

2018 年上海市奉贤区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

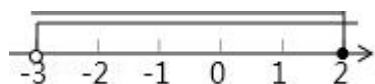
1. (4 分) 下列二次根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{a^2}$ B. $\sqrt{2a}$ C. $\sqrt{4a}$ D. $\sqrt{4+a}$

2. (4 分) 某班要推选学生参加学校的“诗词达人”比赛，有 7 名学生报名参加班级选拔赛，他们的选拔赛成绩各不相同，现取其中前 3 名参加学校比赛。小红要判断自己能否参加学校比赛，在知道自己成绩的情况下，还需要知道这 7 名学生成绩的（ ）

- A. 众数 B. 中位数 C. 平均数 D. 方差

3. (4 分) 下列四个不等式组中，其中一个不等式组的解集在数轴上的正确表示如图所示，这个不等式组是（ ）

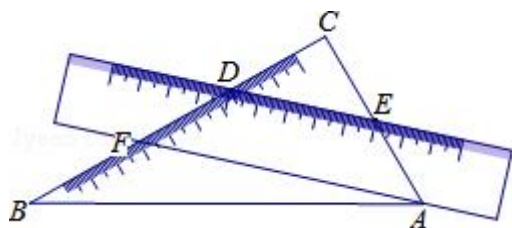


- A. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x \leq 2 \\ x < -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > -3 \end{cases}$

4. (4 分) 如果将直线 $l_1: y=2x-2$ 平移后得到直线 $l_2: y=2x$ ，那么下列平移过程正确的是（ ）

- A. 将 l_1 向左平移 2 个单位 B. 将 l_1 向右平移 2 个单位
C. 将 l_1 向上平移 2 个单位 D. 将 l_1 向下平移 2 个单位

5. (4 分) 将一把直尺和一块含 30° 和 60° 角的三角板 ABC 按如图所示的位置放置，如果 $\angle CDE=40^\circ$ ，那么 $\angle BAF$ 的大小为（ ）

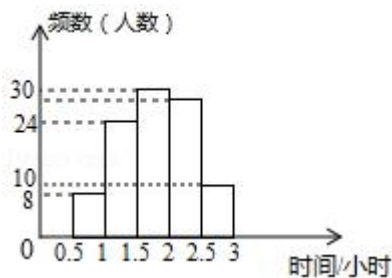


- A. 10° B. 15° C. 20° D. 25°

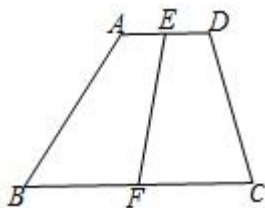
6. (4分) 直线 AB 、 CD 相交于点 O ，射线 OM 平分 $\angle AOD$ ，点 P 在射线 OM 上 (点 P 与点 O 不重合)，如果以点 P 为圆心的圆与直线 AB 相离，那么圆 P 与直线 CD 的位置关系是 ()
- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

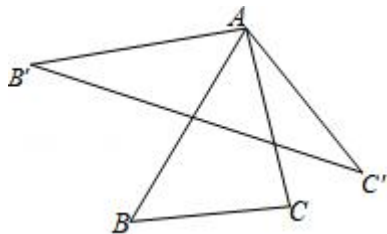
7. (4分) 计算: $\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} =$ _____.
8. (4分) 如果 $a^2 - b^2 = 8$ ，且 $a + b = 4$ ，那么 $a - b$ 的值是_____.
9. (4分) 方程 $\sqrt{2x-4} = 2$ 的根是_____.
10. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，在其图象所在的每个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，那么它的图象所在的象限是第_____象限.
11. (4分) 如果将抛物线 $y = 2x^2$ 平移，使平移后的抛物线顶点坐标为 $(1, 2)$ ，那么所得新抛物线的表达式是_____.
12. (4分) 将 6 本相同厚度的书叠起来，它们的高度是 9 厘米. 如果将这样相同厚度的书叠起来的高度是 42 厘米，那么这些书有_____本.
13. (4分) 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这八个数中，任意抽取一个数，这个数恰好是合数的概率是_____.
14. (4分) 某校为了了解学生双休日参加社会实践活动的情况，随机抽取了 100 名学生进行调查，并绘成如图所示的频数分布直方图. 已知该校共有 1000 名学生，据此估计，该校双休日参加社会实践活动时间在 2 ~ 2.5 小时之间的学生数大约是全体学生数的_____ (填百分数).



15. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC=2AD$, E 、 F 分别是边 AD 、 BC 的中点, 设 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EF}$ 等于_____ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示).



16. (4分) 如果一个矩形的面积是 40, 两条对角线夹角的正切值是 $\frac{4}{3}$, 那么它的一条对角线长是_____.
17. (4分) 已知正方形 $ABCD$, $AB=1$, 分别以点 A 、 C 为圆心画圆, 如果点 B 在圆 A 外, 且圆 A 与圆 C 外切, 那么圆 C 的半径长 r 的取值范围是_____.
18. (4分) 如图, 将 $\triangle ABC$ 的边 AB 绕着点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 AB' , 边 AC 绕着点 A 逆时针旋转 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 得到 AC' , 联结 $B'C'$. 当 $\alpha+\beta=90^\circ$ 时, 我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“双旋三角形”. 如果等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a , 那么它的“双旋三角形”的面积是_____ (用含 a 的代数式表示).



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 8\frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{3})^{-1}$.

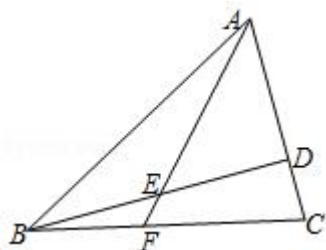
20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$$

21. (10 分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=13$, $AC=8$, $\cos \angle BAC = \frac{5}{13}$, $BD \perp AC$, 垂足为点 D , E 是 BD 的中点, 联结 AE 并延长, 交边 BC 于点 F .

$\perp AC$, 垂足为点 D , E 是 BD 的中点, 联结 AE 并延长, 交边 BC 于点 F .

(1) 求 $\angle EAD$ 的余切值;

(2) 求 $\frac{BF}{CF}$ 的值.



22. (10 分) 某学校要印刷一批艺术节的宣传资料, 在需要支付制版费 100 元

和每份资料 0.3 元印刷费的前提下, 甲、乙两个印刷厂分别提出了不同的优

惠条件. 甲印刷厂提出: 所有资料的印刷费可按 9 折收费; 乙印刷厂提出:

凡印刷数量超过 200 份的, 超过部分的印刷费可按 8 折收费.

(1) 设该学校需要印刷艺术节的宣传资料 x 份, 支付甲印刷厂的费用为 y 元,

写出 y 关于 x 的函数关系式, 并写出它的定义域;

(2) 如果该学校需要印刷艺术节的宣传资料 600 份, 那么应该选择哪家印刷厂

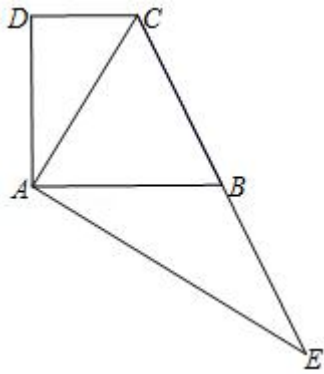
比较优惠?

23. (12 分) 已知: 如图, 梯形 $ABCD$, $DC \parallel AB$, 对角线 AC 平分 $\angle BCD$, 点

E 在边 CB 的延长线上, $EA \perp AC$, 垂足为点 A .

(1) 求证: B 是 EC 的中点;

(2) 分别延长 CD 、 EA 相交于点 F , 若 $AC^2 = DC \cdot EC$, 求证: $AD: AF = AC: FC$.



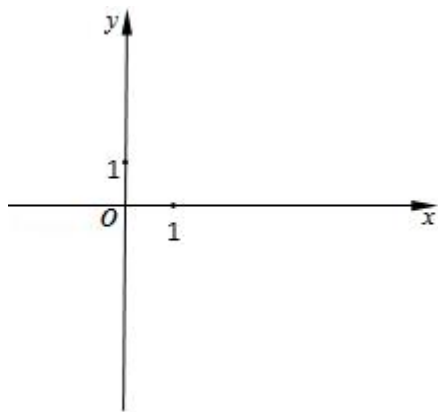
24. (12 分) 平面直角坐标系 xOy (如图), 抛物线 $y = -x^2 + 2mx + 3m^2$ ($m > 0$) 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 对称轴为直线 l , 过点 C 作直线 l 的垂线, 垂足为点 E , 联结 DC 、 BC .

(1) 当点 C $(0, 3)$ 时,

①求这条抛物线的表达式和顶点坐标;

②求证: $\angle DCE = \angle BCE$;

(2) 当 CB 平分 $\angle DCO$ 时, 求 m 的值.



25. (14 分) 已知: 如图, 在半径为 2 的扇形 AOB 中, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 C 在半径 OB 上, AC 的垂直平分线交 OA 于点 D , 交弧 AB 于点 E , 联结 BE 、 CD .

(1) 若 C 是半径 OB 中点, 求 $\angle OCD$ 的正弦值;

(2) 若 E 是弧 AB 的中点, 求证: $BE^2 = BO \cdot BC$;

(3) 联结 CE , 当 $\triangle DCE$ 是以 CD 为腰的等腰三角形时, 求 CD 的长.

2018 年上海市奉贤区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列二次根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{a^2}$ B. $\sqrt{2a}$ C. $\sqrt{4a}$ D. $\sqrt{4+a}$

【考点】73：二次根式的性质与化简；77：同类二次根式.

【专题】17：推理填空题.

【分析】根据二次根式的性质把各个二次根式化简，根据同类二次根式的定义判断即可.

【解答】解：A、 $\sqrt{a^2}=|a|$ 与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{2a}$ 与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式；

D、 $\sqrt{4+a}$ 与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式；

故选：C.

【点评】本题考查的是同类二次根式的定义，一般地，把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式.

2. (4 分) 某班要推选学生参加学校的“诗词达人”比赛，有 7 名学生报名参加班级选拔赛，他们的选拔赛成绩各不相同，现取其中前 3 名参加学校比赛. 小红要判断自己能否参加学校比赛，在知道自己成绩的情况下，还需要知道这 7 名学生成绩的（ ）

- A. 众数 B. 中位数 C. 平均数 D. 方差

【考点】WA：统计量的选择.

【专题】1：常规题型；542：统计的应用.

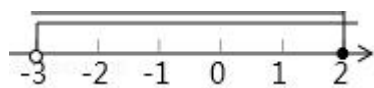
【分析】由于总共有7个人，且他们的成绩互不相同，第4的成绩是中位数，要判断自己能否参加学校比赛，只需知道中位数即可.

【解答】解：由于总共有7个人，且他们的成绩互不相同，第4的成绩是中位数，要判断自己能否参加学校比赛，故应知道中位数的多少.

故选：B.

【点评】本题主要考查统计的有关知识，掌握平均数、中位数、众数、方差的意义是解题的关键.

3. (4分) 下列四个不等式组中，其中一个不等式组的解集在数轴上的正确表示如图所示，这个不等式组是 ()



A. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x \leq 2 \\ x < -3 \end{cases}$

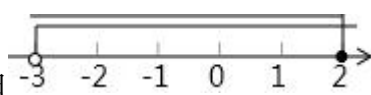
C. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > -3 \end{cases}$

【考点】C4：在数轴上表示不等式的解集.

【专题】524：一元一次不等式(组)及应用.

【分析】根据不等式组的表示方法，可得答案.

【解答】解：由 ，得

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 2 \end{cases},$$

故选：D.

【点评】本题考查了在数轴上表示不等式的解集，利用不等式组的解集的表示方法：大小小大中间找是解题关键.

4. (4分) 如果将直线 $l_1: y=2x-2$ 平移后得到直线 $l_2: y=2x$ ，那么下列平移过程正确的是 ()

A. 将 l_1 向左平移2个单位

B. 将 l_1 向右平移2个单位

C. 将 l_1 向上平移 2 个单位

D. 将 l_1 向下平移 2 个单位

【考点】F9: 一次函数图象与几何变换.

【专题】53: 函数及其图象.

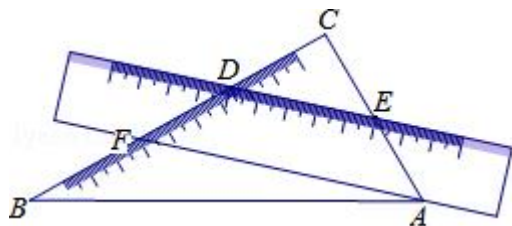
【分析】根据“上加下减”的原则求解即可.

【解答】解: 将函数 $y=2x-2$ 的图象向上平移 2 个单位长度, 所得图象对应的函数解析式是 $y=2x$.

故选: C.

【点评】本题考查的是一次函数的图象与几何变换, 熟知函数图象变换的法则是解答此题的关键.

5. (4 分) 将一把直尺和一块含 30° 和 60° 角的三角板 ABC 按如图所示的位置放置, 如果 $\angle CDE=40^\circ$, 那么 $\angle BAF$ 的大小为 ()



A. 10°

B. 15°

C. 20°

D. 25°

【考点】JA: 平行线的性质.

【专题】1: 常规题型; 551: 线段、角、相交线与平行线.

【分析】由 $DE \parallel AF$ 得 $\angle AFD = \angle CDE = 40^\circ$, 再根据三角形的外角性质可得答案.

【解答】解: 由题意知 $DE \parallel AF$,

$$\therefore \angle AFD = \angle CDE = 40^\circ,$$

$$\because \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AFD - \angle B = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ,$$

故选: A.

【点评】 本题主要考查平行线的性质，解题的关键是掌握两直线平行同位角相等与三角形外角的性质.

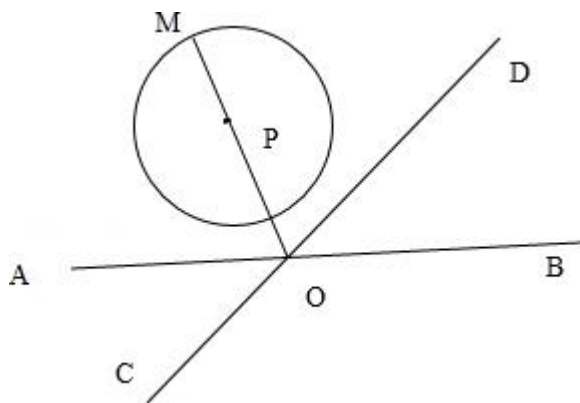
6. (4分) 直线 AB 、 CD 相交于点 O ，射线 OM 平分 $\angle AOD$ ，点 P 在射线 OM 上 (点 P 与点 O 不重合)，如果以点 P 为圆心的圆与直线 AB 相离，那么圆 P 与直线 CD 的位置关系是 ()
- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定

【考点】 MB: 直线与圆的位置关系.

【专题】 55: 几何图形.

【分析】 根据角平分线的性质和点与直线的位置关系解答即可.

【解答】 解： 如图所示；



$\because OM$ 平分 $\angle AOD$ ，以点 P 为圆心的圆与直线 AB 相离，

$\therefore$ 以点 P 为圆心的圆与直线 CD 相离，

故选：A.

【点评】 此题考查直线与圆的位置关系，关键是根据角平分线的性质解答.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4分) 计算： $\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}$.

【考点】 6B: 分式的加减法.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 首先通分，然后再根据同分母分式加减法法则：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减. 进行计算即可.

【解答】 解：原式 $= \frac{2}{2a} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}$,

故答案为： $\frac{1}{2a}$.

【点评】 此题主要考查了分式的加减，关键是掌握分式加减的计算法则.

8. (4分) 如果 $a^2 - b^2 = 8$ ，且 $a+b=4$ ，那么 $a-b$ 的值是 2.

【考点】 4F：平方差公式.

【专题】 1：常规题型.

【分析】 根据 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，可得 $(a+b)(a-b) = 8$ ，再代入 $a+b=4$ 可得答案.

【解答】 解： $\because a^2 - b^2 = 8$,

$\therefore (a+b)(a-b) = 8$,

$\because a+b=4$,

$\therefore a-b=2$,

故答案为： 2.

【点评】 此题主要考查了平方差，关键是掌握 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

9. (4分) 方程 $\sqrt{2x-4}=2$ 的根是 4.

【考点】 AG：无理方程.

【专题】 1：常规题型； 52：方程与不等式.

【分析】 把无理方程转化为整式方程即可解决问题.

【解答】 解：两边平方得到： $2x - 4 = 4$,

解得 $x=4$,

经检验： $x=4$ 是原方程的解，

故答案为 4.

【点评】 本题考查无理方程，解题的关键是学会用转化的思想思考问题，注意必须检验.

10. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，在其图象所在的每个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，那么它的图象所在的象限是第 一、三 象限.

【考点】 G4: 反比例函数的性质.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 直接利用反比例函数的增减性进而得出图象的分布.

【解答】 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，在其图象所在的每个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，

$\therefore$ 它的图象所在的象限是第一、三象限.

故答案为: 一、三.

【点评】 此题主要考查了反比例的性质，正确掌握反比例函数图象的分布规律是解题关键.

11. (4 分) 如果将抛物线 $y = 2x^2$ 平移，使平移后的抛物线顶点坐标为 $(1, 2)$ ，那么所得新抛物线的表达式是 $y = 2(x - 1)^2 + 2$.

【考点】 H3: 二次函数的性质; H6: 二次函数图象与几何变换; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【专题】 55: 几何图形.

【分析】 平移不改变抛物线的开口方向与开口大小，即解析式的二次项系数不变，根据抛物线的顶点式可求抛物线解析式

【解答】 解: $\because$ 原抛物线解析式为 $y = 2x^2$ ，的顶点坐标是 $(0, 0)$ ，平移后抛物线顶点坐标为 $(1, 2)$ ，

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式为: $y = 2(x - 1)^2 + 2$.

故答案为: $y = 2(x - 1)^2 + 2$.

【点评】 本题考查了抛物线的平移与解析式变化的关系. 关键是明确抛物线的平移实质上是顶点的平移, 能用顶点式表示平移后的抛物线解析式.

12. (4 分) 将 6 本相同厚度的书叠起来, 它们的高度是 9 厘米. 如果将这样相同厚度的书叠起来的高度是 42 厘米, 那么这些书有 28 本.

【考点】 S1: 比例的性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 因为一本书的厚度是一定的, 根据本数与书的高度成正比例列比例式即可得到结论.

【解答】 解: 设这些书有 x 本,

由题意得, $\frac{6}{9} = \frac{x}{42}$,

解得: $x=28$,

答: 这些书有 28 本.

故答案为: 28.

【点评】 本题考查了比例的性质, 正确的列出比例式是解题的关键.

13. (4 分) 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这八个数中, 任意抽取一个数, 这个数恰好是合数的概率是 $\frac{3}{8}$.

【考点】 X4: 概率公式.

【专题】 1: 常规题型; 543: 概率及其应用.

【分析】 根据合数定义, 让合数的个数除以数的总数即为所求的概率.

【解答】 解: $\because$ 在 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这八个数中, 合数有 4、6、8 这 3 个,

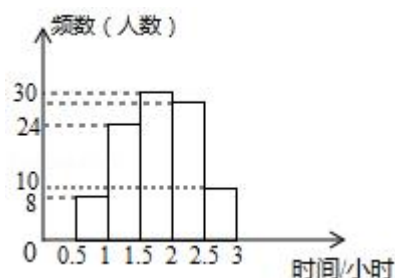
$\therefore$ 这个数恰好是合数的概率是 $\frac{3}{8}$,

故答案为: $\frac{3}{8}$.

【点评】 本题考查的是概率的求法. 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的

可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ ；找到合数的个数是解题的关键.

14. (4 分) 某校为了了解学生双休日参加社会实践活动的情况，随机抽取了 100 名学生进行调查，并绘成如图所示的频数分布直方图. 已知该校共有 1000 名学生，据此估计，该校双休日参加社会实践活动时间在 2 ~ 2.5 小时之间的学生数大约是全体学生数的 28% (填百分数).



【考点】 V8: 频数 (率) 分布直方图.

【专题】 1: 常规题型; 542: 统计的应用.

【分析】 用被抽查的 100 名学生中参加社会实践活动时间在 2 ~ 2.5 小时之间的学生除以抽查的学生总人数，即可得解.

【解答】 解：由频数分布直方图知，2 ~ 2.5 小时的人数为 $100 - (8+24+30+10) = 28$,

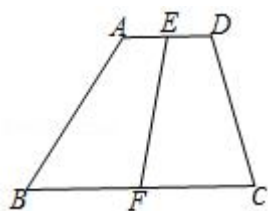
则该校双休日参加社会实践活动时间在 2 ~ 2.5 小时之间的学生数大约是全体学生数的百分比为 $\frac{28}{100} \times 100\% = 28\%$,

故答案为：28%.

【点评】 本题考查了频数分布直方图以及用样本估计总体，利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题. 一般来说，用样本去估计总体时，样本越具有代表性、容量越大，这时对总体的估计也就越精确.

15. (4 分) 如图，在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，E、F 分别是边 AD、

BC 的中点, 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EF}$ 等于 $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示).

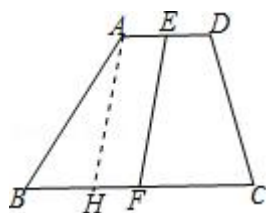


【考点】LH: 梯形; LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】作 $AH \parallel EF$ 交 BC 于 H , 首先证明 $SBX EFHA$ 是平行四边形, 再利用三角形法则计算即可;

【解答】解: 作 $AH \parallel EF$ 交 BC 于 H ,



$\therefore AE \parallel FH$,

$\therefore$ 四边形 $EFHA$ 是平行四边形,

$\therefore AE = HF$, $AH = EF$,

$\therefore AE = ED = \frac{1}{2}\vec{a}$,

$\therefore \overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}\vec{a}$,

$\therefore BC = 2AD$,

$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\vec{a}$,

$\therefore BF = FC$,

$\therefore \overrightarrow{BF} = \vec{a}$,

$\therefore \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\vec{a}$,

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为 $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

【点评】 本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握三角形法则，属于中考常考题型.

16. (4 分) 如果一个矩形的面积是 40，两条对角线夹角的正切值是 $\frac{4}{3}$ ，那么它的一条对角线长是 10.

【考点】 LB: 矩形的性质; T7: 解直角三角形.

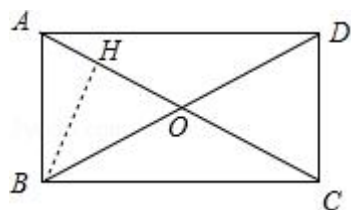
【专题】 556: 矩形 菱形 正方形.

【分析】 如图，作 $BH \perp AC$ 于 H. 由四边形 ABCD 是矩形，推出 $OA = OC = OD = OB$,

设 $OA = OC = OD = OB = 5a$ ，由 $\tan \angle BOH = \frac{4}{3} = \frac{BH}{OH}$ ，可得 $BH = 4a$ ， $OH = 3a$ ，由

题意： $2 \times \frac{1}{2} \times 10a \times 4a = 40$ ，求出 a 即可解决问题；

【解答】 解：如图，作 $BH \perp AC$ 于 H.



$\therefore$ 四边形 ABCD 是矩形，

$\therefore OA = OC = OD = OB$ ，设 $OA = OC = OD = OB = 5a$ ，

$\therefore \tan \angle BOH = \frac{4}{3} = \frac{BH}{OH}$ ，

$\therefore BH = 4a$ ， $OH = 3a$ ，

由题意： $2 \times \frac{1}{2} \times 10a \times 4a = 40$ ，

$\therefore a = 1$ ，

$\therefore AC = 10$ ，

故答案为 10.

【点评】 本题考查矩形的性质、解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题.

17. (4分) 已知正方形 $ABCD$ ， $AB=1$ ，分别以点 A 、 C 为圆心画圆，如果点 B 在圆 A 外，且圆 A 与圆 C 外切，那么圆 C 的半径长 r 的取值范围是 $\sqrt{2}-1 < r < \sqrt{2}$.

【考点】 LE: 正方形的性质; M8: 点与圆的位置关系; MJ: 圆与圆的位置关系.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 首先根据题意求得对角线 AC 的长，设圆 A 的半径为 R ，根据点 B 在圆 A 外，得出 $0 < R < 1$ ，则 $-1 < -R < 0$ ，再根据圆 A 与圆 C 外切可得 $R+r=\sqrt{2}$ ，利用不等式的性质即可求出 r 的取值范围.

【解答】 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ，

$$\therefore AC=\sqrt{2},$$

设圆 A 的半径为 R ，

$\because$ 点 B 在圆 A 外，

$$\therefore 0 < R < 1,$$

$$\therefore -1 < -R < 0,$$

$$\therefore \sqrt{2}-1 < \sqrt{2}-R < \sqrt{2}.$$

$\because$ 以 A 、 C 为圆心的两圆外切，

$$\therefore \text{两圆的半径的和为}\sqrt{2},$$

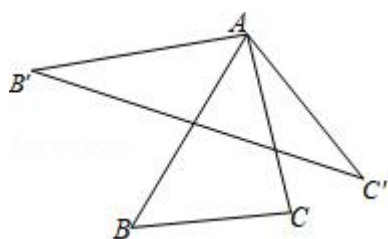
$$\therefore R+r=\sqrt{2}, \quad r=\sqrt{2}-R,$$

$$\therefore \sqrt{2}-1 < r < \sqrt{2}.$$

故答案为: $\sqrt{2}-1 < r < \sqrt{2}$.

【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系，点与圆的位置关系，正方形的性质，勾股定理，不等式的性质．掌握位置关系与数量之间的关系是解题的关键．

18. (4 分) 如图，将 $\triangle ABC$ 的边 AB 绕着点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 AB' ，边 AC 绕着点 A 逆时针旋转 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 得到 AC' ，联结 $B'C'$ ．当 $\alpha + \beta = 90^\circ$ 时，我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“双旋三角形”．如果等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a ，那么它的“双旋三角形”的面积是 $\frac{1}{4}a^2$ (用含 a 的代数式表示)．



【考点】 KK：等边三角形的性质； R2：旋转的性质．

【专题】 1：常规题型．

【分析】 首先根据等边三角形、“双旋三角形”的定义得出 $\triangle AB'C'$ 是顶角为 150° 的等腰三角形，其中 $AB' = AC' = a$ ．过 C' 作 $C'D \perp AB'$ 于 D ，根据 30° 角所对的直角边等于斜边的一半得出 $C'D = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}a$ ，然后根据 $S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{2}AB' \cdot C'D$ 即可求解．

【解答】 解： $\because$ 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a ，

$$\therefore AB = AC = a, \quad \angle BAC = 60^\circ.$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 的边 AB 绕着点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 AB' ，

$$\therefore AB' = AB = a, \quad \angle B'AB = \alpha,$$

$\because$ 边 AC 绕着点 A 逆时针旋转 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 得到 AC' ，

$$\therefore AC' = AC = a, \quad \angle CAC' = \beta,$$

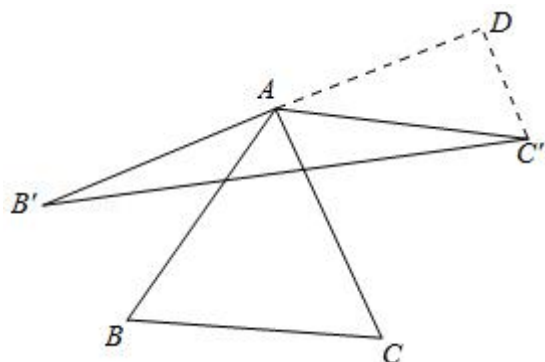
$$\therefore \angle B'AC' = \angle B'AB + \angle BAC + \angle CAC' = \alpha + 60^\circ + \beta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$

如图，过 C' 作 $C'D \perp AB'$ 于 D ，则 $\angle D = 90^\circ$ ， $\angle DAC' = 30^\circ$ ，

$$\therefore C'D = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{2}AB' \cdot C'D = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2.$$

故答案为 $\frac{1}{4}a^2$.



【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了含 30° 角的直角三角形的性质，等边三角形的性质以及三角形的面积．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 8^{\frac{1}{2}} - (\frac{\sqrt{3}}{3})^{-1}$.

【考点】 2C：实数的运算；2F：分数指数幂；6F：负整数指数幂．

【专题】 1：常规题型．

【分析】 直接利用负指数幂的性质和二次根式的性质以及分数指数幂的性质分别化简得出答案．

【解答】 解：原式 $= 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
 $= 3 - \sqrt{2}$.

【点评】 此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键．

20. (10 分) 解方程组：
$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$$

【考点】 AF：高次方程．

【专题】 52：方程与不等式．

【分析】由方程②得出 $x+y=1$ ，或 $x+y=-1$ ，进而解答即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} 2x+y=2 \text{ ①} \\ x^2+2xy+y^2=1 \text{ ②} \end{cases}$$

由②可得： $x+y=1$ ，或 $x+y=-1$ ，

所以可得方程组 $\begin{cases} 2x+y=2 \text{ ①} \\ x+y=1 \text{ ③} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x+y=2 \text{ ①} \\ x+y=-1 \text{ ④} \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-4 \end{cases}$ ；

所以方程组的解为： $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-4 \end{cases}$ 。

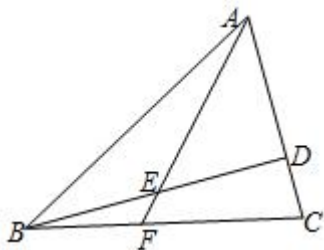
【点评】此题考查高次方程问题，关键是根据完全平方公式进行消元解答.

21. (10 分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=13$ ， $AC=8$ ， $\cos \angle BAC = \frac{5}{13}$ ， BD

$\perp AC$ ，垂足为点 D ， E 是 BD 的中点，联结 AE 并延长，交边 BC 于点 F .

(1) 求 $\angle EAD$ 的余切值；

(2) 求 $\frac{BF}{CF}$ 的值.



【考点】T7：解直角三角形.

【专题】55E：解直角三角形及其应用.

【分析】(1) 先根据三角函数值求 AD 的长，由勾股定理得 BD 的长，根据三角函数定义可得结论；

(2) 作平行线，构建平行线分线段成比例定理可设 $CD=3x$ ， $AD=5x$ ，分别表示 BF 和 FC 的长，代入可得结论.

【解答】解：(1) $\because BD \perp AC$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\text{Rt}\triangle ADB \text{ 中, } AB=13, \cos \angle BAC = \frac{5}{13},$$

$$\therefore AD=5,$$

$$\text{由勾股定理得: } BD=12,$$

$$\therefore E \text{ 是 } BD \text{ 的中点,}$$

$$\therefore ED=6,$$

$$\therefore \angle EAD \text{ 的余切} = \frac{AD}{ED} = \frac{5}{6};$$

$$(2) \text{ 过 } D \text{ 作 } DG \parallel AF \text{ 交 } BC \text{ 于 } G,$$

$$\therefore AC=8, AD=5,$$

$$\therefore CD=3,$$

$$\therefore DG \parallel AF,$$

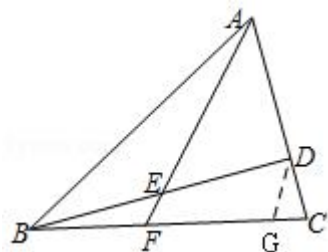
$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{CG}{FG} = \frac{3}{5},$$

$$\text{设 } CD=3x, AD=5x,$$

$$\therefore EF \parallel DG, BE=ED,$$

$$\therefore BF=FG=5x,$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}.$$



【点评】 本题是考查了解直角三角形的问题，熟练掌握三角函数的定义，在直角三角形中，根据三角函数的定义列式，如果没有直角三角形，或将角转化到直角三角形内，或作垂线构建直角三角形.

22. (10 分) 某学校要印刷一批艺术节的宣传资料, 在需要支付制版费 100 元和每份资料 0.3 元印刷费的前提下, 甲、乙两个印刷厂分别提出了不同的优惠条件. 甲印刷厂提出: 所有资料的印刷费可按 9 折收费; 乙印刷厂提出: 凡印刷数量超过 200 份的, 超过部分的印刷费可按 8 折收费.

(1) 设该学校需要印刷艺术节的宣传资料 x 份, 支付甲印刷厂的费用为 y 元, 写出 y 关于 x 的函数关系式, 并写出它的定义域;

(2) 如果该学校需要印刷艺术节的宣传资料 600 份, 那么应该选择哪家印刷厂比较优惠?

【考点】 FH: 一次函数的应用.

【专题】 12: 应用题.

【分析】 (1) 根据题意直接写出两厂印刷厂的收费 $y_{\text{甲}}$ (元) 关于印刷数量 x (份) 之间的函数关系式;

(2) 分别将两厂的印刷费用等于 2000 元, 分别解得两厂印刷的份数即可.

【解答】 解: (1) 根据题意可知:

甲印刷厂的收费 $y_{\text{甲}} = 0.3x \times 0.9 + 100 = 0.27x + 100$,

y 关于 x 的函数关系式是 $y_{\text{甲}} = 0.27x + 100$ ($x > 0$);

(2) 由题意可得,

该学校需要印刷艺术节的宣传资料 600 份,

在甲印刷厂需要花费: $0.27 \times 600 + 100 = 262$ (元),

在乙印刷厂需要花费: $100 + 200 \times 0.3 + 0.3 \times 0.8 \times (600 - 200) = 256$ (元),

$\therefore 256 < 262$,

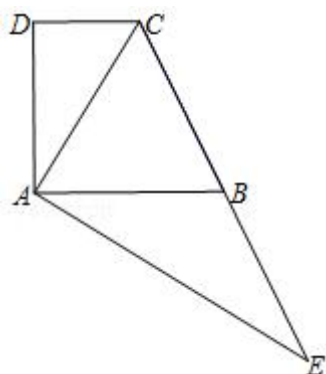
$\therefore$ 如果该学校需要印刷艺术节的宣传资料 600 份, 那么应该选择乙家印刷厂比较优惠.

【点评】 本题主要考查了一次函数的实际应用，解答一次函数的应用问题中，要注意自变量的取值范围还必须使实际问题有意义，属于中档题.

23. (12 分) 已知：如图，梯形 $ABCD$ ， $DC \parallel AB$ ，对角线 AC 平分 $\angle BCD$ ，点 E 在边 CB 的延长线上， $EA \perp AC$ ，垂足为点 A .

(1) 求证： B 是 EC 的中点；

(2) 分别延长 CD 、 EA 相交于点 F ，若 $AC^2 = DC \cdot EC$ ，求证： $AD : AF = AC : FC$.



【考点】 LH：梯形；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】 557：梯形；55D：图形的相似.

【分析】 (1) 根据平行线的性质结合角平分线的性质可得出 $\angle BCA = \angle BAC$ ，进而可得出 $BA = BC$ ，根据等角的余角相等结合三角形外角的性质，即可得出 $BE = BA$ ，进而可得出 $BE = BC$ ，此题得证；

(2) 根据 $AC^2 = DC \cdot EC$ 结合 $\angle ACD = \angle ECA$ 可得出 $\triangle ACD \sim \triangle ECA$ ，根据相似三角形的性质可得出 $\angle ADC = \angle EAC = 90^\circ$ ，进而可得出 $\angle FDA = \angle FAC = 90^\circ$ ，结合 $\angle AFD = \angle CFA$ 可得出 $\triangle AFD \sim \triangle CDA$ ，再利用相似三角形的性质可证出 $AD : AF = AC : FC$.

【解答】 证明：(1) $\because DC \parallel AB$,

$\therefore \angle DCA = \angle BAC$.

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$,

$$\therefore \angle BCA = \angle BAC = \angle DCA,$$

$$\therefore BA = BC.$$

$$\because \angle BAC + \angle BAE = 90^\circ, \quad \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle ABC.$$

$$\because \angle ABC = \angle BAE + \angle BEA,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore BE = BA = BC,$$

$\therefore B$ 是 EC 的中点;

$$(2) \because AC^2 = DC \cdot EC,$$

$$\therefore \frac{AC}{EC} = \frac{DC}{AC},$$

$$\because \angle ACD = \angle ECA,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ECA,$$

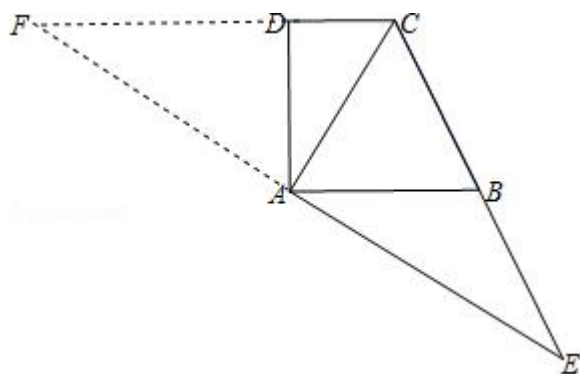
$$\therefore \angle ADC = \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FDA = \angle FAC = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle AFD = \angle CFA,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle CFA,$$

$$\therefore AD : AF = AC : FC.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、角平分线的性质、三角形外角的

性质以及等腰三角形的性质，解题的关键是：（1）利用等角对等边找出 $BA=BC$ 、 $BE=BA$ ；（2）利用相似三角形的判定定理找出 $\triangle AFD \sim \triangle CDA$.

24. (12 分) 平面直角坐标系 xOy (如图)，抛物线 $y = -x^2 + 2mx + 3m^2$ ($m > 0$)

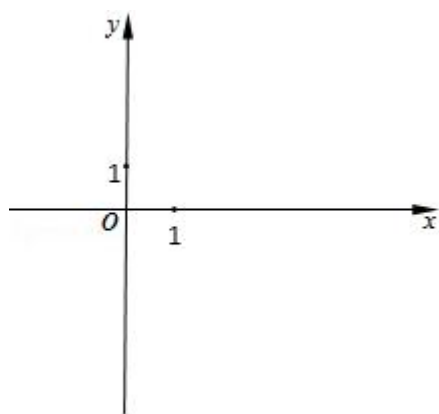
与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ，对称轴为直线 l ，过点 C 作直线 l 的垂线，垂足为点 E ，联结 DC 、 BC .

(1) 当点 C (0, 3) 时，

①求这条抛物线的表达式和顶点坐标；

②求证： $\angle DCE = \angle BCE$ ；

(2) 当 CB 平分 $\angle DCO$ 时，求 m 的值.



【考点】HF：二次函数综合题.

【专题】15：综合题.

【分析】(1) ①把 C 点坐标代入 $y = -x^2 + 2mx + 3m^2$ 可求出 m 的值，从而得到抛物线解析式，然后把一般式配成顶点式得到 D 点坐标；

②如图 1，先解方程 $-x^2 + 2x + 3 = 0$ 得 B (3, 0)，则可判断 $\triangle OCB$ 为等腰直角三角形得到 $\angle OBC = 45^\circ$ ，再证明 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形得到 $\angle DCE = 45^\circ$ ，从而得到 $\angle DCE = \angle BCE$ ；

(2) 抛物线的对称轴交 x 轴于 F 点，交直线 BC 于 G 点，如图 2，把一般式配

成顶点式得到抛物线的对称轴为直线 $x=m$ ，顶点 D 的坐标为 $(m, 4m^2)$ ，通过解方程 $-x^2+2mx+3m^2=0$ 得 B $(3m, 0)$ ，同时确定 C $(0, 3m^2)$ ，再利用相似比表示出 $GF=2m^2$ ，则 $DG=2m^2$ ，接着证明 $\angle DCG=\angle DGC$ 得到 $DC=DG$ ，所以 $m^2+(4m^2-3m^2)^2=4m^4$ ，然后解方程可求出 m 。

【解答】 (1) 解：①把 C $(0, 3)$ 代入 $y=-x^2+2mx+3m^2$ 得 $3m^2=3$ ，解得 $m_1=1$ ， $m_2=-1$ (舍去)，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+3$ ；

$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ ，

$\therefore$ 顶点 D 为 $(1, 4)$ ；

②证明：如图 1，当 $y=0$ 时， $-x^2+2x+3=0$ ，解得 $x_1=-1$ ， $x_2=3$ ，则 B $(3, 0)$ ，

$\therefore OC=OB$ ，

$\therefore \triangle OCB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle OBC=45^\circ$ ，

$\therefore CE \perp$ 直线 $x=1$ ，

$\therefore \angle BCE=45^\circ$ ，

$\therefore DE=1$ ， $CE=1$ ，

$\therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle DCE=45^\circ$ ，

$\therefore \angle DCE=\angle BCE$ ；

(2) 解：抛物线的对称轴交 x 轴于 F 点，交直线 BC 于 G 点，如图 2，

$y=-x^2+2mx+3m^2=-(x-m)^2+4m^2$ ，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=m$ ，顶点 D 的坐标为 $(m, 4m^2)$ ，

当 $y=0$ 时, $-x^2+2mx+3m^2=0$, 解得 $x_1=-m$, $x_2=3m$, 则 $B(3m, 0)$,

当 $x=0$ 时, $y=-x^2+2mx+3m^2=3m^2$, 则 $C(0, 3m^2)$,

$\therefore GF \parallel OC$,

$\therefore \frac{GF}{OC} = \frac{BF}{BO}$, 即 $\frac{GF}{3m^2} = \frac{2m}{3m}$, 解得 $GF=2m^2$,

$\therefore DG=4m^2-2m^2=2m^2$,

$\therefore CB$ 平分 $\angle DCO$,

$\therefore \angle DCB = \angle OCB$,

$\therefore \angle OCB = \angle DGC$,

$\therefore \angle DCG = \angle DGC$,

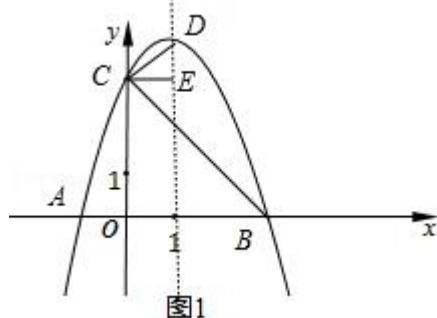
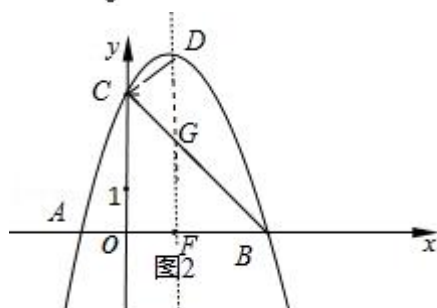
$\therefore DC=DG$,

即 $m^2 + (4m^2 - 3m^2)^2 = 4m^4$,

$\therefore m^2 = \frac{1}{3}$,

而 $m > 0$,

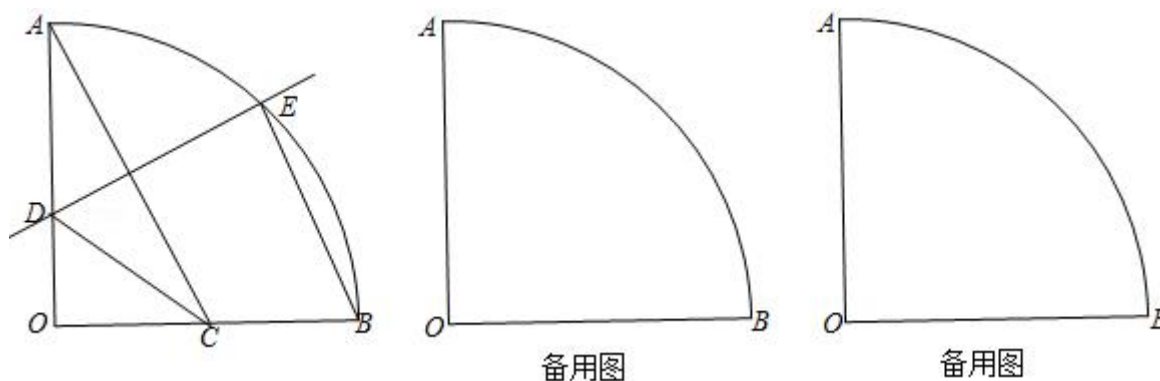
$\therefore m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和等腰三角形的性质；会利用待定系数法求函数解析式；灵活应用等腰直角三角形的性质进行几何计算；理解坐标与图形性质，记住两点间的距离公式.

25. (14 分) 已知：如图，在半径为 2 的扇形 AOB 中， $\angle AOB=90^\circ$ ，点 C 在半径 OB 上，AC 的垂直平分线交 OA 于点 D，交弧 AB 于点 E，联结 BE、CD.

- (1) 若 C 是半径 OB 中点，求 $\angle OCD$ 的正弦值；
- (2) 若 E 是弧 AB 的中点，求证： $BE^2=BO \cdot BC$ ；
- (3) 联结 CE，当 $\triangle DCE$ 是以 CD 为腰的等腰三角形时，求 CD 的长



【考点】MR：圆的综合题.

【专题】15：综合题.

【分析】(1) 先求出 $OC=\frac{1}{2}OB=1$ ，设 $OD=x$ ，得出 $CD=AD=OA-OD=2-x$ ，

根据勾股定理得， $(2-x)^2-x^2=1$ 求出 x ，即可得出结论；

(2) 先判断出 $\widehat{AE}=\widehat{BE}$ ，进而得出 $\angle CBE=\angle BCE$ ，再判断出 $\triangle OBE \sim \triangle EBC$ ，即可得出结论；

(3) 分两种情况：当 $CD=CE$ 时，判断出四边形 ADCE 是菱形，得出 $\angle OCE=90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle OCE$ 中， $OC^2=OE^2-CE^2=4-a^2$ ，在 $Rt\triangle COD$ 中， $OC^2=CD^2-OD^2=a^2$

- $(2-a)^2$ ，建立方程求解即可；

当 $CD=DE$ 时, 判断出 $\angle DAE=\angle DEA$, 再判断出 $\angle OAE=\angle OEA$, 进而得出 $\angle DEA=\angle OEA$, 即: 点 D 和点 O 重合, 即可得出结论.

【解答】 解: (1) $\because C$ 是半径 OB 中点,

$$\therefore OC=\frac{1}{2}OB=1,$$

$\because DE$ 是 AC 的垂直平分线,

$$\therefore AD=CD,$$

设 $OD=x$,

$$\therefore CD=AD=OA-OD=2-x,$$

在 $Rt\triangle OCD$ 中, 根据勾股定理得, $(2-x)^2-x^2=1$,

$$\therefore x=\frac{3}{4},$$

$$\therefore CD=\frac{5}{4},$$

$$\therefore \sin \angle OCD=\frac{OD}{CD}=\frac{3}{5};$$

(2) 如图 1,

连接 AE , CE , $\because DE$ 是 AC 垂直平分线,

$$\therefore AE=CE,$$

$\because E$ 是弧 AB 的中点,

$$\therefore \widehat{AE}=\widehat{BE},$$

$$\therefore AE=BE,$$

$$\therefore BE=CE,$$

$$\therefore \angle CBE=\angle BCE,$$

连接 OE ,

$$\therefore OE=OB,$$

$$\therefore \angle OBE=\angle OEB,$$

$$\therefore \angle CBE=\angle BCE=\angle OEB,$$

$$\therefore \triangle OBE \sim \triangle EBC,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{OB}{BE},$$

$$\therefore BE^2=BO \cdot BC,$$

(3) $\triangle DCE$ 是以 CD 为腰的等腰三角形,

当 $CD=CE$ 时, $\therefore DE$ 是 AC 的垂直平分线,

$$\therefore AD=CD, AE=CE,$$

$$\therefore AD=CD=CE=AE,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形,

$$\therefore CE \parallel AD,$$

$$\therefore \angle OCE=90^\circ,$$

设菱形的边长为 a ,

$$\therefore OC=OA-AD=2-a,$$

在 $Rt\triangle OCE$ 中, $OC^2=OE^2-CE^2=4-a^2$,

在 $Rt\triangle COD$ 中, $OC^2=CD^2-OD^2=a^2-(2-a)^2$,

$$\therefore 4-a^2=a^2-(2-a)^2,$$

$$\therefore a=-2\sqrt{3}-2 \text{ (舍) 或 } a=2\sqrt{3}-2;$$

$$\therefore CD=2\sqrt{3}-2;$$

当 $CD=DE$ 时,

$\therefore DE$ 是 AC 垂直平分线,

$\therefore AD=CD$,

$\therefore AD=DE$,

$\therefore \angle DAE = \angle DEA$,

连接 OE ,

$\therefore OA=OE$,

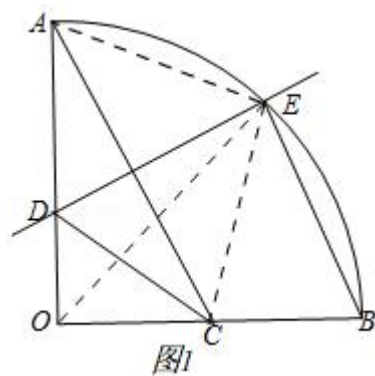
$\therefore \angle OAE = \angle OEA$,

$\therefore \angle DEA = \angle OEA$,

$\therefore$ 点 D 和点 O 重合, 此时, 点 C 和点 B 重合,

$\therefore CD=2$,

即: 当 $\triangle DCE$ 是以 CD 为腰的等腰三角形时, CD 的长为 2 或 $2\sqrt{3}-2$.



【点评】 此题是圆的综合题, 主要考查了勾股定理, 垂直平分线定理, 菱形的判定和性质, 锐角三角函数, 作出辅助线是解本题的关键.