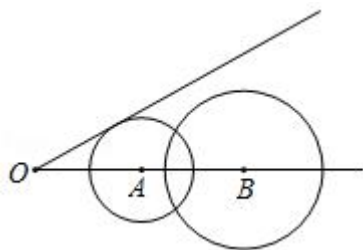


2018 年上海市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分。下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的）

1. (4.00 分) 下列计算 $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ 的结果是 ()
A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$
2. (4.00 分) 下列对一元二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 根的情况的判断，正确的是 ()
A. 有两个不相等实数根 B. 有两个相等实数根
C. 有且只有一个实数根 D. 没有实数根
3. (4.00 分) 下列对二次函数 $y = x^2 - x$ 的图象的描述，正确的是 ()
A. 开口向下 B. 对称轴是 y 轴
C. 经过原点 D. 在对称轴右侧部分是下降的
4. (4.00 分) 据统计，某住宅楼 30 户居民五月份最后一周每天实行垃圾分类的户数依次是：27，30，29，25，26，28，29，那么这组数据的中位数和众数分别是 ()
A. 25 和 30 B. 25 和 29 C. 28 和 30 D. 28 和 29
5. (4.00 分) 已知平行四边形 $ABCD$ ，下列条件中，不能判定这个平行四边形为矩形的是 ()
A. $\angle A = \angle B$ B. $\angle A = \angle C$ C. $AC = BD$ D. $AB \perp BC$
6. (4.00 分) 如图，已知 $\angle POQ = 30^\circ$ ，点 A 、 B 在射线 OQ 上（点 A 在点 O 、 B 之间），半径长为 2 的 $\odot A$ 与直线 OP 相切，半径长为 3 的 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交，那么 OB 的取值范围是 ()



- A. $5 < OB < 9$ B. $4 < OB < 9$ C. $3 < OB < 7$ D. $2 < OB < 7$

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4.00 分) -8 的立方根是_____.

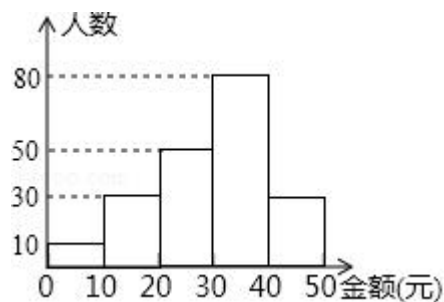
8. (4.00 分) 计算: $(a+1)^2 - a^2 =$ _____.

9. (4.00 分) 方程组 $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y=2 \end{cases}$ 的解是_____.

10. (4.00 分) 某商品原价为 a 元, 如果按原价的八折销售, 那么售价是元. (用含字母 a 的代数式表示).

11. (4.00 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ (k 是常数, $k \neq 1$) 的图象有一支在第二象限, 那么 k 的取值范围是_____.

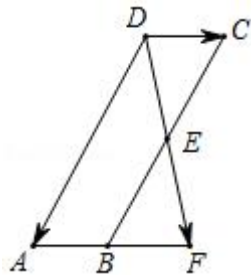
12. (4.00 分) 某校学生自主建立了一个学习用品义卖平台, 已知九年级 200 名学生义卖所得金额的频数分布直方图如图所示, 那么 20 - 30 元这个小组的组频率是_____.



13. (4.00 分) 从 $\frac{2}{7}$, π , $\sqrt{3}$ 这三个数中选一个数, 选出的这个数是无理数的概率为_____.

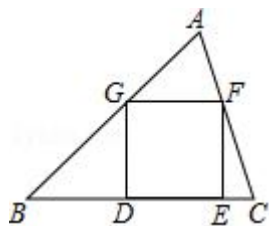
14. (4.00 分) 如果一次函数 $y=kx+3$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 0)$, 那么 y 的值随 x 的增大而_____. (填“增大”或“减小”)

15. (4.00 分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 BC 的中点, 联结 DE 并延长, 与 AB 的延长线交于点 F . 设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ 那么向量 $\overrightarrow{DF}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



16. (4.00 分) 通过画出多边形的对角线, 可以把多边形内角和问题转化为三角形内角和问题. 如果从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条, 那么该多边形的内角和是_____度.

17. (4.00 分) 如图, 已知正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 G 、 F 分别在边 AB 、 AC 上. 如果 $BC=4$, $\triangle ABC$ 的面积是 6, 那么这个正方形的边长是_____.



18. (4.00 分) 对于一个位置确定的图形, 如果它的所有点都在一个水平放置的矩形内部或边上, 且该图形与矩形的每条边都至少有一个公共点 (如图 1), 那么这个矩形水平方向的边长称为该图形的宽, 铅锤方向的边长称为该矩形的高. 如图 2, 菱形 $ABCD$ 的边长为 1, 边 AB 水平放置. 如果该菱形的高是宽的 $\frac{2}{3}$, 那么它的宽的值是_____.

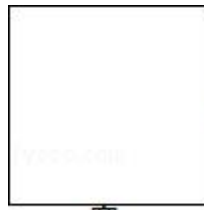


图1

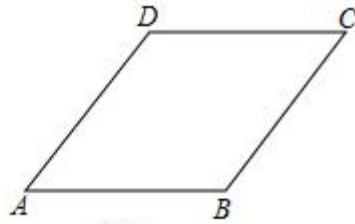
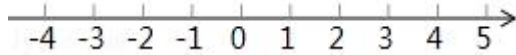


图2

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10.00 分) 解不等式组: $\begin{cases} 2x+1 > x \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.

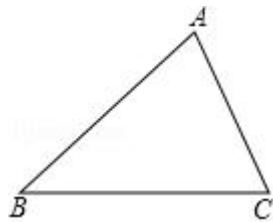


20. (10.00 分) 先化简, 再求值: $(\frac{2a}{a^2-1} - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a+2}{a^2-a}$, 其中 $a=\sqrt{5}$.

21. (10.00 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=5$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$.

(1) 求边 AC 的长;

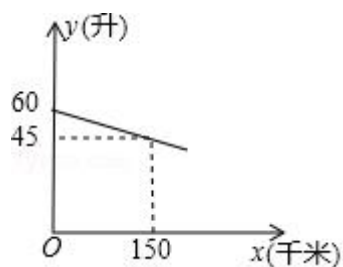
(2) 设边 BC 的垂直平分线与边 AB 的交点为 D, 求 $\frac{AD}{DB}$ 的值.



22. (10.00 分) 一辆汽车在某次行驶过程中, 油箱中的剩余油量 y (升) 与行驶路程 x (千米) 之间是一次函数关系, 其部分图象如图所示.

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式; (不需要写定义域)

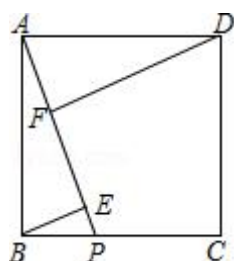
(2) 已知当油箱中的剩余油量为 8 升时, 该汽车会开始提示加油, 在此次行驶过程中, 行驶了 500 千米时, 司机发现离前方最近的加油站有 30 千米的路程, 在开往该加油站的途中, 汽车开始提示加油, 这时离加油站的路程是多少千米?



23. (12.00 分) 已知：如图，正方形 $ABCD$ 中， P 是边 BC 上一点， $BE \perp AP$ ， $DF \perp AP$ ，垂足分别是点 E 、 F 。

(1) 求证： $EF = AE - BE$ ；

(2) 联结 BF ，如课 $\frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD}$ 。求证： $EF = EP$ 。

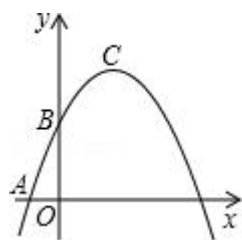


24. (12.00 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图). 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(0, \frac{5}{2})$, 顶点为 C , 点 D 在其对称轴上且位于点 C 下方, 将线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° , 点 C 落在抛物线上的点 P 处.

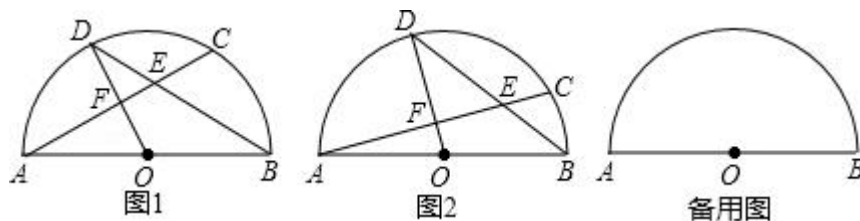
(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 求线段 CD 的长;

(3) 将抛物线平移, 使其顶点 C 移到原点 O 的位置, 这时点 P 落在点 E 的位置, 如果点 M 在 y 轴上, 且以 O 、 D 、 E 、 M 为顶点的四边形面积为 8, 求点 M 的坐标.



25. (14.00 分) 已知 $\odot O$ 的直径 $AB=2$, 弦 AC 与弦 BD 交于点 E . 且 $OD \perp AC$, 垂足为点 F .



- (1) 如图 1, 如果 $AC=BD$, 求弦 AC 的长;
- (2) 如图 2, 如果 E 为弦 BD 的中点, 求 $\angle ABD$ 的余切值;
- (3) 联结 BC 、 CD 、 DA , 如果 BC 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边, CD 是 $\odot O$ 的内接正 $(n+4)$ 边形的一边, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

2018 年上海市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分。下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的）

1. (4.00 分) 下列计算 $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ 的结果是 ()

A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

【分析】先化简，再合并同类项即可求解.

【解答】解： $\sqrt{18} - \sqrt{2}$
 $= 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}.$

故选：C.

2. (4.00 分) 下列对一元二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 根的情况的判断，正确的是 ()

A. 有两个不相等实数根 B. 有两个相等实数根
C. 有且只有一个实数根 D. 没有实数根

【分析】根据方程的系数结合根的判别式，即可得出 $\Delta = 13 > 0$ ，进而即可得出方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根.

【解答】解： $\because a=1, b=1, c=-3,$
 $\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (1) \times (-3) = 13 > 0,$
 $\therefore$ 方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根.

故选：A.

3. (4.00 分) 下列对二次函数 $y=x^2-x$ 的图象的描述, 正确的是 ()

A. 开口向下 B. 对称轴是 y 轴

C. 经过原点 D. 在对称轴右侧部分是下降的

【分析】A、由 $a=1>0$, 可得出抛物线开口向上, 选项 A 不正确;

B、根据二次函数的性质可得出抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$, 选项 B 不正确;

C、代入 $x=0$ 求出 y 值, 由此可得出抛物线经过原点, 选项 C 正确;

D、由 $a=1>0$ 及抛物线对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$, 利用二次函数的性质, 可得出当 $x>\frac{1}{2}$ 时, y 随 x 值的增大而增大, 选项 D 不正确.

综上所述可得出结论.

【解答】解: A、 $\because a=1>0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 选项 A 不正确;

B、 $\because -\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$, 选项 B 不正确;

C、当 $x=0$ 时, $y=x^2-x=0$,

$\therefore$ 抛物线经过原点, 选项 C 正确;

D、 $\because a>0$, 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, y 随 x 值的增大而增大, 选项 D 不正确.

故选: C.

4. (4.00 分) 据统计, 某住宅楼 30 户居民五月份最后一周每天实行垃圾分类的户数依次是: 27, 30, 29, 25, 26, 28, 29, 那么这组数据的中位数和众数分别是 ()

A. 25 和 30 B. 25 和 29 C. 28 和 30 D. 28 和 29

【分析】根据中位数和众数的概念解答.

【解答】解：对这组数据重新排列顺序得，25，26，27，28，29，29，30，
处于最中间是数是28，
 $\therefore$ 这组数据的中位数是28，
在这组数据中，29出现的次数最多，
 $\therefore$ 这组数据的众数是29，
故选：D.

5. (4.00分) 已知平行四边形ABCD，下列条件中，不能判定这个平行四边形为矩形的是（ ）

A. $\angle A = \angle B$ B. $\angle A = \angle C$ C. $AC = BD$ D. $AB \perp BC$

【分析】由矩形的判定方法即可得出答案.

【解答】解：A、 $\angle A = \angle B$ ， $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，所以 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，可以判定这个平行四边形为矩形，正确；

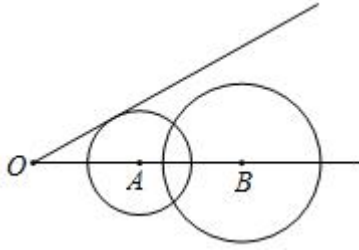
B、 $\angle A = \angle C$ 不能判定这个平行四边形为矩形，错误；

C、 $AC = BD$ ，对角线相等，可推出平行四边形ABCD是矩形，故正确；

D、 $AB \perp BC$ ，所以 $\angle B = 90^\circ$ ，可以判定这个平行四边形为矩形，正确；

故选：B.

6. (4.00分) 如图，已知 $\angle POQ = 30^\circ$ ，点A、B在射线OQ上（点A在点O、B之间），半径长为2的 $\odot A$ 与直线OP相切，半径长为3的 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交，那么OB的取值范围是（ ）



A. $5 < OB < 9$ B. $4 < OB < 9$ C. $3 < OB < 7$ D. $2 < OB < 7$

【分析】作半径 AD ，根据直角三角形 30° 度角的性质得： $OA=4$ ，再确认 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相切时， OB 的长，可得结论.

【解答】解：设 $\odot A$ 与直线 OP 相切时切点为 D ，连接 AD ，

$\therefore AD \perp OP$ ，

$\because \angle O = 30^\circ$ ， $AD=2$ ，

$\therefore OA=4$ ，

当 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相内切时，设切点为 C ，如图 1，

$\because BC=3$ ，

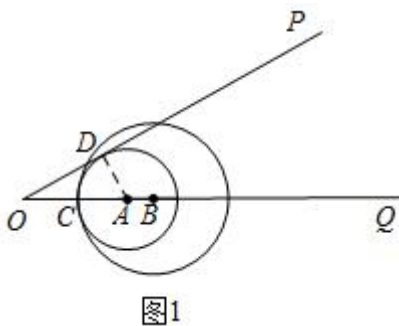
$\therefore OB=OA+AB=4+3-2=5$ ；

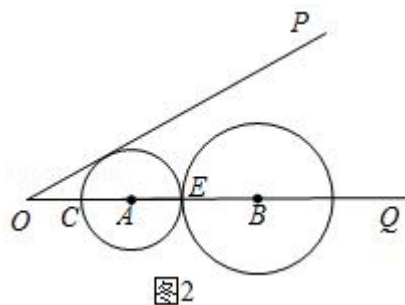
当 $\odot A$ 与 $\odot B$ 相外切时，设切点为 E ，如图 2，

$\therefore OB=OA+AB=4+2+3=9$ ，

$\therefore$ 半径长为 3 的 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交，那么 OB 的取值范围是： $5 < OB < 9$ ，

故选： A.





二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4.00 分) -8 的立方根是 -2 .

【分析】利用立方根的定义即可求解.

【解答】解： $\because (-2)^3 = -8$,

$\therefore -8$ 的立方根是 -2 .

故答案为： -2 .

8. (4.00 分) 计算： $(a+1)^2 - a^2 =$ $2a+1$.

【分析】原式利用完全平方公式化简，合并即可得到结果.

【解答】解：原式 $= a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$,

故答案为： $2a+1$

9. (4.00 分) 方程组 $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y=2 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1 \end{cases}$.

【分析】方程组中的两个方程相加，即可得出一个一元二次方程，求出方程的解，再代入求出 y 即可.

【解答】解： $\begin{cases} x-y=0 \text{ ①} \\ x^2+y=2 \text{ ②} \end{cases}$

②+①得： $x^2+x=2$,

解得： $x=-2$ 或 1 ,

把 $x = -2$ 代入①得: $y = -2$,

把 $x = 1$ 代入①得: $y = 1$,

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

10. (4.00 分) 某商品原价为 a 元, 如果按原价的八折销售, 那么售价是 0.8a 元. (用含字母 a 的代数式表示).

【分析】根据实际售价 = 原价 $\times \frac{\text{折扣}}{10}$ 即可得.

【解答】解: 根据题意知售价为 $0.8a$ 元,

故答案为: $0.8a$.

11. (4.00 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ (k 是常数, $k \neq 1$) 的图象有一支在第二象限, 那么 k 的取值范围是 $k < 1$.

【分析】由于在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象有一支在第二象限, 故 $k - 1 < 0$, 求出 k 的取值范围即可.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象有一支在第二象限,

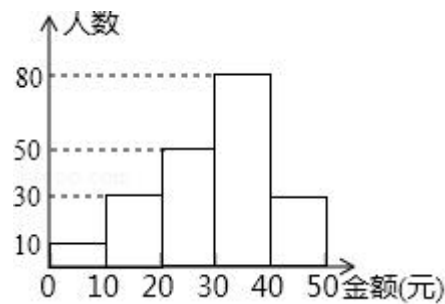
$\therefore k - 1 < 0$,

解得 $k < 1$.

故答案为: $k < 1$.

12. (4.00 分) 某校学生自主建立了一个学习用品义卖平台, 已知九年级 200 名学生义卖所得金额的频数分布直方图如图所示, 那么 20 - 30 元这个小组的组频

率是 0.25 .



【分析】 根据“频率=频数÷总数”即可得.

【解答】 解: 20 - 30 元这个小组的组频率是 $50 \div 200 = 0.25$,

故答案为: 0.25.

13. (4.00 分) 从 $\frac{2}{7}$, π , $\sqrt{3}$ 这三个数中选一个数, 选出的这个数是无理数的概率为 $\frac{2}{3}$.

【分析】 由题意可得共有 3 种等可能的结果, 其中无理数有 π 、 $\sqrt{3}$ 共 2 种情况, 则可利用概率公式求解.

【解答】 解: $\because$ 在 $\frac{2}{7}$, π , $\sqrt{3}$ 这三个数中, 无理数有 π , $\sqrt{3}$ 这 2 个,

$\therefore$ 选出的这个数是无理数的概率为 $\frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

14. (4.00 分) 如果一次函数 $y=kx+3$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 0)$, 那么 y 的值随 x 的增大而 减小. (填“增大”或“减小”)

【分析】 根据点的坐标利用一次函数图象上点的坐标特征可求出 k 值, 再利用一次函数的性质即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 一次函数 $y=kx+3$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 0)$,

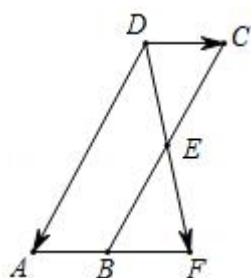
$\therefore 0 = k + 3$,

$$\therefore k = -3,$$

$\therefore y$ 的值随 x 的增大而减小.

故答案为：减小.

15. (4.00 分) 如图，已知平行四边形 $ABCD$ ， E 是边 BC 的中点，联结 DE 并延长，与 AB 的延长线交于点 F 。设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ 那么向量 $\overrightarrow{DF}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 。



【分析】 根据平行四边形的判定与性质得到四边形 $DBFC$ 是平行四边形，则 $DC = BF$ ，故 $AF = 2AB = 2DC$ ，结合三角形法则进行解答.

【解答】 解：如图，连接 BD ， FC ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DC \parallel AB$ ， $DC = AB$.

$\therefore \triangle DCE \sim \triangle FBE$.

又 E 是边 BC 的中点，

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{EC}{EB} = 1,$$

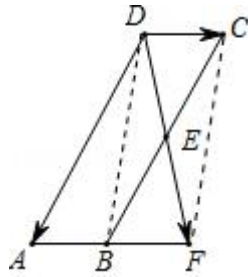
$\therefore EC = BE$ ，即点 E 是 DF 的中点，

$\therefore$ 四边形 $DBFC$ 是平行四边形，

$\therefore DC = BF$ ，故 $AF = 2AB = 2DC$ ，

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

故答案是: $\vec{a}+2\vec{b}$.



16. (4.00 分) 通过画出多边形的对角线, 可以把多边形内角和问题转化为三角形内角和问题. 如果从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条, 那么该多边形的内角和是 540 度.

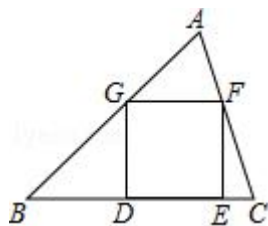
【分析】利根据题意得到 2 条对角线将多边形分割为 3 个三角形, 然后根据三角形内角和可计算出该多边形的内角和.

【解答】解: 从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条, 则将多边形分割为 3 个三角形.

所以该多边形的内角和是 $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

故答案为 540.

17. (4.00 分) 如图, 已知正方形 DEFG 的顶点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 G、F 分别在边 AB、AC 上. 如果 $BC=4$, $\triangle ABC$ 的面积是 6, 那么这个正方形的边长是 $\frac{12}{7}$.



【分析】作 $AH \perp BC$ 于 H, 交 GF 于 M, 如图, 先利用三角形面积公式计算出

$AH=3$ ，设正方形 $DEFG$ 的边长为 x ，则 $GF=x$ ， $MH=x$ ， $AM=3-x$ ，再证明 $\triangle AGF \sim \triangle ABC$ ，则根据相似三角形的性质得 $\frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}$ ，然后解关于 x 的方程即可。

【解答】解：作 $AH \perp BC$ 于 H ，交 GF 于 M ，如图，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积是 6，

$$\therefore \frac{1}{2}BC \cdot AH = 6,$$

$$\therefore AH = \frac{2 \times 6}{4} = 3,$$

设正方形 $DEFG$ 的边长为 x ，则 $GF=x$ ， $MH=x$ ， $AM=3-x$ ，

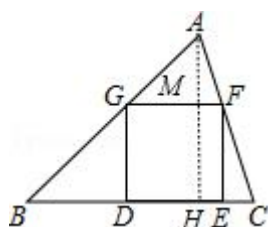
$\therefore GF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{GF}{BC} = \frac{AM}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{12}{7},$$

即正方形 $DEFG$ 的边长为 $\frac{12}{7}$ 。

故答案为 $\frac{12}{7}$ 。



18. (4.00 分) 对于一个位置确定的图形，如果它的所有点都在一个水平放置的矩形内部或边上，且该图形与矩形的每条边都至少有一个公共点（如图 1），那么这个矩形水平方向的边长称为该图形的宽，铅锤方向的边长称为该矩形的高。如图 2，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，边 AB 水平放置。如果该菱形的高是宽的 $\frac{2}{3}$ ，那么它的宽的值是 $\frac{18}{13}$ 。

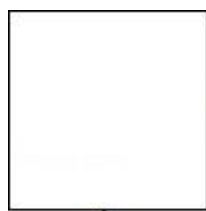


图1

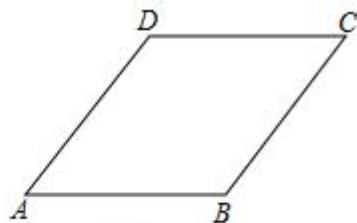


图2

【分析】先根据要求画图，设矩形的宽 $AF=x$ ，则 $CF=\frac{2}{3}x$ ，根据勾股定理列方程可得结论.

【解答】解：在菱形上建立如图所示的矩形 $EAFC$ ，

设 $AF=x$ ，则 $CF=\frac{2}{3}x$ ，

在 $Rt\triangle CBF$ 中， $CB=1$ ， $BF=x-1$ ，

由勾股定理得： $BC^2=BF^2+CF^2$ ，

$$1^2=(x-1)^2+(\frac{2}{3}x)^2,$$

解得： $x=\frac{18}{13}$ 或 0 (舍)，

即它的宽的值是 $\frac{18}{13}$ ，

故答案为： $\frac{18}{13}$.

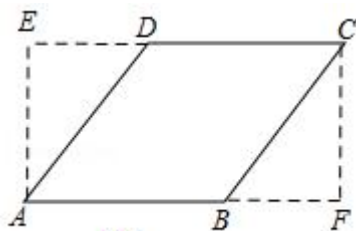
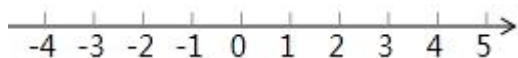


图2

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10.00 分) 解不等式组： $\begin{cases} 2x+1 > x \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \end{cases}$ ，并把解集在数轴上表示出来.



【分析】先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分就是不

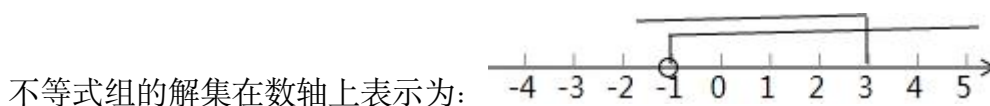
等式组的解集.

【解答】解:
$$\begin{cases} 2x+1 > x & \textcircled{1} \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

解不等式①得: $x > -1$,

解不等式②得: $x \leq 3$,

则不等式组的解集是: $-1 < x \leq 3$,



20. (10.00 分) 先化简, 再求值: $(\frac{2a}{a^2-1} - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a+2}{a^2-a}$, 其中 $a=\sqrt{5}$.

【分析】先根据分式混合运算顺序和运算法则化简原式, 再将 a 的值代入计算可得.

【解答】解: 原式 $= [\frac{2a}{(a+1)(a-1)} - \frac{a-1}{(a+1)(a-1)}] \div \frac{a+2}{a(a-1)}$
 $= \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{a+2}$
 $= \frac{a}{a+2},$

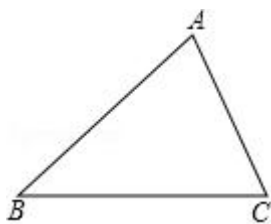
当 $a=\sqrt{5}$ 时,

原式 $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = 5 - 2\sqrt{5}.$

21. (10.00 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=5$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$.

(1) 求边 AC 的长;

(2) 设边 BC 的垂直平分线与边 AB 的交点为 D , 求 $\frac{AD}{DB}$ 的值.



【分析】(1) 过 A 作 $AE \perp BC$ ，在直角三角形 ABE 中，利用锐角三角函数定义求出 AC 的长即可；

(2) 由 DF 垂直平分 BC，求出 BF 的长，利用锐角三角函数定义求出 DF 的长，利用勾股定理求出 BD 的长，进而求出 AD 的长，即可求出所求。

【解答】解：(1) 作 A 作 $AE \perp BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $\tan \angle ABC = \frac{AE}{BE} = \frac{3}{4}$ ， $AB=5$ ，

$$\therefore AE=3, BE=4,$$

$$\therefore CE=BC - BE=5 - 4=1,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中，根据勾股定理得： $AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ ；

(2) $\because$ DF 垂直平分 BC，

$$\therefore BD=CD, BF=CF=\frac{5}{2},$$

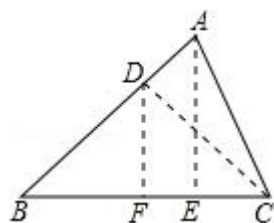
$$\therefore \tan \angle DBF = \frac{DF}{BF} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore DF=\frac{15}{8},$$

在 $\text{Rt}\triangle BFD$ 中，根据勾股定理得： $BD=\sqrt{(\frac{5}{2})^2+(\frac{15}{8})^2}=\frac{25}{8},$

$$\therefore AD=5 - \frac{25}{8}=\frac{15}{8},$$

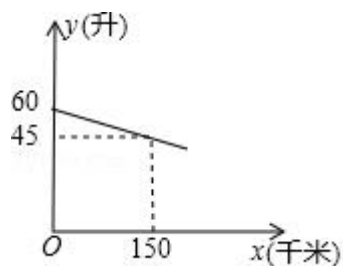
$$\text{则 } \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}.$$



22. (10.00 分) 一辆汽车在某次行驶过程中，油箱中的剩余油量 y (升) 与行驶路程 x (千米) 之间是一次函数关系，其部分图象如图所示。

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式；(不需要写定义域)

(2) 已知当油箱中的剩余油量为 8 升时，该汽车会开始提示加油，在此次行驶过程中，行驶了 500 千米时，司机发现离前方最近的加油站有 30 千米的路程，在开往该加油站的途中，汽车开始提示加油，这时离加油站的路程是多少千米？



【分析】根据函数图象中点的坐标利用待定系数法求出一次函数解析式，再根据一次函数图象上点的坐标特征即可求出剩余油量为 5 升时行驶的路程，此题得解.

【解答】解：(1) 设该一次函数解析式为 $y=kx+b$,

将 $(150, 45)$ 、 $(0, 60)$ 代入 $y=kx+b$ 中,

$$\begin{cases} 150k+b=45 \\ b=60 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-\frac{1}{10}, \\ b=60 \end{cases}$$

$\therefore$ 该一次函数解析式为 $y=-\frac{1}{10}x+60$.

(2) 当 $y=-\frac{1}{10}x+60=8$ 时,

解得 $x=520$.

即行驶 520 千米时，油箱中的剩余油量为 8 升.

$530-520=10$ 千米,

油箱中的剩余油量为 8 升时，距离加油站 10 千米.

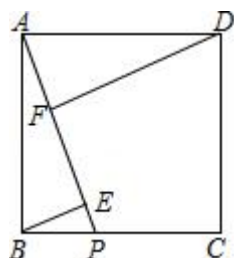
$\therefore$ 在开往该加油站的途中，汽车开始提示加油，这时离加油站的路程是 10 千米.

23. (12.00 分) 已知：如图，正方形 $ABCD$ 中， P 是边 BC 上一点， $BE \perp AP$,

$DF \perp AP$ ，垂足分别是点 E、F.

(1) 求证: $EF=AE - BE$;

(2) 联结 BF, 如课 $\frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD}$. 求证: $EF=EP$.



【分析】 (1) 利用正方形的性质得 $AB=AD$, $\angle BAD=90^\circ$, 根据等角的余角相等得到 $\angle 1=\angle 3$, 则可判断 $\triangle ABE \cong \triangle DAF$, 则 $BE=AF$, 然后利用等线段代换可得到结论;

(2) 利用 $\frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD}$ 和 $AF=BE$ 得到 $\frac{BE}{BF} = \frac{DF}{AD}$, 则可判定 $\text{Rt}\triangle BEF \sim \text{Rt}\triangle DFA$, 所以 $\angle 4=\angle 3$, 再证明 $\angle 4=\angle 5$, 然后根据等腰三角形的性质可判断 $EF=EP$.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 ABCD 为正方形,

$$\therefore AB=AD, \angle BAD=90^\circ,$$

$$\because BE \perp AP, DF \perp AP,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中

$$\begin{cases} \angle BEA = \angle AFD \\ \angle 1 = \angle 3 \\ AB = DA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF,$$

$$\therefore BE = AF,$$

$$\therefore EF = AE - AF = AE - BE;$$

$$(2) \text{ 如图, } \therefore \frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD},$$

$$\text{而 } AF = BE,$$

$$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{DF}{AD},$$

$$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{BF}{AD},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BEF \sim \text{Rt}\triangle DFA,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3,$$

$$\text{而 } \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 1,$$

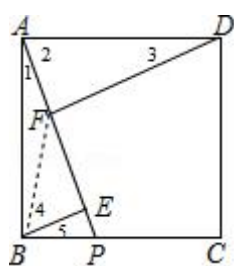
$$\therefore \angle 5 = \angle 1,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5,$$

$$\text{即 } BE \text{ 平分 } \angle FBP,$$

$$\text{而 } BE \perp EP,$$

$$\therefore EF = EP.$$

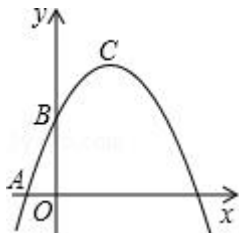


24. (12.00 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图). 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(0, \frac{5}{2})$, 顶点为 C , 点 D 在其对称轴上且位于点 C 下方, 将线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° , 点 C 落在抛物线上的点 P 处.

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 求线段 CD 的长;

(3) 将抛物线平移, 使其顶点 C 移到原点 O 的位置, 这时点 P 落在点 E 的位置, 如果点 M 在 y 轴上, 且以 O、D、E、M 为顶点的四边形面积为 8, 求点 M 的坐标.



【分析】(1) 利用待定系数法求抛物线解析式;

(2) 利用配方法得到 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}$, 则根据二次函数的性质得到 C 点坐标和抛物线的对称轴为直线 $x=2$, 如图, 设 $CD=t$, 则 $D(2, \frac{9}{2}-t)$, 根据旋转性质得 $\angle PDC=90^\circ$, $DP=DC=t$, 则 $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$, 然后把 $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$ 得到关于 t 的方程, 从而解方程可得到 CD 的长;

(3) P 点坐标为 $(4, \frac{9}{2})$, D 点坐标为 $(2, \frac{5}{2})$, 利用抛物线的平移规律确定 E 点坐标为 $(2, -2)$, 设 $M(0, m)$, 当 $m > 0$ 时, 利用梯形面积公式得到 $\frac{1}{2} \cdot (m + \frac{5}{2} + 2) \cdot 2 = 8$ 当 $m < 0$ 时, 利用梯形面积公式得到 $\frac{1}{2} \cdot (-m + \frac{5}{2} + 2) \cdot 2 = 8$, 然后分别解方程求出 m 即可得到对应的 M 点坐标.

【解答】解: (1) 把 $A(-1, 0)$ 和点 $B(0, \frac{5}{2})$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} -\frac{1}{2} - b + c = 0 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$;

$$(2) \because y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2},$$

$\therefore C(2, \frac{9}{2})$, 抛物线的对称轴为直线 $x=2$,

如图，设 $CD=t$ ，则 $D(2, \frac{9}{2}-t)$ ，

$\therefore$ 线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° ，点 C 落在抛物线上的点 P 处，

$\therefore \angle PDC=90^\circ$ ， $DP=DC=t$ ，

$\therefore P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ ，

把 $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$ 得 $-\frac{1}{2}(2+t)^2+2(2+t)+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}-t$ ，

整理得 $t^2-2t=0$ ，解得 $t_1=0$ （舍去）， $t_2=2$ ，

$\therefore$ 线段 CD 的长为 2；

(3) P 点坐标为 $(4, \frac{9}{2})$ ， D 点坐标为 $(2, \frac{5}{2})$ ，

$\therefore$ 抛物线平移，使其顶点 $C(2, \frac{9}{2})$ 移到原点 O 的位置，

$\therefore$ 抛物线向左平移 2 个单位，向下平移 $\frac{9}{2}$ 个单位，

而 P 点 $(4, \frac{9}{2})$ 向左平移 2 个单位，向下平移 $\frac{9}{2}$ 个单位得到点 E ，

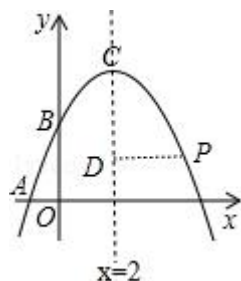
$\therefore E$ 点坐标为 $(2, -2)$ ，

设 $M(0, m)$ ，

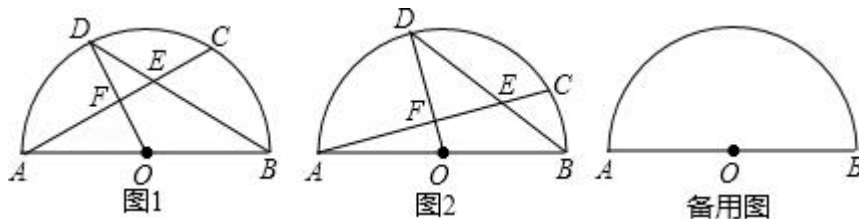
当 $m>0$ 时， $\frac{1}{2} \cdot (m+\frac{5}{2}+2) \cdot 2=8$ ，解得 $m=\frac{7}{2}$ ，此时 M 点坐标为 $(0, \frac{7}{2})$ ；

当 $m<0$ 时， $\frac{1}{2} \cdot (-m+\frac{5}{2}+2) \cdot 2=8$ ，解得 $m=-\frac{7}{2}$ ，此时 M 点坐标为 $(0, -\frac{7}{2})$ ；

综上所述， M 点的坐标为 $(0, \frac{7}{2})$ 或 $(0, -\frac{7}{2})$ 。



25. (14.00 分) 已知 $\odot O$ 的直径 $AB=2$ ，弦 AC 与弦 BD 交于点 E ，且 $OD \perp AC$ ，垂足为点 F 。



- (1) 如图 1, 如果 $AC=BD$, 求弦 AC 的长;
- (2) 如图 2, 如果 E 为弦 BD 的中点, 求 $\angle ABD$ 的余切值;
- (3) 联结 BC 、 CD 、 DA , 如果 BC 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边, CD 是 $\odot O$ 的内接正 $(n+4)$ 边形的一边, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【分析】 (1) 由 $AC=BD$ 知 $\widehat{AD}+\widehat{CD}=\widehat{CD}+\widehat{BC}$, 得 $\widehat{AD}=\widehat{BC}$, 根据 $OD \perp AC$ 知 $\widehat{AD}=\widehat{CD}$, 从而得 $\widehat{AD}=\widehat{CD}=\widehat{BC}$, 即可知 $\angle AOD=\angle DOC=\angle BOC=60^\circ$, 利用 $AF=AO\sin \angle AOF$ 可得答案;

(2) 连接 BC , 设 $OF=t$, 证 OF 为 $\triangle ABC$ 中位线及 $\triangle DEF \cong \triangle BEC$ 得 $BC=DF=2t$, 由 $DF=1-t$ 可得 $t=\frac{1}{3}$, 即可知 $BC=DF=\frac{2}{3}$, 继而求得 $EF=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}}{3}$, 由余切函数定义可得答案;

(3) 先求出 BC 、 CD 、 AD 所对圆心角度数, 从而求得 $BC=AD=\sqrt{2}$ 、 $OF=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 从而根据三角形面积公式计算可得.

【解答】 解: (1) $\because OD \perp AC$,

$$\therefore \widehat{AD}=\widehat{CD}, \quad \angle AFO=90^\circ,$$

又 $\because AC=BD$,

$$\therefore \widehat{AC}=\widehat{BD}, \quad \text{即 } \widehat{AD}+\widehat{CD}=\widehat{CD}+\widehat{BC},$$

$$\therefore \widehat{AD}=\widehat{BC},$$

$$\therefore \widehat{AD}=\widehat{CD}=\widehat{BC},$$

$$\therefore \angle AOD=\angle DOC=\angle BOC=60^\circ,$$

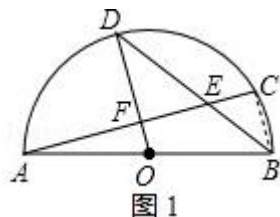
$$\therefore AB=2,$$

$$\therefore AO=BO=1,$$

$$\therefore AF=AO\sin\angle AOF=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{则 } AC=2AF=\sqrt{3};$$

(2) 如图 1, 连接 BC,



$$\because AB \text{ 为直径, } OD \perp AC,$$

$$\therefore \angle AFO = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle D = \angle EBC,$$

$$\because DE = BE, \angle DEF = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle BEC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BC = DF, EC = EF,$$

$$\text{又 } \because AO = OB,$$

$$\therefore OF \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线},$$

$$\text{设 } OF = t, \text{ 则 } BC = DF = 2t,$$

$$\because DF = DO - OF = 1 - t,$$

$$\therefore 1 - t = 2t,$$

$$\text{解得: } t = \frac{1}{3},$$

$$\text{则 } DF = BC = \frac{2}{3}, AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle D,$$

$$\text{则 } \cot \angle ABD = \cot \angle D = \frac{DF}{EF} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{2};$$

(3) 如图 2,

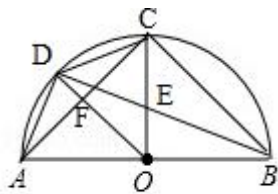


图 2

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边, CD 是 $\odot O$ 的内接正 $(n+4)$ 边形的一边,

$$\therefore \angle BOC = \frac{360}{n}, \angle AOD = \angle COD = \frac{360}{n+4},$$

$$\text{则 } \frac{360}{n} + 2 \times \frac{360}{n+4} = 180,$$

解得: $n=4$,

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ, \angle AOD = \angle COD = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = AC = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle AFO = 90^\circ,$$

$$\therefore OF = AO \cos \angle AOF = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{则 } DF = OD - OF = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$