $y = -1$ ，其它四组对应值可能为抛物线的对称点，由于表格中有一组数据计算错误，从而可判断 $x = 2$ ， $y = -1$ 错误．

【解答】 解：由表中数据得 $x = 0$ 和 $x = 4$ 时， $y = 3$ ； $x = 1$ 和 $x = 3$ 时， $y = 0$ ，它们为抛物线上的对称点，

而表格中有一组数据计算错误，

所以只有 $x=2$ 时 $y=-1$ 错误.

故选: B .

【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点: 把求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标问题转化为解关于 x 的一元二次方程. 也考查了二次函数的性质.

6. (4分) 已知 $\odot A$ 的半径 AB 长是 5, 点 C 在 AB 上, 且 $AC=3$, 如果 $\odot C$ 与 $\odot A$ 有公共点, 那么 $\odot C$ 的半径长 r 的取值范围是 ()

A. $r \geq 2$ B. $r \leq 8$ C. $2 < r < 8$ D. $2 \leq r \leq 8$

【分析】 先确定点 C 到 $\odot A$ 的最大距离为 8, 最小距离为 2, 利用 $\odot C$ 与 $\odot A$ 相交或相切确定 r 的范围.

【解答】 解: $\because \odot A$ 的半径 AB 长是 5, 点 C 在 AB 上, 且 $AC=3$,
 $\therefore$ 点 C 到 $\odot A$ 的最大距离为 8, 最小距离为 2,
 $\because \odot C$ 与 $\odot A$ 有公共点,
 $\therefore 2 \leq r \leq 8$.

故选: D .

【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系: 两圆的圆心距为 d 、两圆的半径分别为 r, R :

①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$; ②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R+r$; ③两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r$ ($R \geq r$); ④两圆内切 $\Leftrightarrow d = R-r$ ($R > r$); ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r$ ($R > r$).

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 计算: $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = \underline{5\vec{a} - \vec{b}}$.

【分析】 根据平面向量的加法法则计算即可;

【解答】 解: $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = 3\vec{a} + 2\vec{a} - \vec{b} = 5\vec{a} - \vec{b}$;

故答案为 $5\vec{a} - \vec{b}$;

【点评】 本题考查平面向量的加减法则, 解题的关键是熟练掌握平面向量的加减法则, 注意平面向量的加减适合加法交换律以及结合律, 适合去括号法则.

8. (4分) 计算: $\sin 30^\circ \tan 60^\circ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值计算得出答案.

【解答】 解: $\sin 30^\circ \tan 60^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

9. (4分) 如果函数 $y = (m - 1)x^2 + x$ (m 是常数) 是二次函数，那么 m 的取值范围是 $m \neq 1$.

【分析】依据二次函数的二次项系数不为零求解即可.

【解答】解： $\because$ 函数 $y = (m - 1)x^2 + x$ (m 为常数) 是二次函数，

$\therefore m - 1 \neq 0$ ，解得： $m \neq 1$ ，

故答案为： $m \neq 1$.

【点评】本题主要考查的是二次函数的定义，掌握二次函数的特点是解题的关键.

10. (4分) 如果一个二次函数的图象在其对称轴左侧部分是上升的，那么这个二次函数的解析式可以是 $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一). (只需写一个即可)

【分析】二次函数的图象在其对称轴左侧部分是上升的可知该函数图象的开口向下，得出符合条件的函数解析式即可.

【解答】解： $\because$ 二次函数的图象在其对称轴左侧部分是上升的，

$\therefore a < 0$ ，

$\therefore$ 符合条件的二次函数解析式可以为： $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一).

故答案为： $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一).

【点评】本题考查的是二次函数的性质，根据二次函数的性质判断出 a 的符号是解答此题的关键，此题属开放性题目，答案不唯一.

11. (4分) 如果将抛物线 $y = -2x^2$ 向右平移 3 个单位，那么所得到的新抛物线的对称轴是直线 $x = 3$.

【分析】直接利用二次函数图象平移规律得出答案.

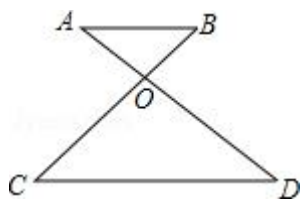
【解答】解：将抛物线 $y = -2x^2$ 向右平移 3 个单位得到的解析式为： $y = -2(x - 3)^2$ ，

故所得到的新抛物线的对称轴是直线： $x = 3$ ，

故答案为： $x = 3$.

【点评】此题主要考查了二次函数图象与几何变换，正确记忆平移规律是解题关键.

12. (4分) 如图， AD 与 BC 相交于点 O ，如果 $\frac{AO}{DO} = \frac{1}{3}$ ，那么当 $\frac{BO}{CO}$ 的值是 $\frac{1}{3}$ 时， $AB \parallel CD$.



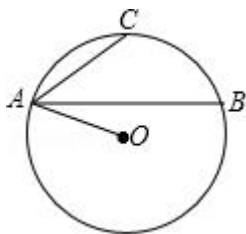
【分析】如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边，据此可得结论．

【解答】解：∵ $\frac{AO}{DO} = \frac{1}{3}$ ，
 ∴ 当 $\frac{BO}{CO} = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO}$ ，
 ∴ $AB \parallel CD$ ．

故答案为： $\frac{1}{3}$ ．

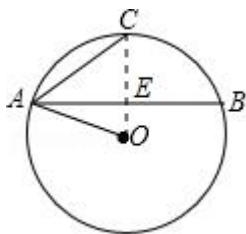
【点评】本题主要考查了平行线分线段成比例定理，解题时注意：如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

- 13.（4分）如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦， C 是 $\widehat{AB}$ 的中点，联结 OA ， AC ，如果 $\angle OAB = 20^\circ$ ，那么 $\angle CAB$ 的度数是 35° ．



【分析】连接 OC 交 AB 于 E ．想办法求出 $\angle OAC$ 即可解决问题．

【解答】解：连接 OC 交 AB 于 E ．



∵ C 是 $\widehat{AB}$ 的中点，

∴ $OC \perp AB$ ，

∴ $\angle AEO = 90^\circ$ ，

∵ $\angle BAO = 20^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOE = 70^\circ,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle C = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle OAC - \angle OAB = 35^\circ,$$

故答案为 35° .

【点评】 本题考查垂径定理，圆周角定理，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

14. (4分) 联结三角形各边中点，所得的三角形的周长与原三角形周长的比是 1:2 .

【分析】 根据 D 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 AC 的中点，求证 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ，然后利用相似三角形周长比等于相似比，可得出答案.

【解答】 解：如图，

$\because D$ 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 AC 的中点，

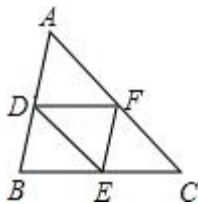
$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC, DF = \frac{1}{2}BC, EF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore DE + DF + EF = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$,

$\therefore$ 所得到的 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比是：1:2.

故答案为：1:2.



【点评】 此题考查了相似三角形的判定与性质和三角形中位线定理的理解和掌握，解答此题的关键是利用了相似三角形周长比等于相似比.

15. (4分) 如果正 n 边形的内角是它中心角的两倍，那么边数 n 的值是 6 .

【分析】 根据正 n 边形的内角是它中心角的两倍，列出方程求解即可.

【解答】 解：依题意有

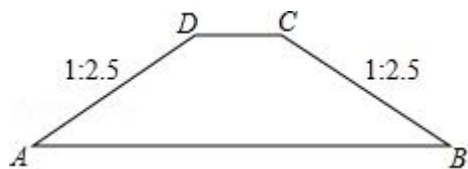
$$\frac{(n-2) \cdot 180}{n} = \frac{360}{n} \times 2,$$

解得 $n = 6$.

故答案为：6.

【点评】此题考查了多边形内角与外角，此题比较简单，解答此题的关键是熟知正多边形的内角和公式及中心角的求法．

16. (4分) 如图，某水库大坝的横假面是梯形 $ABCD$ ，坝顶宽 DC 是 10 米，坝底宽 AB 是 90 米，背水坡 AD 和迎水坡 BC 的坡度都为 1:2.5，那么这个水库大坝的坝高是 16 米．



【分析】直接利用坡度的定义表示出 AM ， BN 的长，进而利用已知表示出 AB 的长，进而得出答案．

【解答】解：如图所示：过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M ，作 $CN \perp AB$ 于点 N ，

设 $DM = CN = x$ ，

$\because$ 背水坡 AD 和迎水坡 BC 的坡度都为 1:2.5，

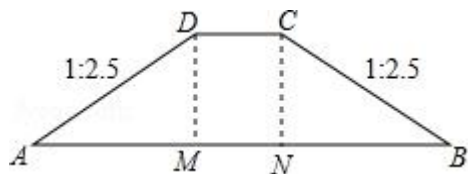
$\therefore AM = BN = 2.5x$ ，

故 $AB = AM + BN + MN = 5x + 10 = 90$ ，

解得： $x = 16$ ，

即这个水库大坝的坝高是 16 米．

故答案为：16．



【点评】此题考查了坡度坡角问题．此题难度适中，注意构造直角三角形，并借助于解直角三角形的知识求解是关键．

17. (4分) 我们把边长是两条对角线长度的比例中项的菱形叫做“钻石菱形”．如果一个“钻石菱形”的面积为 6，那么它的边长是 $2\sqrt{3}$ ．

【分析】由“钻石菱形”的面积可求对角线的乘积，再根据比例中项的定义可求“钻石菱形”的边长．

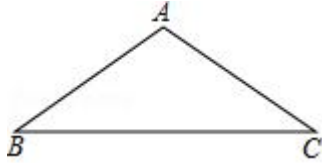
【解答】解：由比例中项的定义可得，“钻石菱形”的边长 $= \sqrt{6 \times 2} = 2\sqrt{3}$ ．

故答案为： $2\sqrt{3}$ ．

【点评】本题主要考查比例线段、菱形的性质、菱形的面积公式，熟练掌握菱形性质和

菱形的面积公式是关键.

18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $\sin C = \frac{3}{5}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$, 点 B 、 C 分别与点 D 、 E 对应, AD 与边 BC 交于点 F . 如果 $AE \parallel BC$, 那么 BF 的长是 $\frac{25}{8}$.



【分析】如图, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 得到 $\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$, $BH = CH$, 根据三角函数的定义得到 $AH = 3$, 求得 $CH = BH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 4$, 根据旋转的性质得到 $\angle BAF = \angle CAE$, 根据平行线的性质得到 $\angle CAE = \angle C$, 设 $AF = BF = x$, 得到 $FH = 4 - x$, 根据勾股定理即可得到结论.

【解答】解: 如图, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\therefore \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ, \quad BH = CH,$$

$$\because AB = AC = 5, \quad \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AH = 3,$$

$$\therefore CH = BH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 4,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$,

$$\therefore \angle BAF = \angle CAE,$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle C,$$

$$\because \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle B,$$

$$\therefore AF = BF,$$

设 $AF = BF = x$,

$$\therefore FH = 4 - x,$$

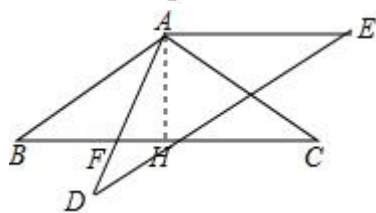
$$\because AF^2 = AH^2 + FH^2,$$

$$\therefore x^2 = 3^2 + (4 - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{25}{8},$$

$$\therefore BF = \frac{25}{8},$$

故答案为: $\frac{25}{8}$,



【点评】 本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，解直角三角形，正确的作出辅助线是解题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 已知抛物线 $y = x(x - 2) + 2$.

(1) 用配方法把这个抛物线的表达式化成 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式，并写出它的顶点坐标;

(2) 将抛物线 $y = x(x - 2) + 2$ 上下平移，使顶点移到 x 轴上，求新抛物线的表达式.

【分析】 (1) 直接利用配方法求出二次函数的顶点坐标即可;

(2) 利用二次函数平移规律得出平移后解析式.

【解答】 解: (1) $y = x(x - 2) + 2$

$$= x^2 - 2x + 2$$

$$= (x - 1)^2 + 1,$$

它的顶点坐标为: (1, 1);

(2) $\because$ 将抛物线 $y = x(x - 2) + 2$ 上下平移，使顶点移到 x 轴上，

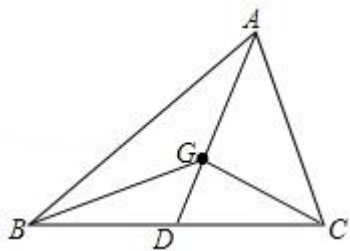
$\therefore$ 图象向下平移 1 个单位得到: $y = (x - 1)^2$.

【点评】 此题主要考查了二次函数图象与几何变换，正确得出平移后解析式是解题关键.

20. (10 分) 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， G 是重心.

(1) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BG}$;

(2) 如果 $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle GAC = \angle GCA$, 求 BG 的长.



【分析】(1) 根据已知条件得到 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, 由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, 得到 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, 由于 G 是重心, 得到 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$, 于是得到结论;

(2) 延长 BG 交 AC 于 H , 根据等腰三角形的判定得到 $GA = GC$, 求得 $AH = \frac{1}{2}AC = 1$, 求得 $BH \perp AC$, 解直角三角形即可得到结论.

【解答】解: (1) $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b},$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b},$$

$\because G$ 是重心,

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b};$$

(2) 延长 BG 交 AC 于 H ,

$$\because \angle GAC = \angle GCA,$$

$$\therefore GA = GC,$$

$\because G$ 是重心, $AC = 2$,

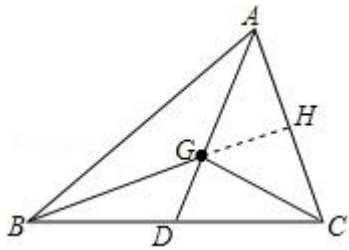
$$\therefore AH = \frac{1}{2}AC = 1,$$

$$\therefore BH \perp AC,$$

在 $Rt\triangle ABH$ 中, $\angle AHB = 90^\circ$, $AB = 3$,

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BG = \frac{2}{3}BH = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

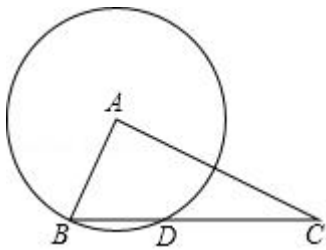


【点评】 本题考查了三角形的直线，平面向量，等腰三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

21. (10 分) 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 5$, $AC = 2\sqrt{5}$, 以 A 为圆心、 AB 为半径画圆, 与边 BC 交于另一点 D .

(1) 求 BD 的长;

(2) 连接 AD , 求 $\angle DAC$ 的正弦值.



【分析】 (1) 如图连接 AD , 作 $AH \perp BD$ 于 H . 利用面积法求出 AH , 再利用勾股定理求出 BH 即可解决问题;

(2) 作 $DM \perp AC$ 于 M . 利用面积法求出 DM 即可解决问题;

【解答】 解: (1) 如图连接 AD , 作 $AH \perp BD$ 于 H .

$$\because \text{Rt}\triangle ABC, \angle BAC = 90^\circ, BC = 5, AC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5},$$

$$\because \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH,$$

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = 2,$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 1,$$

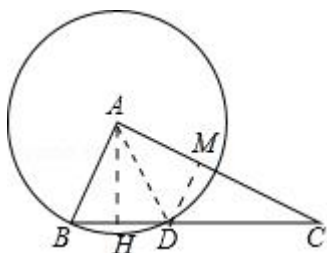
$$\because AB = AD, AH \perp BD,$$

$$\therefore BH = HD = 1,$$

$$\therefore BD = 2.$$

(2) 作 $DM \perp AC$ 于 M .

$$\begin{aligned}
&\because S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}, \\
&\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times DM, \\
&\therefore DM = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore \sin \angle DAC = \frac{DM}{AD} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$



【点评】 本题考查勾股定理，解直角三角形，垂径定理等知识，解题的关键是学会利用面积法解决问题，属于中考常考题型．

22. (10 分) “滑块铰链”是一种用于连接窗扇和窗框，使窗户能够开启和关闭的连杆式活动链接装置（如图 1）. 图 2 是“滑块铰链”的平面示意图，滑轨 MN 安装在窗框上，悬臂 DE 安装在窗扇上，支点 B 、 C 、 D 始终在一条直线上，已知托臂 $AC = 20$ 厘米，托臂 $BD = 40$ 厘米，支点 C 、 D 之间的距离是 10 厘米，张角 $\angle CAB = 60^\circ$.

(1) 求支点 D 到滑轨 MN 的距离（精确到 1 厘米）;

(2) 将滑块 A 向左侧移动到 A' , (在移动过程中，托臂长度不变，即 $AC = A'C'$, $BC = BC'$) 当张角 $\angle C'A'B = 45^\circ$ 时，求滑块 A 向左侧移动的距离(精确到 1 厘米). (备用数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{6} \approx 2.45$, $\sqrt{7} \approx 2.65$)



图1

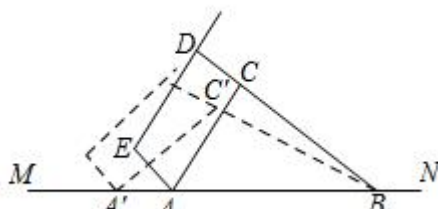


图2

【分析】 (1) 过 C 作 $CG \perp AB$ 于 G , 过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H , 解直角三角形顶点 $AG = \frac{1}{2}AC = 10$, $CG = \sqrt{3}AG = 10\sqrt{3}$, 根据相似三角形的性质得到 DH ;

(2) 过 C' 作 $C'S \perp MN$ 于 S , 解直角三角形得到 $A'S = C'S = 10\sqrt{2}$, 求得 $A'B = 10\sqrt{2} + 10\sqrt{7}$, 根据线段的和差即可得到结论.

【解答】解：（1）过 C 作 $CG \perp AB$ 于 G ，过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，

$$\because AC = 20, \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AC = 10, CG = \sqrt{3}AG = 10\sqrt{3},$$

$$\because BC = BD - CD = 30,$$

$$\because CG \perp AB, DH \perp AB,$$

$$\therefore CG \parallel DH,$$

$$\therefore \triangle BCG \sim \triangle BDH,$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{CG}{DH},$$

$$\therefore \frac{30}{40} = \frac{10\sqrt{3}}{DH},$$

$$\therefore DH = \frac{40\sqrt{3}}{3} \approx 23 \text{ (厘米)};$$

$\therefore$ 支点 D 到滑轨 MN 的距离为 23 厘米；

（2）过 C' 作 $C'S \perp MN$ 于 S ，

$$\because A'C' = AC = 20, \angle C'A'S = 45^\circ,$$

$$\therefore A'S = C'S = 10\sqrt{2},$$

$$\therefore BS = \sqrt{BC'^2 - C'S^2} = 10\sqrt{7},$$

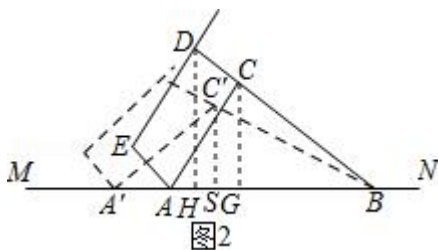
$$\therefore A'B = 10\sqrt{2} + 10\sqrt{7},$$

$$\because BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = 10\sqrt{6},$$

$$\therefore AB = 10 + 10\sqrt{6},$$

$$\therefore AA' = A'B - AB \approx 6 \text{ (厘米)},$$

$\therefore$ 滑块 A 向左侧移动的距离是 6 厘米.



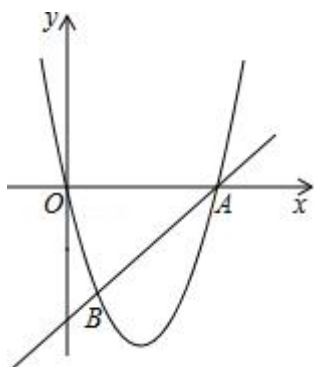
【点评】本题考查解直角三角形，勾股定理、相似三角形的判定和性质，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

23. (12分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上， BD 的垂直平分线交 CA 的延长线于点 E ，交 BD 于点 F ，联结 BE ， $ED^2 = EA \cdot EC$.

24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 AB 与抛物线 $y = ax^2 + bx$ 交于点 $A(6, 0)$ 和点 $B(1, -5)$.

(1) 求这条抛物线的表达式和直线 AB 的表达式;

(2) 如果点 C 在直线 AB 上, 且 $\angle BOC$ 的正切值是 $\frac{3}{2}$, 求点 C 的坐标.



【分析】 (1) 利用待定系数法求二次函数和一次函数的解析式;

(2) 先说明 $OA = OH = 6$, 则 $\angle OAH = 45^\circ$, 作辅助线, 根据正切值证明 $\angle BOC = \angle OBE$, 作 OB 的垂直平分线交 AB 于 C , 交 OB 于 F ,

解法一: 先根据中点坐标公式可得 $F(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, 易得直线 OB 的解析式为: $y = -5x$,

根据两直线垂直的关系可得直线 FC 的解析式为: $y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$, 列方程 $\frac{1}{5}x - \frac{13}{5} = x - 6$,

解出可得 C 的坐标;

解法二: 过 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D , 连接 OC , 设 $C(m, m-6)$, 根据 $OC = BC$, 列方程可得结论.

【解答】 解: (1) 把点 $A(6, 0)$ 和点 $B(1, -5)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx$ 得:

$$\begin{cases} 36a + 6b = 0 \\ a + b = -5 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 这条抛物线的表达式: $y = x^2 - 6x$,

设直线 AB 的解析式为: $y = kx + b$,

把点 $A(6, 0)$ 和点 $B(1, -5)$ 代入得: $\begin{cases} 6k + b = 0 \\ k + b = -5 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = 1 \\ b = -6 \end{cases}$,

则直线 AB 的解析式为: $y = x - 6$;

(2) 当 $x = 0$ 时, $y = 6$, 当 $y = 0$ 时, $x = 6$,

$\therefore OA = OH = 6$,

$\therefore \angle AOH = 90^\circ$,

$$\therefore \angle OAH = 45^\circ,$$

过 B 作 $BG \perp x$ 轴于 G , 则 $\triangle ABG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = 5\sqrt{2},$$

过 O 作 $OE \perp AB$ 于 E ,

$$S_{\triangle AOH} = \frac{1}{2}AH \cdot OE = \frac{1}{2}OA \cdot OH,$$

$$6\sqrt{2} \cdot OE = 6 \times 6,$$

$$OE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = AB - AE = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{Rt}\triangle BOE \text{ 中, } \tan \angle OBE = \frac{OE}{BE} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \angle BOC \text{ 的正切值是 } \frac{3}{2},$$

$$\therefore \angle BOC = \angle OBE,$$

作 OB 的垂直平分线交 AB 于 C , 交 OB 于 F ,

解法一: $\because B(1, -5)$,

$$\therefore F\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right),$$

易得直线 OB 的解析式为: $y = -5x$,

设直线 FC 的解析式为: $y = \frac{1}{5}x + b$,

$$\text{把 } F\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ 代入得: } -\frac{5}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + b, \quad b = -\frac{13}{5},$$

$$\therefore \text{直线 } FC \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5},$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{13}{5} = x - 6,$$

$$x = \frac{17}{4},$$

$$\text{当 } x = \frac{17}{4} \text{ 时, } y = \frac{17}{4} - 6 = -\frac{7}{4},$$

$$\therefore C\left(\frac{17}{4}, -\frac{7}{4}\right);$$

解法二: 过 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D , 连接 OC ,

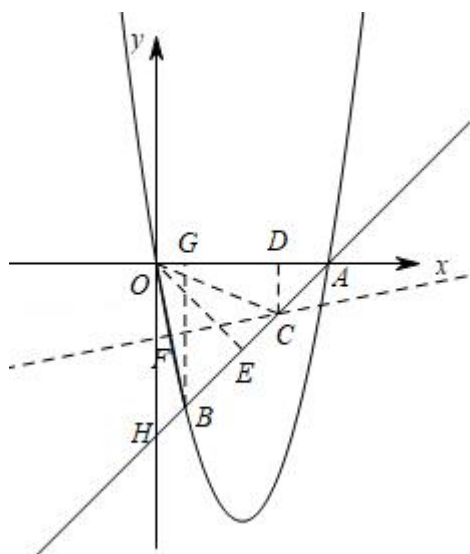
设 $C(m, m-6)$, 则 $AC = \sqrt{2}(6-m)$,

$$\because OC = BC,$$

$$\therefore m^2 + (m-6)^2 = [5\sqrt{2} - \sqrt{2}(6-m)]^2,$$

$$m = \frac{17}{4},$$

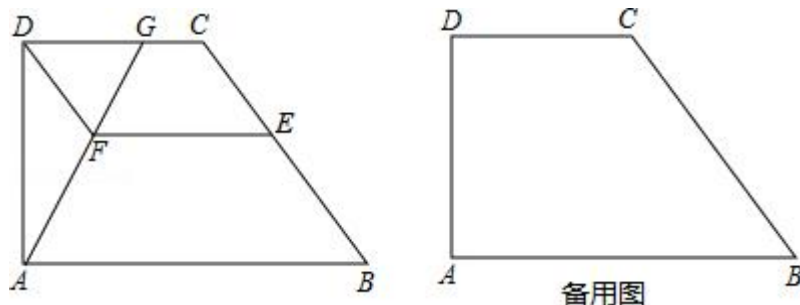
$$\therefore C\left(\frac{17}{4}, -\frac{7}{4}\right).$$



【点评】 此题考查二次函数综合题，综合考查待定系数法求函数解析式，锐角三角函数的意义，等腰直角三角形的性质，画出图形，利用数形结合的思想解决问题．

25. (14分) 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ， $AD = 4$ ， $AB = 2CD = 6$ ， E 是边 BC 上一点，过点 D 、 E 分别作 BC 、 CD 的平行线交于点 F ，联结 AF 并延长，与射线 DC 交于点 G ．

- (1) 当点 G 与点 C 重合时，求 $CE:BE$ 的值；
- (2) 当点 G 在边 CD 上时，设 $CE = m$ ，求 $\triangle DFG$ 的面积；(用含 m 的代数式表示)
- (3) 当 $\triangle AFD \sim \triangle ADG$ 时，求 $\angle DAG$ 的余弦值．



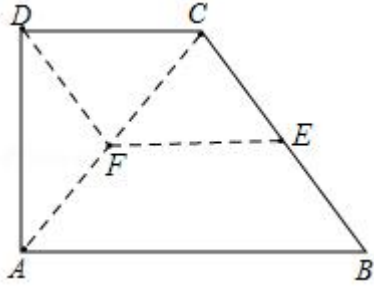
【分析】 (1) 由题意可得四边形 $DCEF$ 是平行四边形，可得 $CD = EF$ ，通过证明 $\triangle CFE \sim \triangle CAB$ ，可得 $\frac{CE}{CB} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}$ ，可得 $BE = CE$ ，则可求 $CE:BE$ 的值；

(2) 延长 AG ， BC 交于点 M ，过点 C 作 $CN \perp AB$ 于点 N ，交 EF 于点 H ，由题意可得四边形 $ADCN$ 是矩形，可得 $AD = CN = 4$ ， $CD = AN = 3$ ， $BN = 3$ ，由平行线分线段成比例

可求 BE , ME , MC , CH , GC 的长, 即可求 GD 的长, 由三角求形面积公式可 $\triangle DFG$ 的面积;

(3) 由 $\triangle AFD \sim \triangle ADG$, 可得 $\angle AFD = \angle ADG = 90^\circ$, 由余角的性质可得 $\angle DAG = \angle B$, 即可求 $\angle DAG$ 的余弦值.

【解答】解: (1) 如图,



$$\because DC \parallel EF, DF \parallel CE$$

$\therefore$ 四边形 $DCEF$ 是平行四边形

$$\therefore CD = EF,$$

$$\because AB = 2CD = 6,$$

$$\therefore AB = 2EF,$$

$$\because EF \parallel CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CFE \sim \triangle CAB$$

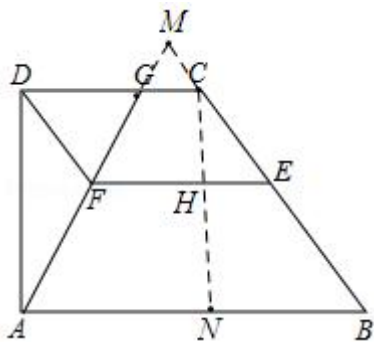
$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore BC = 2CE,$$

$$\therefore BE = CE$$

$$\therefore EC:BE = 1:1 = 1$$

(2) 如图, 延长 AG , BC 交于点 M , 过点 C 作 $CN \perp AB$ 于点 N , 交 EF 于点 H



$$\because AD \perp CD, CN \perp CD$$

$\therefore AD \parallel CN$, 且 $CD \parallel AB$

$\therefore$ 四边形 $ADCN$ 是平行四边形,

又 $\because \angle DAB = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $ADCN$ 是矩形,

$\therefore AD = CN = 4$, $CD = AN = 3$,

$\therefore BN = AB - AN = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle BCN$ 中, $BC = \sqrt{CN^2 + BN^2} = 5$

$\therefore BE = BC - CE = 5 - m$,

$\because EF \parallel AB$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{ME}{MB},$$

$$\text{即 } \frac{CD}{AB} = \frac{ME}{BM} = \frac{1}{2}$$

$\therefore ME = BE = 5 - m$,

$\therefore MC = ME - CE = 5 - 2m$,

$\because EF \parallel AB$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{HE}{BN} = \frac{HC}{CN}$$

$$\therefore HC = \frac{4}{5}m,$$

$\because CG \parallel EF$

$$\therefore \frac{GC}{EF} = \frac{MC}{ME}$$

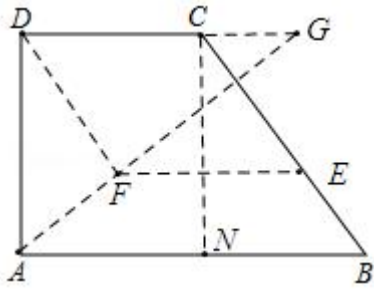
$$\text{即 } \frac{GC}{3} = \frac{5-2m}{5-m}$$

$$\therefore GC = \frac{15-6m}{5-m}$$

$$\therefore DG = CD - GC = 3 - \frac{15-6m}{5-m} = \frac{3m}{5-m}$$

$$\therefore S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2} \times DG \times CH = \frac{6m^2}{25-5m}$$

(3) 过点 C 作 $CN \perp AB$ 于点 N ,



$\because AB \parallel CD, \angle DAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAB = \angle ADG = 90^\circ$,

若 $\triangle AFD \sim \triangle ADG$,

$\therefore \angle AFD = \angle ADG = 90^\circ$

$\therefore DF \perp AG$

又 $\because DF \parallel BC$

$\therefore AG \perp BC$

$\therefore \angle B + \angle GAB = 90^\circ$, 且 $\angle DAG + \angle GAB = 90^\circ$

$\therefore \angle B = \angle DAG$

$\therefore \cos \angle DAG = \cos B = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{5}$

【点评】 本题是相似形综合题，考查了平行四边形的判定和性质，矩形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数等知识，熟练运用相似三角形的性质求线段的长度是本题的关键。