

2018 年上海市静安区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 化简 $(-a^2) \cdot a^5$ 所得的结果是 ()

- A. a^7 B. $-a^7$ C. a^{10} D. $-a^{10}$

2. (4 分) 下列方程中，有实数根的是 ()

- A. $\sqrt{x-1}+1=0$ B. $x+\frac{1}{x}=1$ C. $2x^4+3=0$ D. $\frac{2}{x-1}=-1$

3. (4 分) 如图，比例规是一种画图工具，它由长度相等的两脚 AC 和 BD 交叉构成，利用它可以把线段按一定的比例伸长或缩短。如果把比例规的两脚合上，使螺丝钉固定在刻度 3 的地方（即同时使 $OA=3OC$ ， $OB=3OD$ ），然后张开两脚，使 A、B 两个尖端分别在线段 a 的两个端点上，当 $CD=1.8\text{cm}$ 时，则 AB 的长为 ()



- A. 7.2 cm B. 5.4 cm C. 3.6 cm D. 0.6 cm

4. (4 分) 下列判断错误的是 ()

- A. 如果 $k=0$ 或 $a=0$ ，那么 $ka=0$
- B. 设 m 为实数，则 $m(a+b)=ma+mb$
- C. 如果 $a \parallel e$ ，那么 $a=|a|e$
- D. 在平行四边形 ABCD 中， $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

5. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，如果 $\sin A=\frac{1}{3}$ ，那么 $\sin B$ 的值是 ()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. 3

6. (4分) 将抛物线 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 先向左平移 1 个单位, 再向上平移 4 个单位后, 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 重合, 现有一直线 $y_3 = 2x + 3$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 相交, 当 $y_2 \leq y_3$ 时, 利用图象写出此时 x 的取值范围是 ()
- A. $x \leq -1$ B. $x \geq 3$ C. $-1 \leq x \leq 3$ D. $x \geq 0$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

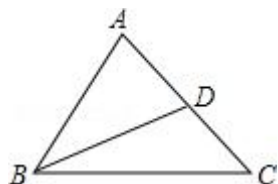
7. (4分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值是_____.
8. (4分) 已知线段 AB 长是 2 厘米, P 是线段 AB 上的一点, 且满足 $AP^2 = AB \cdot BP$, 那么 AP 长为_____厘米.
9. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长是 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{6}$ 、2, $\triangle DEF$ 的两边长分别是 1 和 $\sqrt{3}$, 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似, 那么 $\triangle DEF$ 的第三边长应该是_____.
10. (4分) 如果一个反比例函数图象与正比例函数 $y = 2x$ 图象有一个公共点 $A(1, a)$, 那么这个反比例函数的解析式是_____.
11. (4分) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$) 在对称轴左侧的部分是上升的, 那么 a _____ 0. (填“<”或“>”)
12. (4分) 将抛物线 $y = (x+m)^2$ 向右平移 2 个单位后, 对称轴是 y 轴, 那么 m 的值是_____.
13. (4分) 如图, 斜坡 AB 的坡度是 1: 4, 如果从点 B 测得离地面的铅垂线高度 BC 是 6 米, 那么斜坡 AB 的长度是_____米.



14. (4分) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 点 G 是重心, 联结 BG ,

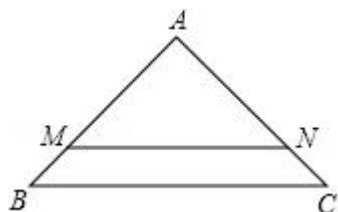
那么 $\angle CBG$ 的余切值是_____.

15. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, $\angle ABD = \angle C$, $AD = 9$, $DC = 7$, 那么 $AB =$ _____.

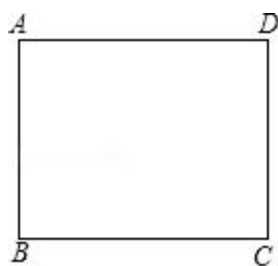


16. (4分) 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 点 E 和点 F 分别在两腰 AB 和 DC 上, 且 EF 是梯形的中位线, $AD = 3$, $BC = 4$. 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, 那么向量 $\overrightarrow{EF} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 表示)

17. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 6$, 直线 $MN \parallel BC$, 且分别交边 AB , AC 于点 M , N , 已知直线 MN 将 $\triangle ABC$ 分为面积相等的两部分. 如果将线段 AM 绕着点 A 旋转, 使点 M 落在边 BC 上的点 D 处, 那么 $BD =$ _____.



18. (4分) 如图, 矩形纸片 $ABCD$, $AD = 4$, $AB = 3$, 如果点 E 在边 BC 上, 将纸片沿 AE 折叠, 使点 B 落在点 F 处, 联结 FC , 当 $\triangle EFC$ 是直角三角形时, 那么 BE 的长为_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\frac{\sqrt{3}\cot 45^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{1}{2\cos 60^\circ + 1} - \tan 60^\circ \times \sin 60^\circ$.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=5 \textcircled{1} \\ (x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0 \textcircled{2} \end{cases}$$

21. (10 分) 已知: 二次函数图象的顶点坐标是 (3, 5), 且抛物线经过点 A (1, 3).

(1) 求此抛物线的表达式;

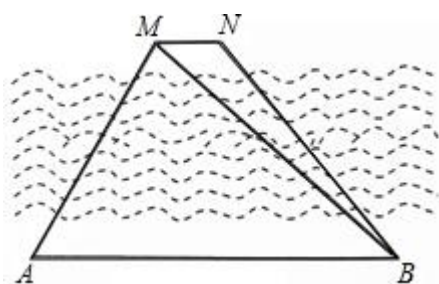
(2) 如果点 A 关于该抛物线对称轴的对称点是 B 点, 且抛物线与 y 轴的交点是 C 点, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

22. (10 分) 如图, 在一条河的北岸有两个目标 M、N, 现在位于它的对岸设定两个观测点 A、B. 已知 $AB \parallel MN$, 在 A 点测得 $\angle MAB = 60^\circ$, 在 B 点测得 $\angle MBA = 45^\circ$, $AB = 600$ 米.

(1) 求点 M 到 AB 的距离; (结果保留根号)

(2) 在 B 点又测得 $\angle NBA = 53^\circ$, 求 MN 的长. (结果精确到 1 米)

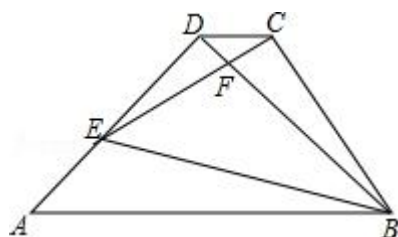
(参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sin 53^\circ \approx 0.8$, $\cos 53^\circ \approx 0.6$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$, $\cot 53^\circ \approx 0.75$)



23. (12 分) 已知: 如图, 梯形 ABCD 中, $DC \parallel AB$, $AD = BD$, $AD \perp DB$, 点 E 是腰 AD 上一点, 作 $\angle EBC = 45^\circ$, 联结 CE, 交 DB 于点 F.

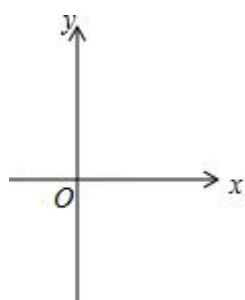
(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle DBC$;

- (2) 如果 $\frac{BC}{BD} = \frac{5}{6}$, 求 $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDA}}$ 的值.



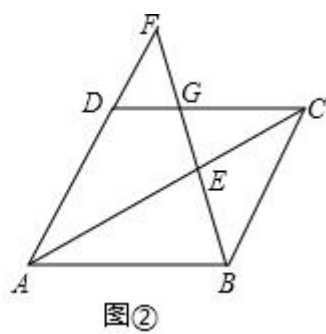
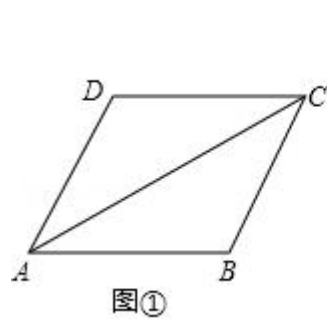
24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - \frac{5}{3}$, 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(5, 0)$.

- (1) 求此抛物线顶点 C 的坐标;
 (2) 联结 AC 交 y 轴于点 D , 联结 BD 、 BC , 过点 C 作 $CH \perp BD$, 垂足为点 H , 抛物线对称轴交 x 轴于 G , 联结 HG , 求 HG 的长.



25. (14 分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $0^\circ < \angle BAD \leq 90^\circ$, $AD = DC$, $AB = BC$, AC 平分 $\angle BAD$.

- (1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;
 (2) 如果点 E 在对角线 AC 上, 联结 BE 并延长, 交边 DC 于点 G , 交线段 AD 的延长线于点 F (点 F 可与点 D 重合), $\angle AFB = \angle ACB$, 设 AB 长度是 a (a 是常数, 且 $a > 0$), $AC = x$, $AF = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;
 (3) 在第 (2) 小题的条件下, 当 $\triangle CGE$ 是等腰三角形时, 求 AC 的长 (计算结果用含 a 的代数式表示)



2018 年上海市静安区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 化简 $(-a^2) \cdot a^5$ 所得的结果是 ()

- A. a^7 B. $-a^7$ C. a^{10} D. $-a^{10}$

【考点】46: 同底数幂的乘法.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据同底数幂的乘法计算即可.

【解答】解: $(-a^2) \cdot a^5 = -a^7$,

故选: B.

【点评】此题考查同底数幂的乘法, 关键是根据同底数幂的乘法的法则解答.

2. (4 分) 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $\sqrt{x-1}+1=0$ B. $x+\frac{1}{x}=1$ C. $2x^4+3=0$ D. $\frac{2}{x-1}=-1$

【考点】AF: 高次方程; AG: 无理方程; B2: 分式方程的解.

【专题】52: 方程与不等式.

【分析】A、移项根据二次根式的性质即可判断;

B、去分母后, 化为整式方程即可判断;

C、根据乘方的意义即可判断;

D、去分母化为整式方程即可判断;

【解答】解: A、由题意 $\sqrt{x-1} = -1 < 0$, 方程没有实数根;

B、去分母得到: $x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta < 0$, 没有实数根;

C、由题意 $x^4 = -\frac{3}{2} < 0$ ，没有实数根，

D、去分母得到： $x = -1$ ，有实数根，

故选：D.

【点评】 本题考查了无理方程，解题的关键要注意是否有实数根，有实数根时是否有意义，用到的知识点是根的判别式.

3. (4分) 如图，比例规是一种画图工具，它由长度相等的两脚 AC 和 BD 交叉构成，利用它可以把线段按一定的比例伸长或缩短. 如果把比例规的两脚合上，使螺丝钉固定在刻度 3 的地方（即同时使 $OA=3OC$ ， $OB=3OD$ ），然后张开两脚，使 A，B 两个尖端分别在线段 a 的两个端点上，当 $CD=1.8\text{cm}$ 时，则 AB 的长为（ ）



A. 7.2 cm

B. 5.4 cm

C. 3.6 cm

D. 0.6 cm

【考点】 SA：相似三角形的应用.

【分析】 首先根据题意利用两组对边的比相等且夹角相等的三角形是相似三角形判定相似，然后利用相似三角形的性质求解.

【解答】 解： $\because OA=3OC$ ， $OB=3OD$ ，

$$\therefore OA:OC=OB:OD=3:1, \angle AOB=\angle DOC,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{1},$$

$$\therefore AB=3CD=3 \times 1.8=5.4 \text{ (cm)}.$$

故选：B.

【点评】 本题考查的是相似三角形的应用，利用相似三角形的相似比，列出方程，通过解方程求解即可，体现了数形转化思想的应用.

4. (4分) 下列判断错误的是 ()

- A. 如果 $k=0$ 或 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, 那么 $k\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- B. 设 m 为实数, 则 $m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$
- C. 如果 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{e}$, 那么 $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{e}$
- D. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

【考点】 L5: 平行四边形的性质; LM: *平面向量.

【专题】 55: 几何图形.

【分析】 根据向量的性质进行逐一判定即可.

【解答】 解: A、如果 $k=0$ 或 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, 那么 $k\mathbf{a}=\mathbf{0}$, 正确;

B、设 m 为实数, 则 $m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$, 正确;

C、如果 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{e}$, 那么 $\mathbf{a}=\mathbf{e}$ 或 $\mathbf{a}+\mathbf{e}=\mathbf{0}$, 错误;

D、在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$, 正确;

故选: C.

【点评】 本题考查的是向量问题, 关键是了解即方向相同或相反的非零向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 叫做平行向量.

5. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 如果 $\sin A=\frac{1}{3}$, 那么 $\sin B$ 的值是 ()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- D. 3

【考点】 T4: 互余两角三角函数的关系.

【专题】 33: 函数思想.

【分析】 一个角的正弦值等于它的余角的余弦值.

【解答】 解: $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\sin A=\frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin B = \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故选：A.

【点评】此题考查的是互余两角三角函数的关系，属基础题，掌握正余弦的这一转换关系：一个角的正弦值等于它的余角的余弦值.

6. (4分) 将抛物线 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 先向左平移 1 个单位，再向上平移 4 个单位后，与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 重合，现有一直线 $y_3 = 2x + 3$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 相交，当 $y_2 \leq y_3$ 时，利用图象写出此时 x 的取值范围是 ()

A. $x \leq -1$ B. $x \geq 3$ C. $-1 \leq x \leq 3$ D. $x \geq 0$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换；HC：二次函数与不等式（组）.

【专题】31：数形结合.

【分析】先利用配方法得到抛物线 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 的顶点坐标为 $(1, -4)$ ，再利用抛物线的变换规律得到平移后的抛物线解析式为 $y = x^2$ ，然后解方程组 $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$ ，然后利用函数图象写出一函数图象在抛物线 $y = x^2$ 上方（含交点）所对应的自变量的范围即可.

【解答】解： $y_1 = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$ ，则它的顶点坐标为 $(1, -4)$ ，

所以抛物线 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 先向左平移 1 个单位，再向上平移 4 个单位后的解析式为 $y = x^2$ ，

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases},$$

所以当 $-1 \leq x \leq 3$.

故选：C.

【点评】 本题考查了二次函数与不等式（组）：对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a 、 b 、 c 是常数， $a \neq 0$) 与不等式的关系，利用两个函数图象在直角坐标系中的上下位置关系求自变量的取值范围，可作图利用交点直观求解，也可把两个函数解析式列成不等式求解。也考查了二次函数图象与几何变换。

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$ ，则 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值是 $\frac{1}{3}$ 。

【考点】 S1：比例的性质。

【分析】 根据等比性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ ，可得答案。

【解答】 解：由等比性质，得

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$ 。

【点评】 本题考查了比例的性质，利用等比性质是解题关键。

8. (4 分) 已知线段 AB 长是 2 厘米， P 是线段 AB 上的一点，且满足 $AP^2 = AB \cdot BP$ ，那么 AP 长为 $(\sqrt{5}-1)$ 厘米。

【考点】 S3：黄金分割。

【专题】 1：常规题型。

【分析】 根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段，得出 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，代入数据即可得出 AP 的长。

【解答】 解： $\because P$ 是线段 AB 上的一点，且满足 $AP^2 = AB \cdot BP$ ，

$\therefore P$ 为线段 AB 的黄金分割点，且 AP 是较长线段，

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (\sqrt{5}-1) \text{ 厘米}.$$

故答案为 $(\sqrt{5}-1)$ 。

【点评】 本题考查了黄金分割的概念：如果一个点把一条线段分成两条线段，并

且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项，那么就说这个点把这条线段黄金分割，这个点叫这条线段的黄金分割点；较长线段是整个线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍.

9. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长是 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{6}$ 、2， $\triangle DEF$ 的两边长分别是1和 $\sqrt{3}$ ，如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，那么 $\triangle DEF$ 的第三边长应该是 $\underline{\sqrt{2}}$.

【考点】S7：相似三角形的性质.

【专题】55D：图形的相似.

【分析】设第三边为 x ，根据相似三角形对应边成比例列式计算即可得解.

【解答】解：设第三边为 x ，

$$\therefore \sqrt{2} : \sqrt{6} = 1 : \sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{2} \text{ 与 } 1 \text{ 是对应边, } \sqrt{6} \text{ 与 } \sqrt{3} \text{ 是对应边,}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 与 } \triangle DEF \text{ 相似,}$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{2},$$

$$\text{即 } \triangle DEF \text{ 的第三边应该是 } \sqrt{2}.$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{2}.$$

【点评】本题考查对相似三角形性质的理解：(1) 相似三角形周长的比等于相似比；

(2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方；

(3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

10. (4 分) 如果一个反比例函数图象与正比例函数 $y=2x$ 图象有一个公共点 A (1, a)，那么这个反比例函数的解析式是 $\underline{y=\frac{2}{x}}$.

【考点】G8：反比例函数与一次函数的交点问题.

【专题】17：推理填空题.

【分析】根据题意可以求得点 A 的坐标，再将点 A 的坐标代入反比例函数解析式即可解答本题.

【解答】解：将 $x=1$ 代入 $y=2x$ ，得 $y=2$ ，

$\therefore$ 点 A (1, 2),

设反比例函数解析式为 $y=\frac{k}{x}$,

$\therefore$ 一个反比例函数图象与正比例函数 $y=2x$ 图象有一个公共点 A (1, 2),

$\therefore 2=\frac{k}{1}$.

解得， $k=2$ ，

即反比例函数解析式为 $y=\frac{2}{x}$ ，

故答案为： $y=\frac{2}{x}$.

【点评】本题考查反比例函数与一次函数的交点问题，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，求出相应的函数解析式.

11. (4 分) 如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$) 在对称轴左侧的部分是上升的，那么 a < 0. (填“<”或“>”)

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【专题】 17: 推理填空题; 535: 二次函数图象及其性质.

【分析】由抛物线在对称轴左侧的部分是上升的可得出抛物线开口向下，进而即可得出 $a < 0$ ，此题得解.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在对称轴左侧的部分是上升的，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore a < 0$.

故答案为： < .

【点评】本题考查了二次函数的性质，牢记二次函数的性质是解题的关键.

12. (4 分) 将抛物线 $y=(x+m)^2$ 向右平移 2 个单位后，对称轴是 y 轴，那么

m 的值是 2.

【考点】H3: 二次函数的性质; H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】33: 函数思想.

【分析】根据平移规律“左加右减, 上加下减”填空.

【解答】解: 将抛物线 $y = (x+m)^2$ 向右平移 2 个单位后, 得到抛物线解析式为

$$y = (x+m-2)^2. \text{ 其对称轴为: } x=2-m=0,$$

解得 $m=2$.

故答案是: 2.

【点评】主要考查的是函数图象的平移, 用平移规律“左加右减, 上加下减”直接代入函数解析式求得平移后的函数解析式.

13. (4 分) 如图, 斜坡 AB 的坡度是 1: 4, 如果从点 B 测得离地面的铅垂线高度 BC 是 6 米, 那么斜坡 AB 的长度是 $6\sqrt{17}$ 米.



【考点】T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【专题】1: 常规题型.

【分析】先利用坡度的定义, 求出水平宽度 AC 的长, 再利用勾股定理得出斜坡 AB 的长度.

【解答】解: $\because$ 斜坡 AB 的坡度 $i=1: 4$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{4},$$

$\therefore$ 从点 B 测得离地面的铅垂线高度 BC 是 6 米,

$$\therefore \frac{6}{AC} = \frac{1}{4},$$

解得：AC=24，

则斜坡 AB 的长为： $\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{24^2+6^2}=6\sqrt{17}$ （米）.

故答案为 $6\sqrt{17}$.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用－坡度坡角问题，勾股定理. 掌握坡度的定义是解题的关键. 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比，又叫做坡比，它是一个比值，反映了斜坡的陡峭程度，一般用 i 表示，常写成 $i=1:m$ 的形式.

14. (4 分) 在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=5$ ， $BC=8$ ，点 G 是重心，联结 BG ，那么 $\angle CBG$ 的余切值是 4.

【考点】 K5：三角形的重心；KH：等腰三角形的性质；T7：解直角三角形.

【专题】 55：几何图形.

【分析】 根据等腰三角形的中线、角平分线和垂线三线合一，利用勾股定理求出 AD 的长，再利用重心的性质即可求出 GA 的长，进而得出 DG 的长，利用勾股定理和三角函数解答即可.

【解答】 解：∵ $AB=AC=5$ ， $BC=8$ ，点 G 为重心，

$$\therefore AD \perp BC, \quad BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2} \times 8=4,$$

$$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{25-16}=3,$$

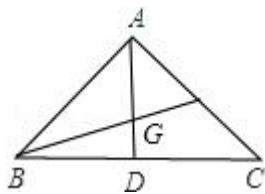
$$\therefore GA=2,$$

$$\therefore DG=1,$$

$$\therefore BG=\sqrt{BD^2+DG^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17},$$

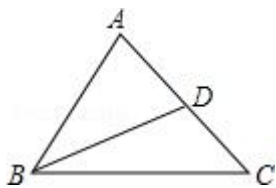
$$\therefore \angle CBG \text{ 的余切值} = \frac{BD}{DG} = \frac{4}{1} = 4,$$

故答案为：4



【点评】此题主要考查学生对三角形重心的理解和掌握，解答此题的关键是明确等腰三角形的中线、角平分线和垂线三线合一.

15. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, $\angle ABD = \angle C$, $AD = 9$, $DC = 7$, 那么 $AB = \underline{12}$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】55: 几何图形.

【分析】由 $\angle ABD = \angle C$ 、 $\angle BAD = \angle CAB$ 证 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, 得 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, 即

$AB^2 = AC \cdot AD$, 据此可得.

【解答】解: $\because \angle ABD = \angle C$ 、 $\angle BAD = \angle CAB$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, 即 $AB^2 = AC \cdot AD$,

$\because AD = 9$, $DC = 7$

$\therefore AC = 16$,

$\therefore AB = 12$,

故答案为: 12

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解本题的关键.

16. (4 分) 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 点 E 和点 F 分别在两腰 AB 和 DC 上,

且 EF 是梯形的中位线, $AD=3$, $BC=4$. 设 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, 那么向量 $\overrightarrow{EF}=\frac{7}{6}\vec{a}$. (用向量 $\vec{a}$ 表示)

【考点】LL: 梯形中位线定理; LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】利用梯形的中位线定理即可解决问题;

【解答】解: $\because$ EF 是梯形的中位线,

$$\therefore EF=\frac{1}{2}(AD+BC),$$

$$\because AD:BC=3:4, \overrightarrow{AD}=\vec{a},$$

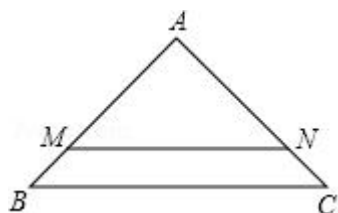
$$\therefore BC=\frac{4}{3}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{a})=\frac{7}{6}\vec{a}.$$

故答案为 $\frac{7}{6}\vec{a}$

【点评】本题考查平面向量、梯形的中位线定理等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考基础题.

17. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=90^\circ$, $BC=6$, 直线 $MN\parallel BC$, 且分别交边 AB , AC 于点 M , N , 已知直线 MN 将 $\triangle ABC$ 分为面积相等的两部分. 如果将线段 AM 绕着点 A 旋转, 使点 M 落在边 BC 上的点 D 处, 那么 $BD=$ 3.



【考点】R2: 旋转的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】55D: 图形的相似.

【分析】依据直线 $MN\parallel BC$, 可得 $\triangle AMN\sim\triangle ABC$, 再根据直线 MN 将 $\triangle ABC$

分为面积相等的两部分，即可得到 $S_{\triangle AMN} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$ ，进而得出 $\frac{AM}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

解得 $AM=3$ ，过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，则 $AD = \frac{1}{2}BC = 3$ ，故将线段 AM 绕着点 A

逆时针旋转 45° ，可以使点 M 落在边 BC 上的点 D 处，此时 $BD = \frac{1}{2}BC = 3$ 。

【解答】 解： $\because \triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=90^\circ$ ， $BC=6$ ，

$$\therefore AB = \cos 45^\circ \times BC = 3\sqrt{2},$$

$\therefore$ 直线 $MN \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore$ 直线 MN 将 $\triangle ABC$ 分为面积相等的两部分，

$$\therefore S_{\triangle AMN} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2,$$

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } \frac{AM}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

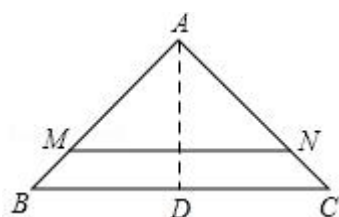
解得 $AM=3$ ，

如图，过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，则 $AD = \frac{1}{2}BC = 3$ ，

$\therefore$ 将线段 AM 绕着点 A 逆时针旋转 45° ，可以使点 M 落在边 BC 上的点 D 处，

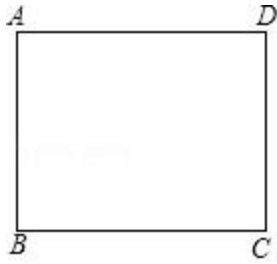
此时， $BD = \frac{1}{2}BC = 3$ 。

故答案为： 3。



【点评】 本题考查了相似三角形的性质和判定，等腰直角三角形的性质以及旋转的性质的运用，主要考查学生运用定理进行推理和计算的能力。

18. (4 分) 如图，矩形纸片 ABCD， $AD=4$ ， $AB=3$ ， 如果点 E 在边 BC 上， 将纸片沿 AE 折叠， 使点 B 落在点 F 处， 联结 FC， 当 $\triangle EFC$ 是直角三角形时， 那么 BE 的长为 1.5 或 3。



【考点】LB：矩形的性质；PB：翻折变换（折叠问题）.

【专题】1：常规题型.

【分析】分两种情况：①当 $\angle EFC=90^\circ$ 时，先判断出点F在对角线AC上，利用勾股定理列式求出AC，设 $BE=x$ ，表示出CE，根据翻折变换的性质可得 $AF=AB$ ， $EF=BE$ ，然后在 $Rt\triangle CEF$ 中，利用勾股定理列出方程求解即可；②当 $\angle CEF=90^\circ$ 时，判断出四边形ABEF是正方形，根据正方形的四条边都相等可得 $BE=AB$.

【解答】解：分两种情况：

①当 $\angle EFC=90^\circ$ 时，如图1，

$$\because \angle AFE = \angle B = 90^\circ, \quad \angle EFC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点A、F、C共线，

$\because$ 矩形ABCD的边 $AD=4$ ，

$$\therefore BC=AD=4,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

设 $BE=x$ ，则 $CE=BC-BE=4-x$ ，

由翻折的性质得， $AF=AB=3$ ， $EF=BE=x$ ，

$$\therefore CF=AC-AF=5-3=2,$$

在 $Rt\triangle CEF$ 中， $EF^2+CF^2=CE^2$ ，

$$\text{即 } x^2 + 2^2 = (4-x)^2,$$

解得 $x=1.5$,

即 $BE=1.5$;

②当 $\angle CEF=90^\circ$ 时, 如图 2,

由翻折的性质得, $\angle AEB = \angle AEF = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$,

$\therefore$ 四边形 ABEF 是正方形,

$\therefore BE=AB=3$,

综上所述, BE 的长为 1.5 或 3.

故答案为: 1.5 或 3.

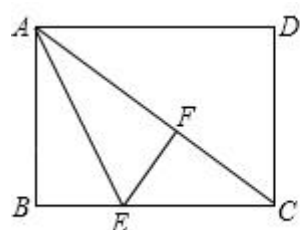


图1

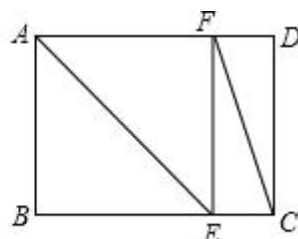


图2

【点评】 本题考查了翻折变换的性质, 勾股定理, 矩形的性质, 正方形的判定与性质, 此类题目, 利用勾股定理列出方程求解是常用的方法, 本题难点在于分情况讨论, 作出图形更形象直观.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\frac{\sqrt{3}\cot 45^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{1}{2\cos 60^\circ + 1} - \tan 60^\circ \times \sin 60^\circ$.

【考点】 2C: 实数的运算; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入求出答案.

【解答】 解: 原式 $= \frac{\sqrt{3} \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2 \times \frac{1}{2} + 1} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$
 $= 1$.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确记忆特殊角的三角函数值是解题关键.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=5 \textcircled{1} \\ (x-y)^2-2(x-y)-3=0 \textcircled{2} \end{cases}.$$

【考点】AF: 高次方程.

【专题】1: 常规题型.

【分析】利用②式求出 $x-y$ 即可解决问题.

【解答】解: 由②得: $(x-y-3)(x-y+1)=0$

$$\therefore x-y=3 \text{ 或 } x-y=-1$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=3 \end{cases}.$$

【点评】本题考查二元二次方程组，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，把二元二次方程组转化为二元一次方程组.

21. (10 分) 已知: 二次函数图象的顶点坐标是 $(3, 5)$, 且抛物线经过点 A $(1, 3)$.

(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 如果点 A 关于该抛物线对称轴的对称点是 B 点, 且抛物线与 y 轴的交点是 C 点, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【考点】H3: 二次函数的性质; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【专题】11: 计算题.

【分析】(1) 设顶点式 $y=a(x-3)^2+5$, 然后把 A 点坐标代入求出 a 即可得到抛物线的解析式;

(2) 利用抛物线的对称性得到 B $(5, 3)$, 再确定出 C 点坐标, 然后根据三角

形面积公式求解.

【解答】解: (1) 设抛物线的解析式为 $y=a(x-3)^2+5$,

将 A (1, 3) 代入上式得 $3=a(1-3)^2+5$, 解得 $a=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$,

(2) $\because$ A (1, 3) 抛物线对称轴为: 直线 $x=3$

$\therefore$ B (5, 3),

令 $x=0$, $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5=\frac{1}{2}$, 则 C (0, $\frac{1}{2}$),

$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2} \times (5-1) \times (3-\frac{1}{2})=5$.

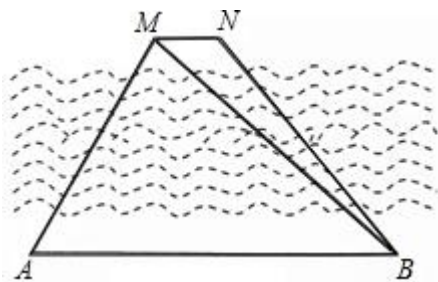
【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式: 在利用待定系数法求二次函数关系式时, 要根据题目给定的条件, 选择恰当的方法设出关系式, 从而代入数值求解. 一般地, 当已知抛物线上三点时, 常选择一般式, 用待定系数法列三元一次方程组来求解; 当已知抛物线的顶点或对称轴时, 常设其解析式为顶点式来求解; 当已知抛物线与 x 轴有两个交点时, 可选择设其解析式为交点式来求解.

22. (10 分) 如图, 在一条河的北岸有两个目标 M、N, 现在位于它的对岸设定两个观测点 A、B. 已知 $AB \parallel MN$, 在 A 点测得 $\angle MAB=60^\circ$, 在 B 点测得 $\angle MBA=45^\circ$, $AB=600$ 米.

(1) 求点 M 到 AB 的距离; (结果保留根号)

(2) 在 B 点又测得 $\angle NBA=53^\circ$, 求 MN 的长. (结果精确到 1 米)

(参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sin 53^\circ \approx 0.8$, $\cos 53^\circ \approx 0.6$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$, $\cot 53^\circ \approx 0.75$)



【考点】T8: 解直角三角形的应用.

【专题】1: 常规题型.

【分析】(1) 过点 M 作 $MD \perp AB$ 于点 D, 易求 AD 的长, 再由 $BD=MD$ 可得 BD 的长, 即 M 到 AB 的距离;

(2) 过点 N 作 $NE \perp AB$ 于点 E, 易证四边形 MDEN 为平行四边形, 所以 ME 的长可求出, 再根据 $MN=AB-AD-BE$ 计算即可.

【解答】解: (1) 过点 M 作 $MD \perp AB$ 于点 D,

$$\therefore MD \perp AB,$$

$$\therefore \angle MDA = \angle MDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAB = 60^\circ, \angle MBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ADM \text{ 中, } \frac{MD}{AD} = \tan A = \sqrt{3};$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDM \text{ 中, } \frac{MD}{BD} = \tan \angle MBD = 1,$$

$$\therefore BD = MD = \sqrt{3}AD,$$

$$\therefore AB = 600\text{m},$$

$$\therefore AD + BD = 600\text{m},$$

$$\therefore AD + \sqrt{3}AD = 600\text{m},$$

$$\therefore AD = (300\sqrt{3} - 300)\text{m},$$

$$\therefore BD = MD = (900 - 300\sqrt{3})\text{m},$$

$$\therefore \text{点 M 到 AB 的距离 } (900 - 300\sqrt{3})\text{m}.$$

(2) 过点 N 作 $NE \perp AB$ 于点 E,

$$\therefore MD \perp AB, NE \perp AB,$$

$$\therefore MD \parallel NE,$$

$$\therefore AB \parallel MN,$$

$\therefore$ 四边形 MDEN 为平行四边形,

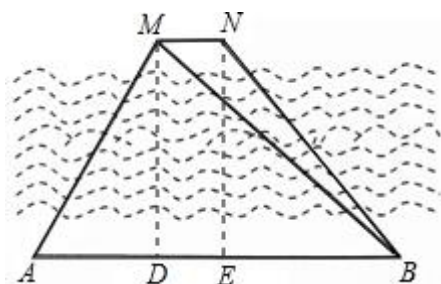
$$\therefore NE = MD = (900 - 300\sqrt{3})\pi, MN = DE,$$

$$\therefore \angle NBA = 53^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle NEB \text{ 中, } \frac{BE}{NE} = \cot 53^\circ \approx 0.75,$$

$$\therefore BE \approx (675 - 225\sqrt{3})\pi,$$

$$\therefore MN = AB - AD - BE \approx 225 - 75\sqrt{3} \approx 95\text{m}.$$

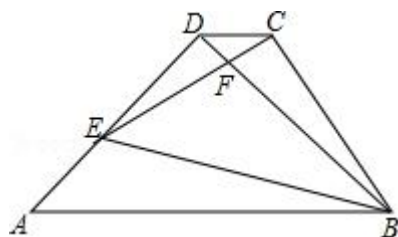


【点评】 本题考查了解直角三角形的应用，通过解直角三角形能解决实际问题中的很多有关测量问题，根据题目已知特点选用适当锐角三角函数或边角关系去解直角三角形，得到数学问题的答案，再转化得到实际问题的答案是解题的关键.

23. (12 分) 已知：如图，梯形 ABCD 中， $DC \parallel AB$ ， $AD = BD$ ， $AD \perp DB$ ，点 E 是腰 AD 上一点，作 $\angle EBC = 45^\circ$ ，联结 CE，交 DB 于点 F.

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle DBC$;

(2) 如果 $\frac{BC}{BD} = \frac{5}{6}$ ，求 $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDA}}$ 的值.



【考点】LH：梯形；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】55D：图形的相似.

【分析】(1) 依据 $\angle CDB = \angle DBA = 45^\circ = \angle A$, $\angle EBA = \angle CBD$, 即可判定 $\triangle CBD \sim \triangle EBA$;

(2) 依据 $\triangle CBD \sim \triangle EBA$, 可得 $\frac{CB}{EB} = \frac{BD}{AB}$, 再根据 $\angle CBE = \angle DBA$, $\frac{BC}{BD} = \frac{5}{6}$, 即可得到 $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDA}}$ 的值.

【解答】证：(1) $\because \angle ADB = 90^\circ$, $AD = BD$,

$$\therefore \angle A = \angle DBA = 45^\circ,$$

又 $\because DC \parallel AB$,

$$\therefore \angle CDB = \angle DBA = 45^\circ = \angle A,$$

$$\text{又} \because \angle CBE = \angle DBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle CBD,$$

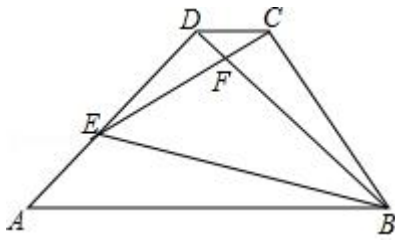
$$\therefore \triangle CBD \sim \triangle EBA;$$

$$(2) \because \triangle CBD \sim \triangle EBA,$$

$$\therefore \frac{CB}{EB} = \frac{BD}{AB},$$

$$\because \angle CBE = \angle DBA, \quad \frac{BC}{BD} = \frac{5}{6},$$

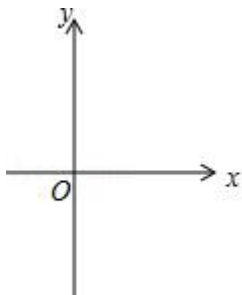
$$\therefore \frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDA}} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、梯形的性质、等腰三角形的性质等知识；熟练掌握相似三角形的判定与性质，证明三角形相似得出比例式是解决问题（2）的关键.

24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{5}{3}$, 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(5, 0)$.

- (1) 求此抛物线顶点 C 的坐标;
- (2) 联结 AC 交 y 轴于点 D , 联结 BD 、 BC , 过点 C 作 $CH \perp BD$, 垂足为点 H , 抛物线对称轴交 x 轴于 G , 联结 HG , 求 HG 的长.



【考点】 H3: 二次函数的性质; HA: 抛物线与 x 轴的交点.

【专题】 53: 函数及其图象.

【分析】 (1) 已知抛物线过 A 、 B 两点, 可将 A 、 B 的坐标代入抛物线的解析式中用待定系数法即可求出抛物线的解析式. 然后可根据抛物线的解析式得出顶点 C 的坐标.

(2) 本题介绍三种解法:

方法一: 分别求直线 AC 的解析式和 BD 的解析式, 直线 $AC: y=-x-1$, 直线 $BD: y=\frac{1}{5}x-1$, 可得 D 和 P 的坐标, 证明 $\triangle BPG \sim \triangle CPH$ 和 $\triangle HPG \sim \triangle CPB$,

列比例式可得 HG 的长；

方法二：如图 2，过点 H 作 $HM \perp CG$ 于 M，先根据勾股定理的逆定理证明 $\angle BCD = 90^\circ$ ，利用面积法求 CH 的长，再证明 $\triangle OBD \sim \triangle MCH$ ，列比例式可得 CM 的长，从而可得结论；

方法三：直线 AC: $y = -x - 1$ ，求 CH 和 BD 的解析式，联立方程组可得 H 的坐标，由勾股定理可得 GH 的长。

【解答】解：(1) 把 A (-1, 0)、B (5, 0) 代入抛物线解析式，

$$\text{得: } \begin{cases} a-b-\frac{5}{3}=0 \\ 25a+5b-\frac{5}{3}=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3,$$

$$\therefore \text{顶点 C (2, -3)}$$

(2) 方法一：设 BD 与 CG 相交于点 P，

设直线 AC 的解析式为: $y = kx + b$

$$\text{把 A (-1, 0) 和 C (2, -3) 代入得: } \begin{cases} -k+b=0 \\ 2k+b=-3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$

则直线 AC: $y = -x - 1$,

$$\therefore D (0, -1),$$

$$\text{同理可得直线 BD: } y = \frac{1}{5}x - 1,$$

$$\therefore P(2, -\frac{3}{5})$$

$$\therefore \angle CHP = \angle PGB = 90^\circ, \quad \angle GPB = \angle CPH$$

$$\therefore \triangle BPG \sim \triangle CPH,$$

$$\therefore \frac{CP}{PB} = \frac{PH}{PG}$$

$$\therefore \triangle HPG \sim \triangle CPB,$$

$$\therefore \frac{HG}{BC} = \frac{PG}{PB},$$

$$\therefore \frac{HG}{3\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\sqrt{26}},$$

$$\therefore HG = \frac{3\sqrt{13}}{13};$$

方法二：如图 2，过点 H 作 $HM \perp CG$ 于 M，

$$\therefore CD = 2\sqrt{2}, \quad BC = 3\sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{26},$$

$$\therefore BD^2 = CD^2 + BC^2,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CH = \frac{1}{2}BC \cdot CD,$$

$$\therefore CH = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{6}{13}\sqrt{26},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle HCG,$$

$$\therefore \triangle OBD \sim \triangle MCH,$$

$$\therefore \frac{1}{HM} = \frac{5}{CM} = \frac{\sqrt{26}}{\frac{6}{13}\sqrt{26}},$$

$$\therefore HM = \frac{6}{13}, \quad CM = \frac{30}{13},$$

$$\therefore GM = \frac{9}{13},$$

由勾股定理得： $GH = \sqrt{HM^2 + GM^2}$

$$\therefore GH = \frac{3}{13}\sqrt{13},$$

方法三：直线 AC： $y = -x - 1$,

$$\therefore D(0, -1),$$

直线 BD： $y = \frac{1}{5}x - 1$,

$$\therefore CH \perp BD,$$

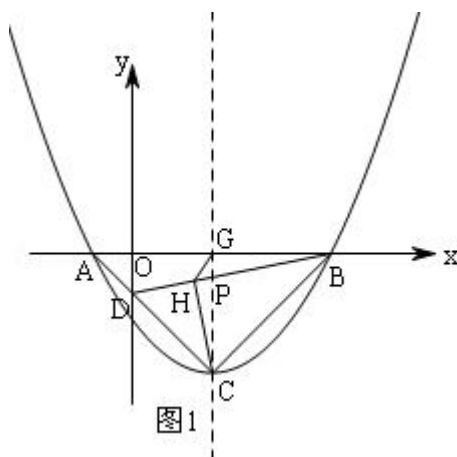
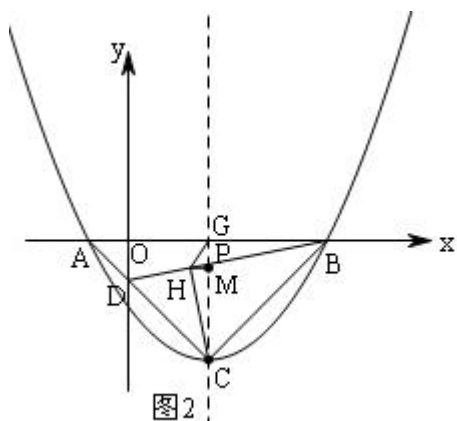
$$\therefore k_{BD} \cdot k_{CH} = -1,$$

$$\therefore \text{直线 CH: } y = -5x + 7,$$

$$\text{联立解析式: } \begin{cases} y = \frac{1}{5}x - 1 \\ y = -5x + 7 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = \frac{35}{13} \\ y = -\frac{6}{13} \end{cases},$$

$$\therefore H\left(\frac{35}{13}, -\frac{6}{13}\right)$$

$$\therefore HG = \frac{3}{13}\sqrt{13}.$$

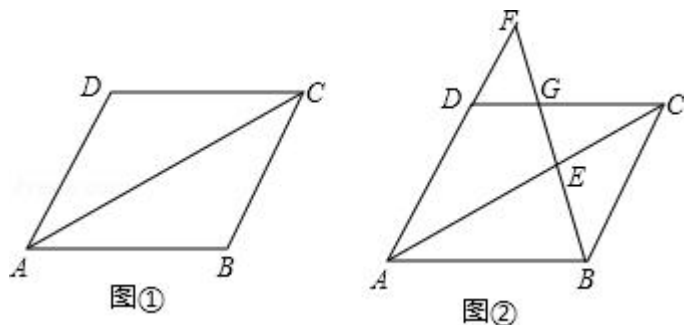


【点评】 本题着重考查了待定系数法求二次函数解析式、三角形相似、联立方程组求交点坐标等重要知识点，综合性强，能力要求较高．还考查了数形结合的数学思想方法．

25. (14 分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $0^\circ < \angle BAD \leq 90^\circ$, $AD=DC$, $AB=BC$, AC 平分 $\angle BAD$.

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

- (2) 如果点 E 在对角线 AC 上, 联结 BE 并延长, 交边 DC 于点 G , 交线段 AD 的延长线于点 F (点 F 可与点 D 重合), $\angle AFB = \angle ACB$, 设 AB 长度是 a (a 是常数, 且 $a > 0$), $AC = x$, $AF = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) 在第 (2) 小题的条件下, 当 $\triangle CGE$ 是等腰三角形时, 求 AC 的长 (计算结果用含 a 的代数式表示)



【考点】LO: 四边形综合题.

【专题】15: 综合题.

【分析】(1) 先判断出 $\angle DAC = \angle DCA$, $\angle BAC = \angle BCA$, 进而得出 $\angle DCA = \angle BAC$, $\angle DAC = \angle BCA$, 即可得出结论;

(2) 先判断出 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, $\triangle ABC \sim \triangle BEC$, 得出比例式, 即可得出结论;

(3) 分三种情况, ①当 $CE = EG$ 时, 判断出点 F , G 和点 D 重合, 即: $AF = AB$, 即可得出结论,

②当 $CG = CE$ 时, 先判断出 $\angle FDG = \angle FGD$, 得出 $FG = FD$, 即可得出 $AF = BF$, 进而判断出 $FB = AC$, 即可得出结论;

③当 $EG = GE$ 时, 判断出 $\angle CEG = \angle CBF$, 而 $\angle CEG = \angle CBF + \angle ACB$, 判断出此种情况不存在.

【解答】(1) 证明: $\because AD = DC$, $AB = BC$

$\therefore \angle DAC = \angle DCA$, $\angle BAC = \angle BCA$

又 AC 平分 $\angle BAD$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC$$

$$\therefore \angle DCA = \angle BAC, \quad \angle DAC = \angle BCA,$$

$$\therefore AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 为平行四边形

又 $AD = DC$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形

(2) 解: $\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore AF \parallel BC, \quad AB = BC$$

$$\therefore \angle AFB = \angle CBF, \quad \angle FAC = \angle ACB, \quad \angle ACB = \angle BAC$$

$$\therefore \angle EBC = \angle BAC = \angle AFB = \angle FAC = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC, \quad \triangle ABC \sim \triangle BEC$$

$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore BC^2 = EC \cdot AC$$

$$\therefore a^2 = EC \cdot x$$

$$\therefore EC = \frac{a^2}{x},$$

$$\therefore AE = AC - EC = x - \frac{a^2}{x},$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{x - \frac{a^2}{x}}{a} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore y = \frac{x^2 - a^2}{a} \quad (\sqrt{2}a \leq x < 2a);$$

(3) 解: $\because \triangle CEG$ 是等腰三角形,

①当 $CE=EG$ 时,

$$\therefore \angle CGE = \angle ECG,$$

$$\because \angle ECG = \angle CBF,$$

$$\therefore \angle CGE = \angle CBF,$$

$$\because \angle CGB = \angle ABF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CBF,$$

此时, 点 F , G 和点 D 重合,

$$\therefore AF = AB,$$

$$\therefore y = a,$$

$$\text{即 } \frac{x^2 - a^2}{a} = a \therefore x = \sqrt{2}a,$$

②当 $CG=CE$ 时,

$$\therefore \angle CEG = \angle CGB,$$

$$\because \angle CEG = \angle ACB + \angle CBF = 2\angle ACB = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle CGB = \angle BCD,$$

$$\because \angle FDG = \angle BAD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle FGD,$$

$$\therefore FG = FD,$$

$$\therefore AF = BF,$$

$$\because \angle EBC = \angle ECB,$$

$$\therefore BE = CE,$$

$$\because \angle EAF = \angle EFA,$$

$$\therefore AE = EF,$$

$$\therefore FB=AC$$

$$\therefore y=x \text{ 即 } \frac{x^2-a^2}{a}=x$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a \text{ (负值已舍),}$$

③当 $EG=CG$ 时,

$$\therefore \angle CEG=\angle ACD,$$

$$\therefore \angle ACD=\angle CBF,$$

$$\therefore \angle CEG=\angle CBF,$$

$$\therefore \angle CEG=\angle CBF+\angle ACB,$$

$\therefore$ 此种情况不存在.

综上所述: $x=\sqrt{2}a$ 或 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ 时, $\triangle CEG$ 为等腰三角形.

【点评】此题是四边形综合题, 主要考查了菱形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 分类讨论的思想, 解本题的关键是找出相关角之间关系.