

2018 年上海市金山区中考数学一模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. (4 分) 已知：a、b 是不等于 0 的实数， $2a=3b$ ，那么下列等式中正确的是 ()

A. $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ B. $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ C. $\frac{a+b}{b}=\frac{4}{3}$ D. $\frac{a+b}{b}=\frac{5}{3}$

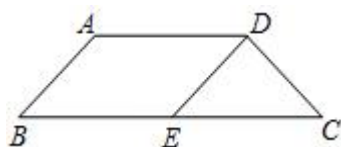
2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ ，下列各式中正确的是 ()

A. $a=b\cdot\cos A$ B. $c=a\cdot\sin A$ C. $a\cdot\cot A=b$ D. $a\cdot\tan A=b$

3. (4 分) 将抛物线 $y=-(x+1)^2+4$ 平移，使平移后所得抛物线经过原点，那么平移的过程为 ()

- A. 向下平移 3 个单位 B. 向上平移 3 个单位
C. 向左平移 4 个单位 D. 向右平移 4 个单位

4. (4 分) 如图，梯形 ABCD 中， $AD\parallel BC$ ， $AB=DC$ ， $DE\parallel AB$ ，下列各式正确的是 ()



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ B. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}$ C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$ D. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}$

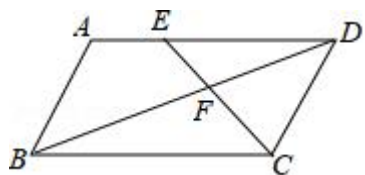
5. (4 分) 一个三角形框架模型的三边长分别为 20 厘米、30 厘米、40 厘米，木工要以一根长为 60 厘米的木条为一边，做一个与模型三角形相似的三角形，那么另两条边的木条长度不符合条件的是 ()

- A. 30 厘米、45 厘米 B. 40 厘米、80 厘米
C. 80 厘米、120 厘米 D. 90 厘米、120 厘米

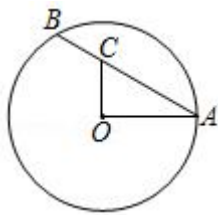
6. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=12$, $BC=9$, D 是 AB 的中点, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 如果以点 D 为圆心 DG 为半径的圆和以点 C 为圆心半径为 r 的圆相交, 那么 r 的取值范围是 ()
- A. $r < 5$ B. $r > 5$ C. $r < 10$ D. $5 < r < 10$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4分) 计算: $3\vec{a} - (\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.
8. (4分) 计算: $2\sin^2 45^\circ - \tan 45^\circ =$ _____.
9. (4分) 如果两个相似三角形对应边上的高的比为 $1:4$, 那么这两个三角形的周长比是_____.
10. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\sin A = \frac{1}{2}$, 那么 $\cos A =$ _____.
11. (4分) 已知一个斜坡的坡度 $i=1:\sqrt{3}$, 那么该斜坡的坡角的度数是_____度.
12. (4分) 如图, E 是 $\square ABCD$ 的边 AD 上一点, $AE = \frac{1}{2}ED$, CE 与 BD 相交于点 F , $BD=10$, 那么 $DF=$ _____.



13. (4分) 抛物线 $y=2x^2 - 1$ 的顶点坐标是_____.
14. (4分) 点 $(-1, a)$ 、 $(-2, b)$ 是抛物线 $y=x^2+2x-3$ 上的两个点, 那么 a 和 b 的大小关系是 a _____ b (填“ $>$ ”或“ $<$ ”或“ $=$ ”).
15. (4分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, $\angle OAB=30^\circ$. $OC \perp OA$, 交 AB 于点 C , 若 $OC=6$, 则 AB 的长等于_____.



16. (4分) 如果一个正多边形每一个内角都等于 144° , 那么这个正多边形的边数是_____.

17. (4分) 两圆内切, 其中一个圆的半径长为 6, 圆心距等于 2, 那么另一个圆的半径长等于_____.

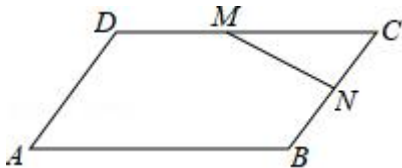
18. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, 把 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 翻折, 点 A 正好落在 BC 边上的点 F 处, 如果四边形 $CDEF$ 和矩形 $ABCD$ 相似, 那么四边形 $CDEF$ 和矩形 $ABCD$ 面积比是_____.



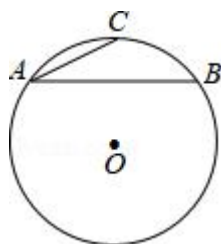
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\sin 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \frac{\cos 30^\circ - \cot 45^\circ}{\cos 60^\circ}$.

20. (10分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, 点 M 、 N 分别是边 DC 、 BC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 求向量 $\overrightarrow{MN}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式.

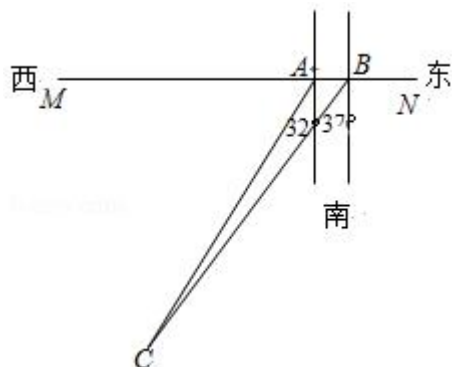


21. (10分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, $AB=8$, $AC=2\sqrt{5}$, 求 $\odot O$ 半径的长.



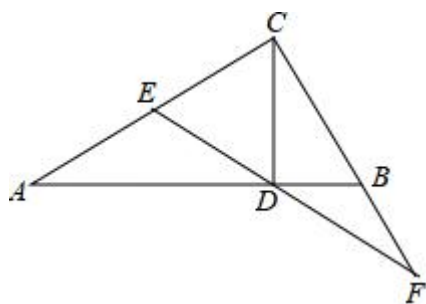
22. (10 分) 如图, MN 是一条东西方向的海岸线, 在海岸线上的 A 处测得一海岛在南偏西 32° 的方向上, 向东走过 780 米后到达 B 处, 测得海岛在南偏西 37° 的方向, 求小岛到海岸线的距离.

(参考数据: $\tan 37^\circ = \cot 53^\circ \approx 0.755$, $\cot 37^\circ = \tan 53^\circ \approx 1.327$, $\tan 32^\circ = \cot 58^\circ \approx 0.625$, $\cot 32^\circ = \tan 58^\circ \approx 1.600$.)



23. (12 分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC > BC$, CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的高, E 是 AC 的中点, ED 的延长线与 CB 的延长线相交于点 F.

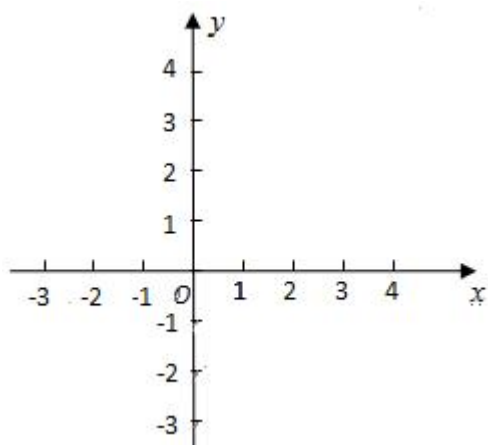
- (1) 求证: DF 是 BF 和 CF 的比例中项;
- (2) 在 AB 上取一点 G, 如果 $AE \cdot AC = AG \cdot AD$, 求证: $EG \cdot CF = ED \cdot DF$.



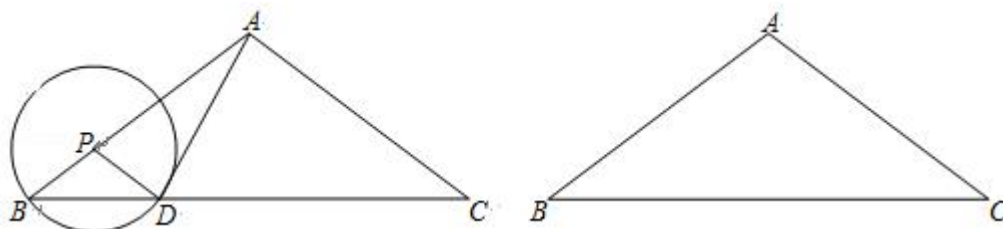
24. (12 分) 平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 y 轴相交于点 C, 与 x 轴正半轴相交于点 A, $OA = OC$, 与 x 轴的另一个交点为 B,

对称轴是直线 $x=1$ ，顶点为 P 。

- (1) 求这条抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；
- (2) 抛物线的对称轴与 x 轴相交于点 M ，求 $\angle PMC$ 的正切值；
- (3) 点 Q 在 y 轴上，且 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle CMP$ 相似，求点 Q 的坐标。



25. (14 分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=5$ ， $\cos B=\frac{4}{5}$ ， P 是边 AB 上一点，以 P 为圆心， PB 为半径的 $\odot P$ 与边 BC 的另一个交点为 D ，联结 PD 、 AD 。



- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (2) 设 $PB=x$ ， $\triangle APD$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；
- (3) 如果 $\triangle APD$ 是直角三角形，求 PB 的长。

2018 年上海市金山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. (4 分) 已知：a、b 是不等于 0 的实数， $2a=3b$ ，那么下列等式中正确的是 ()

A. $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

B. $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$

C. $\frac{a+b}{b}=\frac{4}{3}$

D. $\frac{a+b}{b}=\frac{5}{3}$

【考点】S1：比例的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】根据两内项之积等于两外项之积对各选项分析判断即可得解.

【解答】解：A、由 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ 得， $3a=2b$ ，故本选项错误；

B、由 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ 得， $2a=3b$ ，故本选项正确；

C、由 $\frac{a+b}{b}=\frac{4}{3}$ 得， $3(a+b)=4b$ ，整理得， $3a=b$ ，故本选项错误；

D、由 $\frac{a+b}{b}=\frac{5}{3}$ 得， $3(a+b)=5b$ ，整理得， $3a=2b$ ，故本选项错误.

故选：B.

【点评】本题考查了比例的性质，主要利用了两内项之积等于两外项之积.

2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ ，下列各式中正确的是 ()

A. $a=b\cdot\cos A$

B. $c=a\cdot\sin A$

C. $a\cdot\cot A=b$

D. $a\cdot\tan A=b$

【考点】T1：锐角三角函数的定义.

【专题】33：函数思想.

【分析】根据锐角三角函数的定义解答即可.

【解答】解：∵在 Rt△ABC 中，∠C=90°，BC=a，AC=b，AB=c，

$$\therefore b=c \cdot \cos A, a=c \cdot \sin A, a \cdot \cot A=b, b \cdot \tan A=a.$$

故选：C.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边，余切为邻边比对边.

3. (4 分) 将抛物线 $y = -(x+1)^2 + 4$ 平移，使平移后所得抛物线经过原点，那么平移的过程为 ()

A. 向下平移 3 个单位

B. 向上平移 3 个单位

C. 向左平移 4 个单位

D. 向右平移 4 个单位

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】53: 函数及其图象.

【分析】根据图象向上平移加，可得答案.

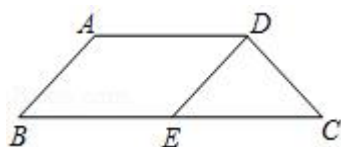
【解答】解： $y = -(x+1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$ 向下平移 3 个单位，使它经过原点

$$y = -x^2 - 2x,$$

故选：A.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减.

4. (4 分) 如图，梯形 ABCD 中，AD//BC，AB=DC，DE//AB，下列各式正确的是 ()



A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

B. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$

D. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$

【考点】LH: 梯形; LM: *平面向量.

【专题】55: 几何图形.

【分析】根据平面向量解答即可.

【解答】解: A、 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$, 错误;

B、 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}$, 错误;

C、 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$, 错误;

D、 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}$, 正确;

故选: D.

【点评】此题考查平面向量问题, 关键是根据平面向量解答.

5. (4 分) 一个三角形框架模型的三边长分别为 20 厘米、30 厘米、40 厘米,

木工要以一根长为 60 厘米的木条为一边, 做一个与模型三角形相似的三角形, 那么另两条边的木条长度不符合条件的是 ()

A. 30 厘米、45 厘米

B. 40 厘米、80 厘米

C. 80 厘米、120 厘米

D. 90 厘米、120 厘米

【考点】SA: 相似三角形的应用.

【专题】32: 分类讨论.

【分析】讨论: 若 20 厘米、30 厘米、40 厘米的对应边分别为 60 厘米、x 厘米、

y 厘米, 根据相似的性质 $\frac{20}{60}=\frac{30}{x}=\frac{40}{y}$;

若 20 厘米、30 厘米、40 厘米的对应边分别为 x 厘米、60 厘米、y 厘米, 根据

相似的性质得 $\frac{20}{x}=\frac{30}{60}=\frac{40}{y}$;

若 20 厘米、30 厘米、40 厘米的对应边分别为 x 厘米、y 厘米、60 厘米, 根据

相似的性质得 $\frac{20}{x}=\frac{30}{y}=\frac{40}{60}$, 然后利用比例的性质分别计算出各组对应值即可.

【解答】解: ①设 20 厘米、30 厘米、40 厘米的对应边分别为 60 厘米、x 厘米、

y 厘米,

根据题意得: $\frac{20}{60}=\frac{30}{x}=\frac{40}{y}$

解得 $x=90$, $y=120$;

②设 20 厘米、30 厘米、40 厘米的对应边分别为 x 厘米、60 厘米、 y 厘米,

根据题意得: $\frac{20}{x} = \frac{30}{60} = \frac{40}{y}$,

解得 $x=40$, $y=80$

设 20 厘米、30 厘米、40 厘米的对应边分别为 x 厘米、 y 厘米、60 厘米,

根据题意得: $\frac{20}{x} = \frac{30}{y} = \frac{40}{60}$,

解得 $x=30$, $y=45$.

故选: C.

【点评】 本题考查了相似三角形的性质: 相似三角形的对应角相等, 对应边的比相等. 利用分类讨论的思想解决此题.

6. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=12$, $BC=9$, D 是 AB 的中点, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 如果以点 D 为圆心 DG 为半径的圆和以点 C 为圆心半径为 r 的圆相交, 那么 r 的取值范围是 ()

A. $r < 5$ B. $r > 5$ C. $r < 10$ D. $5 < r < 10$

【考点】 K5: 三角形的重心; KP: 直角三角形斜边上的中线; MB: 直线与圆的位置关系.

【专题】 55A: 与圆有关的位置关系.

【分析】 先依据勾股定理求得 $AB=15$, $CD=7.5$, 再根据 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 即可得到 $DG=\frac{1}{3}CD=2.5$, 进而得到 $CG=7.5-2.5=5$, $CE=7.5+2.5=10$, 最后依据以点 D 为圆心 DG 为半径的圆和以点 C 为圆心半径为 r 的圆相交, 即可得出 r 的取值范围是 $5 < r < 10$.

【解答】 解: $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=12$, $BC=9$, D 是 AB 的中点,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 15, \quad CD = \frac{1}{2}AB = 7.5,$$

∵ G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

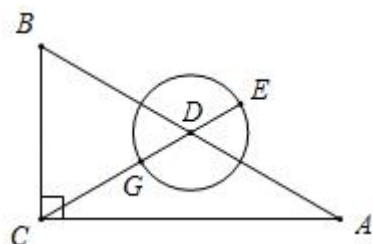
$$\therefore DG = \frac{1}{3}CD = 2.5,$$

$$\therefore CG = 7.5 - 2.5 = 5, \quad CE = 7.5 + 2.5 = 10,$$

∴ 以点 D 为圆心 DG 为半径的圆和以点 C 为圆心半径为 r 的圆相交,

∴ r 的取值范围是 $5 < r < 10$,

故选: D.



【点评】 此题主要考查了圆与圆的位置关系、三角形重心性质以及直角三角形斜边上中线的性质的运用, 解决问题的关键是结合题意画出符合题意的图形, 解题时注意: 在直角三角形中, 斜边上的中线等于斜边的一半; 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2: 1.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) **【请直接将结果填入答题纸的相应位置】**

7. (4 分) 计算: $3\vec{a} - (\vec{a} - 2\vec{b}) = \underline{2\vec{a} + 2\vec{b}}$.

【考点】 LM: *平面向量.

【专题】 5: 特定专题.

【分析】 根据平面向量的加法法则计算即可.

【解答】 解: $3\vec{a} - (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$,

故答案为 $2\vec{a} + 2\vec{b}$.

【点评】 本题考查平面向量, 熟练掌握平面向量的加法法则是解题的关键.

8. (4 分) 计算: $2\sin^2 45^\circ - \tan 45^\circ = \underline{0}$.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】1：常规题型.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值代入求出答案.

【解答】解：原式= $2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$

$$=1 - 1$$

$$=0.$$

故答案为：0.

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

9. (4 分) 如果两个相似三角形对应边上的高的比为 1：4，那么这两个三角形的周长比是 1：4.

【考点】S7：相似三角形的性质.

【专题】55：几何图形.

【分析】根据相似三角形周长的比、两个相似三角形对应边上的高的比等于相似比解答即可.

【解答】解：∵两个相似三角形对应边上的高的比为 1：4，

∴这两个三角形的相似比为 1：4，

∴两个相似三角形的周长比为 1：4；

故答案为：1：4

【点评】本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形周长的比等于相似比是解题的关键.

10. (4 分) 在 Rt△ABC 中，∠C=90°， $\sin A = \frac{1}{2}$ ，那么 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【考点】T3：同角三角函数的关系；T5：特殊角的三角函数值.

【专题】11：计算题.

【分析】根据 $\sin A = \frac{1}{2}$ 得到 $A = 30^\circ$ ，易得， $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解答】解：∵在 Rt△ABC 中，∠C=90°， $\sin A = \frac{1}{2}$ ，

∴∠A=30°，

∴ $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

故答案是： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

【点评】本题主要考查了同角三角函数的定义和特殊角的三角函数值．

11. (4 分) 已知一个斜坡的坡度 $i=1:\sqrt{3}$ ，那么该斜坡的坡角的度数是 30 度．

【考点】T9：解直角三角形的应用－坡度坡角问题．

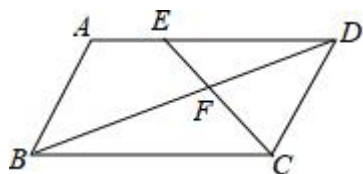
【分析】坡度=坡角的正切值，据此直接解答．

【解答】解：∵ $\tan \alpha = 1:\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

∴坡角=30°．

【点评】此题主要考查学生对坡度及坡角的理解及掌握．

12. (4 分) 如图，E 是▱ABCD 的边 AD 上一点， $AE = \frac{1}{2}ED$ ，CE 与 BD 相交于点 F，BD=10，那么 DF= 4 ．



【考点】L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【专题】11：计算题．

【分析】先利用平行四边形的性质得 $AD=BC$ ， $AD \parallel BC$ ，再利用 $AE = \frac{1}{2}ED$ 得到

$DE = \frac{2}{3}BC$ ，接下来证明 $\triangle DEF \sim \triangle BCF$ ，利用相似比得到 $BF = \frac{3}{2}DF$ ，所以

$\frac{3}{2}DF + DF = 10$ ，然后解方程即可．

【解答】解：∵四边形 ABCD 为平行四边形，

∴ $AD=BC$ ， $AD \parallel BC$ ，

$$\text{而 } AE = \frac{1}{2}ED,$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BF = \frac{3}{2}DF,$$

$$\text{而 } BF + DF = 10,$$

$$\therefore \frac{3}{2}DF + DF = 10,$$

$$\therefore DF = 4.$$

故答案为 4.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形．也考查了平行四边形的性质．

13. (4 分) 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的顶点坐标是 (0, -1) .

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 利用顶点坐标公式直接求解.

【解答】 解：根据顶点坐标公式，

$$\text{得顶点横坐标为 } x = -\frac{b}{2a} = 0,$$

$$\text{纵坐标为 } y = \frac{4ac - b^2}{4a} = -1, \text{ 即 } (0, -1).$$

【点评】 主要考查了求抛物线的顶点坐标、对称轴的方法.

14. (4 分) 点 $(-1, a)$ 、 $(-2, b)$ 是抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 上的两个点，那么 a

和 b 的大小关系是 a < b (填“>”或“<”或“=”).

【考点】H5：二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】535：二次函数图象及其性质.

【分析】利用待定系数法求出 a 、 b 的值即可判断.

【解答】解： $\because x = -1$ 时， $a = 1 - 2 - 3 = -4$,

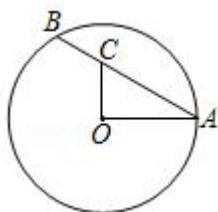
$x = -2$ 时， $b = 4 - 4 - 3 = -3$,

$\therefore a < b$,

故答案为 $<$.

【点评】本题考查二次函数的性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

15. (4 分) 如图， AB 是 $\odot O$ 的弦， $\angle OAB = 30^\circ$. $OC \perp OA$ ，交 AB 于点 C ，若 $OC = 6$ ，则 AB 的长等于 18.



【考点】M2：垂径定理；M5：圆周角定理.

【专题】55C：与圆有关的计算.

【分析】过 O 点作 $OD \perp AB$ 于 D ，根据三角函数可求 OA ，再根据三角函数可求 AD ，再根据垂径定理可求 AB 的长，

【解答】解：过 O 点作 $OD \perp AB$ 于 D ，

$\because \angle OAB = 30^\circ$. $OC \perp OA$ ， $OC = 6$ ，

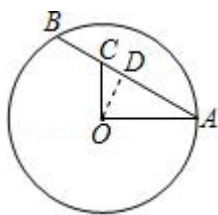
$\therefore OA = 6\sqrt{3}$ ，

$\because OD \perp AB$ ，

$\therefore AD = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$ ，

$$\therefore AB=9 \times 2=18.$$

故答案为：18.



【点评】考查了垂径定理，三角函数，关键是熟悉垂直于弦的直径平分这条弦的知识点.

16. (4 分) 如果一个正多边形每一个内角都等于 144° ，那么这个正多边形的边数是 10.

【考点】 L3: 多边形内角与外角.

【专题】 11: 计算题.

【分析】设正多边形的边数为 n ，然后根据多边形的内角和公式列方程求解即可.

【解答】解：设正多边形的边数为 n ,

$$\text{由题意得, } \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 144^\circ,$$

$$\text{解得 } n=10.$$

故答案为：10.

【点评】本题考查了多边形的内角与外角，熟记公式并准确列出方程是解题的关键.

17. (4 分) 两圆内切，其中一个圆的半径长为 6，圆心距等于 2，那么另一个圆的半径长等于 4 或 8.

【考点】 MJ: 圆与圆的位置关系.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】分两种情况分析：半径为 6 的圆为较大的圆；半径为 6 的圆为较小的圆，进行求解.

【解答】解：分两种情况考虑：

当 6 为较大的圆的半径时，另一个圆的半径 $=6 - 2=4$ ；

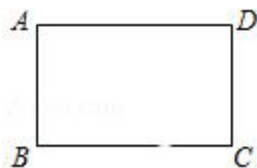
当 6 为较小的圆的半径时，另一个圆的半径 $=6+2=8$ ．

所以另一个圆的半径为 4 或 8．

故答案为 4 或 8．

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系，用到的知识点为：两圆内切，圆心距=两圆半径之差．注意：其中一圆的半径可能在较大圆，也有可能是在较小圆．

18. (4 分) 如图，在矩形 ABCD 中，E 是 AD 上一点，把 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 翻折，点 A 正好落在 BC 边上的点 F 处，如果四边形 CDEF 和矩形 ABCD 相似，那么四边形 CDEF 和矩形 ABCD 面积比是 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ．

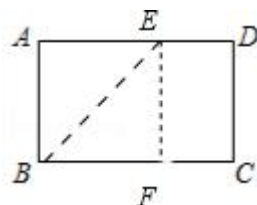


【考点】LB：矩形的性质；PB：翻折变换（折叠问题）；S6：相似多边形的性质．

【专题】556：矩形 菱形 正方形．

【分析】由题意四边形 ABFE 是正方形，设 $AB=x$ ， $AD=y$ ，由四边形 CDEF 和矩形 ABCD 相似，可得 $\frac{CD}{AD} = \frac{DE}{CD}$ ，即 $\frac{x}{y} = \frac{y-x}{x}$ ，可得 $x^2+xy - y^2=0$ ，推出 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}y$ 或 $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}y$ ，推出四边形 CDEF 和矩形 ABCD 面积比 $=DE: AD = (y - x): y$ ，由此即可解决问题；

【解答】解：由题意四边形 ABFE 是正方形，设 $AB=x$ ， $AD=y$ ，



∴ 四边形 CDEF 和矩形 ABCD 相似,

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{DE}{CD},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y-x}{x},$$

$$\therefore x^2 + xy - y^2 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}y \text{ 或 } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}y,$$

$$\therefore \text{四边形 CDEF 和矩形 ABCD 面积比} = DE : AD = (y-x) : y = \left(y - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}y\right) :$$

$$y = (3 - \sqrt{5}) : 2,$$

$$\text{故答案为 } \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

【点评】 本题考查翻折变换、矩形的性质、相似多边形的性质等知识，解题的关键是学会利用参数解决问题，属于中考常考题型.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 计算： $\sin 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \frac{\cos 30^\circ - \cot 45^\circ}{\cos 60^\circ}.$

【考点】 T5：特殊角的三角函数值.

【专题】 1：常规题型.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入求出答案.

【解答】 解： $\sin 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \frac{\cos 30^\circ - \cot 45^\circ}{\cos 60^\circ}$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1}{2}}$$

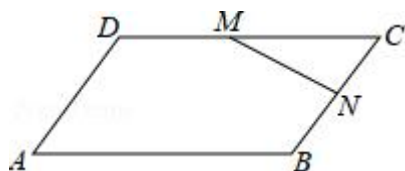
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - 2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2.$$

【点评】 此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10 分) 如图，已知平行四边形 ABCD，点 M、N 分别是边 DC、BC 的中

点，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，求向量 $\overrightarrow{MN}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式.

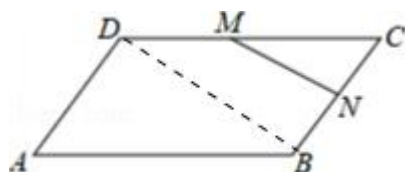


【考点】L5: 平行四边形的性质; LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】连接 BD, 可得 $MN = \frac{1}{2}DB$, 根据三角形法则求出 $\overrightarrow{DB}$ 即可解决问题.

【解答】解: 如图连接 BD.



$$\because DM=CM, \quad BN=CN,$$

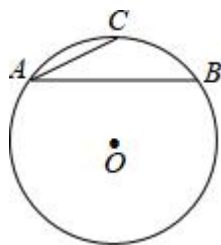
$$\therefore MN \parallel BD, \quad MN = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

【点评】本题考查平面向量、平行四边形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握三角形法则解决问题, 学会添加常用辅助线, 构造三角形中位线解决问题.

21. (10 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, $AB=8$, $AC=2\sqrt{5}$, 求 $\odot O$ 半径的长.



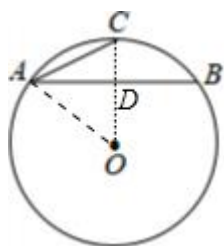
【考点】M2: 垂径定理.

【专题】559: 圆的有关概念及性质.

【分析】如图, 连接 OA, 连接 OC 交 AB 于 D. 设 $\odot O$ 的半径为 r. 在 $Rt\triangle ADC$

中，求出 CD ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，利用勾股定理构建方程即可解决问题；

【解答】解：如图，连接 OA ，连接 OC 交 AB 于 D 。设 $\odot O$ 的半径为 r 。



$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore OC \perp AB,$$

$$\therefore AD = DB = \frac{1}{2}AB = 4,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 2,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADO \text{ 中, } \therefore OA^2 = AD^2 + OD^2,$$

$$\therefore r^2 = (r - 2)^2 + 16,$$

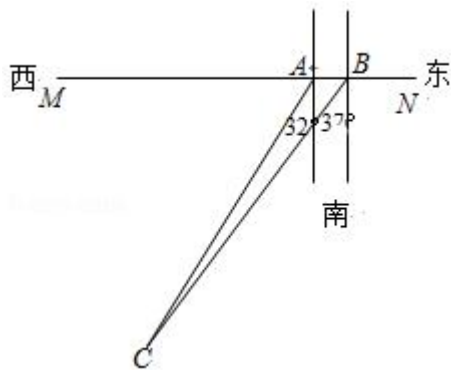
解得 $r = 5$ 。

$\therefore \odot O$ 的半径为 5。

【点评】 本题考查垂径定理、勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型。

22. (10 分) 如图， MN 是一条东西方向的海岸线，在海岸线上的 A 处测得一海岛在南偏西 32° 的方向上，向东走过 780 米后到达 B 处，测得海岛在南偏西 37° 的方向，求小岛到海岸线的距离。

(参考数据： $\tan 37^\circ = \cot 53^\circ \approx 0.755$ ， $\cot 37^\circ = \tan 53^\circ \approx 1.327$ ， $\tan 32^\circ = \cot 58^\circ \approx 0.625$ ， $\cot 32^\circ = \tan 58^\circ \approx 1.600$.)



【考点】TB：解直角三角形的应用－方向角问题.

【专题】1：常规题型.

【分析】先过点 C 作 $CD \perp MN$ ，垂足为 D，设 $CD=x$ 米，根据 $AB=BD-AD$ ，然后代值计算即可求出小岛到海岸线的距离.

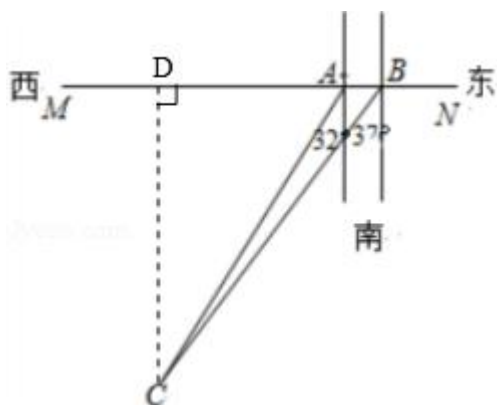
【解答】解：过点 C 作 $CD \perp MN$ ，垂足为 D，设 $CD=x$ 米，

$$\therefore AB=BD-AD,$$

$$\therefore x \tan 37^\circ - x \tan 32^\circ = 780,$$

解得： $x=6000$ ，

答：小岛到海岸线的距离 6000 米.

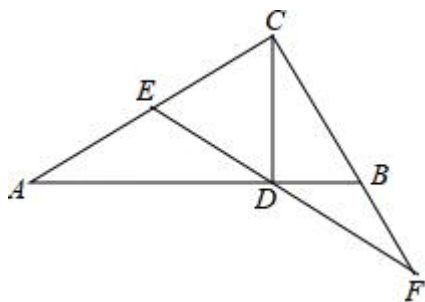


【点评】此题考查了解直角三角形的应用－方向角问题，解一般三角形的问题一般可以转化为解直角三角形的问题，解决的方法就是作高线.

23. (12 分) 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC > BC$ ，CD 是 $Rt\triangle ABC$ 的高，E 是 AC 的中点，ED 的延长线与 CB 的延长线相交于点 F.

(1) 求证: DF 是 BF 和 CF 的比例中项;

(2) 在 AB 上取一点 G , 如果 $AE \cdot AC = AG \cdot AD$, 求证: $EG \cdot CF = ED \cdot DF$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题; 552: 三角形; 55D: 图形的相似.

【分析】(1) 由 $\angle ACB = 90^\circ$ 、 $CD \perp AB$ 利用同角的余角相等可得出 $\angle BCD = \angle A$, 由 E 是 AC 的中点利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得出 $DE = AE$, 进而可得出 $\angle ADE = \angle A$, 结合对顶角相等可得出 $\angle FCD = \angle FDB$, 再结合公共角 $\angle CFD = \angle DFB$, 即可证出 $\triangle CFD \sim \triangle DFB$, 根据相似三角形的性质可证出 $DF^2 = BF \cdot CF$;

(2) 由 $AE \cdot AC = AG \cdot AD$ 结合 $\angle A = \angle A$ 可证出 $\triangle AEG \sim \triangle ADC$, 根据相似三角形的性质可求出 $\angle AEG = \angle ADC = 90^\circ$, 结合 $\angle ACB = 90^\circ$ 可得出 $EG \parallel BC$, 进而可得出 $\frac{EG}{ED} = \frac{BF}{DF}$, 根据 (1) $\triangle CFD \sim \triangle DFB$ 可得出 $\frac{DF}{CF} = \frac{BF}{DF}$, 等量替换后可得出 $\frac{EG}{ED} = \frac{DF}{CF}$, 进而即可证出 $EG \cdot CF = ED \cdot DF$.

【解答】证明: (1) $\because \angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$,

$\therefore \angle BCD = \angle A$, $\angle ADC = 90^\circ$.

$\because E$ 是 AC 的中点,

$\therefore DE = AE = CE$,

$\therefore \angle ADE = \angle A$,

$$\therefore \angle BCD = \angle ADE.$$

$$\text{又 } \angle ADE = \angle FDB,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle FDB.$$

$$\therefore \angle CFD = \angle DFB,$$

$$\therefore \triangle CFD \sim \triangle DFB,$$

$$\therefore DF^2 = BF \cdot CF.$$

$$(2) \because AE \cdot AC = AG \cdot AD,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AC}.$$

$$\therefore \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore EG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle EGD \sim \triangle FBD,$$

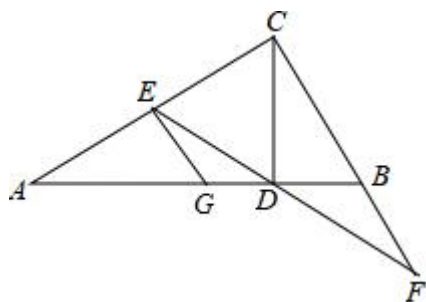
$$\therefore \frac{EG}{ED} = \frac{BF}{DF}.$$

$$\text{由 (1) 知: } \triangle CFD \sim \triangle DFB,$$

$$\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{BF}{DF},$$

$$\therefore \frac{EG}{ED} = \frac{DF}{CF},$$

$$\therefore EG \cdot CF = ED \cdot DF.$$

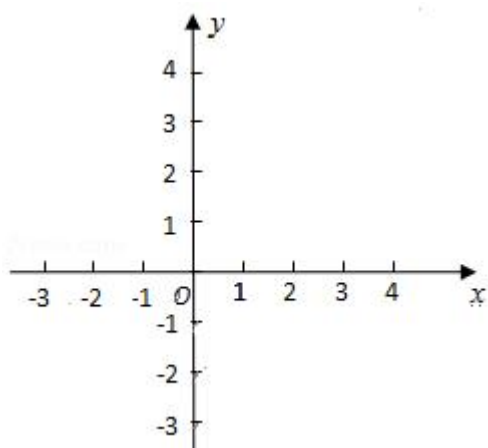


【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、互余、平行线的判定与性质以及

直角三角形的性质，解题的关键是：(1) 利用相似三角形的性质找出 $\triangle CFD \sim \triangle DFB$ ；(2) 根据相似三角形的性质及平行线的性质找出 $\frac{DF}{CF} = \frac{BF}{DF}$ 、 $\frac{EG}{ED} = \frac{BF}{DF}$ 。

24. (12 分) 平面直角坐标系 xOy 中 (如图)，已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 y 轴相交于点 C ，与 x 轴正半轴相交于点 A ， $OA=OC$ ，与 x 轴的另一个交点为 B ，对称轴是直线 $x=1$ ，顶点为 P 。

- (1) 求这条抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；
- (2) 抛物线的对称轴与 x 轴相交于点 M ，求 $\angle PMC$ 的正切值；
- (3) 点 Q 在 y 轴上，且 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle CMP$ 相似，求点 Q 的坐标。



【考点】HF：二次函数综合题。

【专题】153：代数几何综合题；16：压轴题。

【分析】(1) 先根据抛物线的解析式求出 $C(0, 3)$ ，那么 $OA=OC=3$ ， $A(3, 0)$ 。根据抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 过点 A ，对称轴是直线 $x=1$ 得到方程组
$$\begin{cases} 9a+3b+3=0 \\ -\frac{b}{2a}=1 \end{cases}$$
，解方程组求出抛物线的表达式，再将一般式化为顶点式，即可求出顶点 P 的坐标；

(2) 根据平行线的性质得出 $\angle PMC = \angle MCO$ ，然后在直角 $\triangle OCM$ 中利用正切函数的定义求解；

(3) 根据 (1) 中所求二次函数的解析式得出 $B(-1, 0)$ ，根据线段垂直平分线以及等腰三角形三线合一的性质得到 $\angle BCO = \angle MCO$ ，再证明 $\angle BCO = \angle PMC$ ，那么得出当点 Q 在 y 轴上，且 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle CMP$ 相似时， Q 只能在 C 点下方， C 与 M 对应，然后分两种情况进行讨论：① $\triangle BCQ \sim \triangle CMP$ ；② $\triangle BCQ \sim \triangle PMC$ ，根据相似三角形对应边成比例列式即可求出点 Q 的坐标.

【解答】 解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 y 轴相交于点 C ,

$$\therefore C(0, 3),$$

$$\therefore OA = OC = 3,$$

$$\therefore A(3, 0).$$

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} 9a + 3b + 3 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4,$$

$$\therefore \text{顶点 } P \text{ 的坐标为 } (1, 4);$$

$$(2) \because \text{抛物线 } y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4 \text{ 的对称轴与 } x \text{ 轴相交于点 } M,$$

$$\therefore PM \parallel y \text{ 轴, } M(1, 0).$$

$$\therefore \angle PMC = \angle MCO.$$

$$\therefore \tan \angle MCO = \frac{OM}{OC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle PMC = \frac{1}{3};$$

$$(3) \because y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\therefore y = 0 \text{ 时, } -x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ 解得 } x = -1 \text{ 或 } x = 3,$$

∴ B (- 1, 0).

∵ OB=OM=1, CO ⊥ BM,

∴ CB=CM,

∴ OC 是等腰三角形底边的中线,

∴ ∠BCO=∠MCO,

∵ 点 Q 在 y 轴上, 且△BCQ 与△CMP 相似,

∴ Q 只能在 C 点下方.

∵ ∠PMC=∠MCO,

∴ ∠BCO=∠PMC.

∴ 当△BCQ 与△CMP 相似时, C 与 M 对应, Q 在 C 点下方, 分两种情况:

①如果△BCQ ∽ △CMP, 此时 Q 在那么 $\frac{CQ}{MP} = \frac{BC}{CM} = 1$,

即 $\frac{CQ}{4} = 1$, 解得 CQ=4,

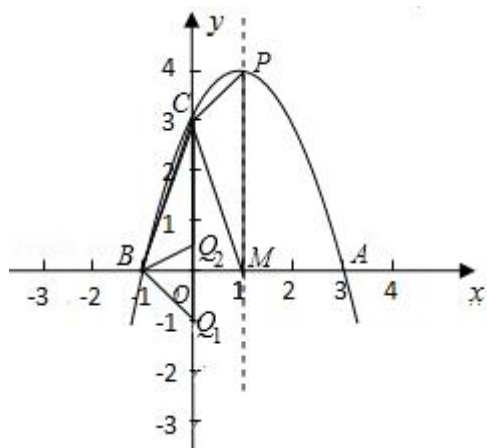
点 Q 的坐标为 (0, - 1);

②如果△BCQ ∽ △PMC, 那么 $\frac{CQ}{MC} = \frac{BC}{PM}$,

即 $\frac{CQ}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 解得 $CQ = \frac{5}{2}$,

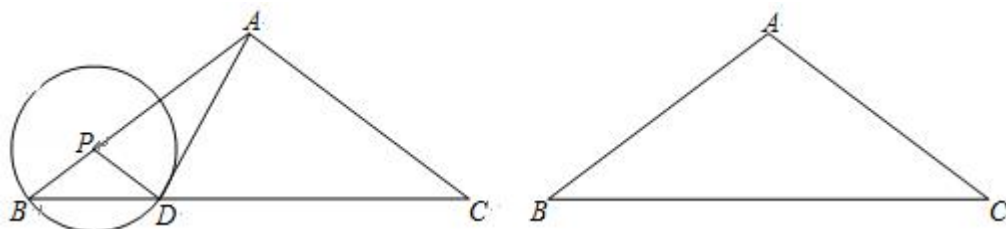
点 Q 的坐标为 $(0, \frac{1}{2})$.

综上所述, 所求点 Q 的坐标为 (0, - 1) 或 $(0, \frac{1}{2})$.



【点评】本题是二次函数综合题, 其中涉及到利用待定系数法求抛物线的解析式, 二次函数的性质, 平行线的性质, 锐角三角函数的定义, 线段垂直平分线、等腰三角形、相似三角形的性质等知识, 综合性较强, 难度适中. 利用分类讨论、数形结合以及方程思想是解题的关键.

25. (14 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $\cos B=\frac{4}{5}$, P 是边 AB 上一点, 以 P 为圆心, PB 为半径的 $\odot P$ 与边 BC 的另一个交点为 D , 联结 PD 、 AD .



- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;
- (2) 设 $PB=x$, $\triangle APD$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) 如果 $\triangle APD$ 是直角三角形, 求 PB 的长.

【考点】MR: 圆的综合题.

【专题】15: 综合题.

【分析】(1) 如图, 作 $AH \perp BC$ 于 H , 利用等腰三角形的性质得 $BH=CH$, 再利用余弦的定义计算出 $BH=4$, 接着利用勾股定理计算出 $AH=3$, 然后根据三角形面积公式求解;

(2) 如图，作 $PG \perp BD$ 于 G ，利用垂径定理得 $BG=DG$ ，再利用余弦的定义计

算出 $BG=\frac{4}{5}x$ ，接着利用勾股定理计算出 $PG=\frac{3}{5}x$ ，根据三角形面积公式得到

$S_{\triangle PBD}=\frac{12}{25}x^2$ ，然后利用 $\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPD}}=\frac{AP}{BP}$ 可表示出 y 与 x 的关系式；

(3) 作 $CE \perp AB$ 于 E ，如图，利用面积法求得 $CE=\frac{24}{5}$ ，则可计算出 $\cos \angle$

$EAC=\frac{7}{25}$ ，再证明 $\angle APD=\angle EAC$ 得到 $\cos \angle APD=\frac{7}{25}$ ，讨论：当 $\angle ADP=90^\circ$

时，利用 $\cos \angle APD=\frac{PD}{AP}$ 得到 $\frac{x}{5-x}=\frac{7}{25}$ ；当 $\angle PAD=90^\circ$ 时，利用 $\cos \angle APD=\frac{PA}{PD}$

得到 $\frac{5-x}{x}=\frac{7}{25}$ ，而 $\angle APD=2\angle B \neq 90^\circ$ ，然后分别解关于 x 的方程即可得到对

应 AP 的长.

【解答】 解：(1) 如图，作 $AH \perp BC$ 于 H ，

$$\because AB=AC=5,$$

$$\therefore BH=CH,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } \therefore \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BH=4,$$

$$\therefore BC=2BH=8, AH=\sqrt{5^2-4^2}=3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 8 \times 3=12;$$

(2) 如图，作 $PG \perp BD$ 于 G ，则 $BG=DG$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle PBG \text{ 中, } \therefore \cos B = \frac{BG}{PB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BG=\frac{4}{5}x,$$

$$\therefore BD=\frac{8}{5}x, PG=\sqrt{x^2-(\frac{4}{5}x)^2}=\frac{3}{5}x,$$

$$\therefore S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x \cdot \frac{8}{5}x=\frac{12}{25}x^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPD}}=\frac{AP}{BP}, \text{ 即}$$

$$\therefore y = \frac{5-x}{x} \cdot \frac{12}{25} x^2 = -\frac{12}{25} x^2 + \frac{12}{5} x \quad (0 < x < 5);$$

(3) 作 $CE \perp AB$ 于 E , 如图,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CE \cdot AB,$$

$$\therefore CE = \frac{24}{5},$$

$$\therefore AE = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5},$$

$$\therefore \cos \angle EAC = \frac{\frac{7}{5}}{5} = \frac{7}{25},$$

$$\therefore PB = PD, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle PDB = \angle B,$$

$$\therefore PD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle APD = \angle EAC,$$

$$\therefore \cos \angle APD = \frac{7}{25},$$

$$\text{当 } \angle ADP = 90^\circ \text{ 时, } \therefore \cos \angle APD = \frac{PD}{AP},$$

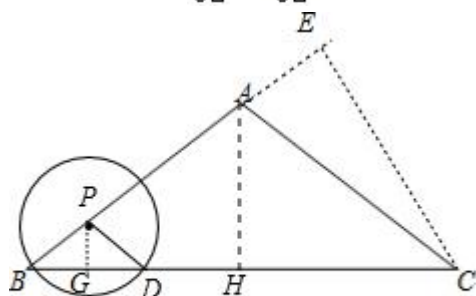
$$\therefore \frac{x}{5-x} = \frac{7}{25}, \text{ 解得 } x = \frac{35}{32};$$

$$\text{当 } \angle PAD = 90^\circ \text{ 时, } \therefore \cos \angle APD = \frac{PA}{PD},$$

$$\therefore \frac{5-x}{x} = \frac{7}{25}, \text{ 解得 } x = \frac{125}{32},$$

而 $\angle APD = 2\angle B \neq 90^\circ$,

$$\therefore PB \text{ 的长为 } \frac{35}{32} \text{ 或 } \frac{125}{32}.$$



【点评】 本题考查了圆的综合题：熟练掌握垂径定理和等腰三角形的性质；会利用勾股定理和锐角三角函数的定义进行几何计算；会利用分类讨论的方法解决数学问题.