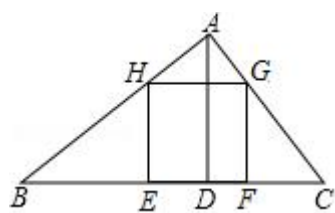


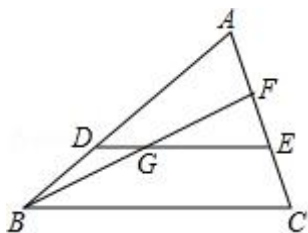
2018 年上海市松江区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ ，那么 $\frac{a}{a+b}$ 的值为 ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$
2. (4 分) 下列函数中，属于二次函数的是 ()
 A. $y = x - 3$ B. $y = x^2 - (x+1)^2$
 C. $y = x(x-1) - 1$ D. $y = \frac{1}{x^2}$
3. (4 分) 已知飞机离水平地面的高度为 5 千米，在飞机上测得该水平地面上某观测目标 A 的俯角为 α ，那么这时飞机与目标 A 的距离为 ()
 A. $\frac{5}{\sin \alpha}$ B. $5 \sin \alpha$ C. $\frac{5}{\cos \alpha}$ D. $5 \cos \alpha$
4. (4 分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，在下列条件中，不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()
 A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ B. $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = 3\vec{c}$ C. $\vec{a} = -5\vec{b}$ D. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$
5. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，边 $BC=6$ ，高 $AD=4$ ，正方形 EFGH 的顶点 E、F 在边 BC 上，顶点 H、G 分别在边 AB 和 AC 上，那么这个正方形的边长等于 ()



- A. 3
B. 2.5
C. 2.4
D. 2
6. (4 分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD:BD=2:1$ ，点 F 在 AC 上， $AF:FC=1:2$ ，联结 BF，交 DE 于点 G，那么 $DG:GE$ 等于 ()



- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 2: 3 D. 2: 5.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 已知线段 $a=4$, $b=1$, 如果线段 c 是线段 a 、 b 的比例中项, 那么 $c=$ _____.

8. (4 分) 在比例尺是 1: 15000000 的地图上, 测得甲乙两地的距离是 2 厘米, 那么甲乙两地的实际距离是_____千米.

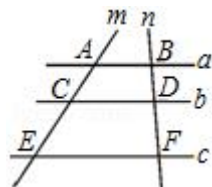
9. (4 分) 如果抛物线 $y=(a+2)x^2+x-1$ 的开口向下, 那么 a 的取值范围是_____.

10. (4 分) 已知一个斜坡的坡度 $i=1: \sqrt{3}$, 那么该斜坡的坡角的度数是_____度.

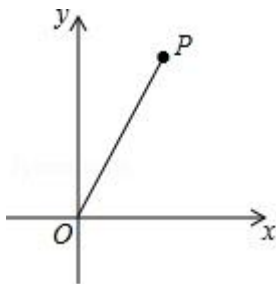
11. (4 分) 线段 $AB=10$, 点 P 是 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 则 $AP=$ _____ (用根式表示).

12. (4 分) 已知等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=6$, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $AG=$ _____.

13. (4 分) 已知直线 $a \parallel b \parallel c$, 直线 m, n 与直线 a, b, c 分别交于点 A, C, E, B, D, F , $AC=4$, $CE=6$, $BD=3$, 则 $BF=$ _____.



14. (4 分) 已知平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 点 P 的坐标为 (5, 12), 那么 OP 与 x 轴正半轴所夹角的余弦值为_____.



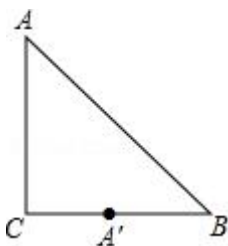
15. (4 分) 已知抛物线 $y=f(x)$ 开口向下, 对称轴是直线 $x=1$, 那么 $f(2)$ _____ f

(4). (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

16. (4 分) 把抛物线 $y=x^2$ 向下平移, 如果平移后的抛物线经过点 $A(2, 3)$, 那么平移后的抛物线的表达式是_____.

17. (4 分) 我们定义: 关于 x 的函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=bx^2+ax$ (其中 $a \neq b$) 叫做互为交换函数. 如 $y=3x^2+4x$ 与 $y=4x^2+3x$ 是互为交换函数. 如果函数 $y=2x^2+bx$ 与它的交换函数图象顶点关于 x 轴对称, 那么 $b=_____$.

18. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=4$, 将 $\triangle ABC$ 翻折, 使得点 A 落在 BC 的中点 A' 处, 折痕分别交边 AB 、 AC 于点 D 、点 E , 那么 $AD:AE$ 的值为_____.

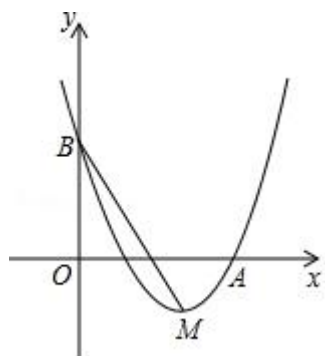


三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 80 分)

19. (10 分) 如图在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(3, 0)$ 、点 $B(0, 3)$, 顶点为 M .

(1) 求该二次函数的解析式;

(2) 求 $\angle OBM$ 的正切值.

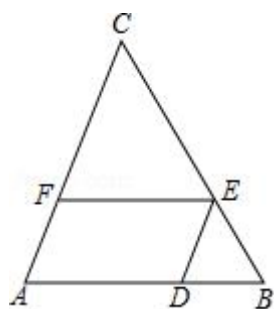


20. (10 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, D、E、F 分别是边 AB、BC、CA 上的点,

且 $EF \parallel AB$, $\frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} = 2$.

(1) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$;

(2) 如果 $\triangle ABC$ 的面积是 9, 求四边形 ADEF 的面积.

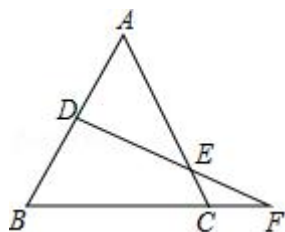


21. (10 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2\sqrt{5}$, $BC=4$. 线段 AB 的垂直平

分线 DF 分别交边 AB、AC、BC 所在的直线于点 D、E、F.

(1) 求线段 BF 的长;

(2) 求 AE: EC 的值.

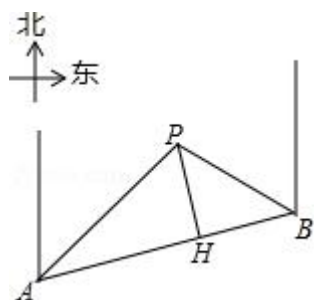


22. (10 分) 某条道路上通行车辆的限速 60 千米/时, 道路的 AB 段为监测区,

监测点 P 到 AB 的距离 PH 为 50 米 (如图). 已知点 P 在点 A 的北偏东 45°

方向上, 且在点 B 的北偏西 60° 方向上, 点 B 在点 A 的北偏东 75° 方向上,

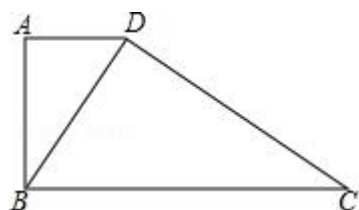
那么车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内, 可认定为超速? (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.7$, $\sqrt{2} \approx 1.4$).



23. (12 分) 已知四边形 ABCD 中, $\angle BAD = \angle BDC = 90^\circ$, $BD^2 = AD \cdot BC$.

(1) 求证: $AD \parallel BC$;

(2) 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E. 请完善图形并求证: $CD^2 = BE \cdot BC$.

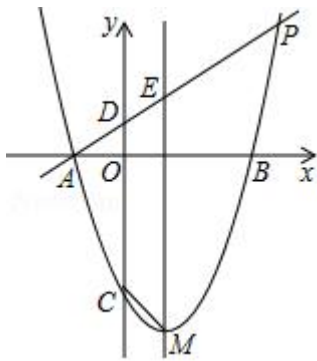


24. (14 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 抛物线与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 且 $AB = 4$, 又 P 是抛物线上位于第一象限的点, 直线 AP 与 y 轴交于点 D, 与对称轴交于点 E, 设点 P 的横坐标为 t .

(1) 求点 A 的坐标和抛物线的表达式;

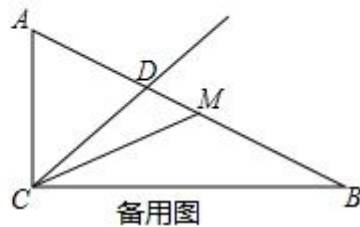
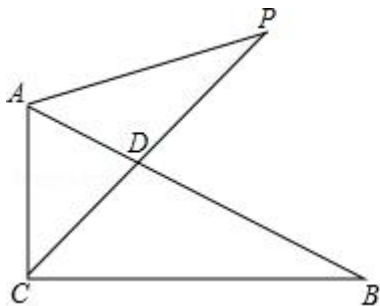
(2) 当 $AE : EP = 1 : 2$ 时, 求点 E 的坐标;

(3) 记抛物线的顶点为 M, 与 y 轴的交点为 C, 当四边形 CDEM 是等腰梯形时, 求 t 的值.



25. (14 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=1$, $BC=2$, CD 平分 $\angle ACB$ 交边 AB 与点 D , P 是射线 CD 上一点, 联结 AP .

- (1) 求线段 CD 的长;
- (2) 当点 P 在 CD 的延长线上, 且 $\angle PAB=45^\circ$ 时, 求 CP 的长;
- (3) 记点 M 为边 AB 的中点, 联结 CM 、 PM , 若 $\triangle CMP$ 是等腰三角形, 求 CP 的长.



2018 年上海市松江区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ ，那么 $\frac{a}{a+b}$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

【考点】S1：比例的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】根据比例设 $a=k$ ， $b=3k$ ，然后代入比例式进行计算即可得解.

【解答】解： $\because \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$,

$\therefore$ 设 $a=k$ ， $b=3k$ ($k \neq 0$),

则 $\frac{a}{a+b} = \frac{k}{k+3k} = \frac{1}{4}$.

故选：C.

【点评】本题考查了比例的性质，利用“设 k 法”求解更简便.

2. (4 分) 下列函数中，属于二次函数的是 ()

A. $y=x-3$

B. $y=x^2 - (x+1)^2$

C. $y=x(x-1)-1$

D. $y = \frac{1}{x^2}$

【考点】H1：二次函数的定义.

【专题】1：常规题型.

【分析】根据一次函数、反比例函数、二次函数的定义判断各选项即可得出答案.

【解答】解：A、是一次函数，故本选项错误；

- B、整理后是一次函数，故本选项错误；
- C、整理后是二次函数，故本选项正确；
- D、 y 与 x^2 是反比例函数关系，故本选项错误。

故选：C.

【点评】 本题考查了二次函数的定义，关键是掌握二次函数的定义条件：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的定义条件是：a、b、c 为常数， $a \neq 0$ ，自变量最高次数为 2.

3. (4 分) 已知飞机离水平地面的高度为 5 千米，在飞机上测得该水平地面上某观测目标 A 的俯角为 α ，那么这时飞机与目标 A 的距离为 ()

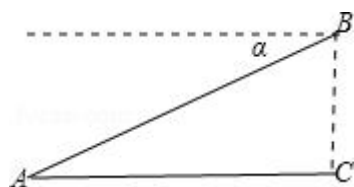
- A. $\frac{5}{\sin \alpha}$ B. $5 \sin \alpha$ C. $\frac{5}{\cos \alpha}$ D. $5 \cos \alpha$

【考点】 TA：解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

【专题】 1：常规题型；55E：解直角三角形及其应用.

【分析】 已知直角三角形的一个锐角和锐角所对的直角边，求斜边，运用三角函数定义解答.

【解答】 解：如图：BC 为飞机离地面的高度，



所以在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \alpha$ ， $BC = 5$ ，

$$\text{则 } AB = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{5}{\sin \alpha},$$

故选：A.

【点评】 此题考查的知识点是解直角三角形的应用，关键要求学生借助俯角构造直角三角形，并结合图形利用三角函数解直角三角形.

4. (4 分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，在下列条件中，不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

- A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ B. $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = 3\vec{c}$ C. $\vec{a} = -5\vec{b}$ D. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

【考点】LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】根据平面向量的性质即可判断.

【解答】解: A、 $\because \vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项, 不符合题意;

B、 $\because \vec{a} = 2\vec{c}, \vec{b} = 3\vec{c}, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项, 不符合题意;

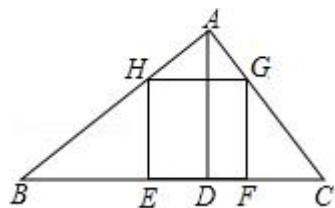
C、 $\because \vec{a} = -5\vec{b}, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项, 不符合题意;

D、 $\because |\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 不能判断 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项, 符合题意;

故选: D.

【点评】本题考查平面向量, 熟练掌握平面向量的基本性质的解题的关键.

5. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, 边 $BC=6$, 高 $AD=4$, 正方形 $EFGH$ 的顶点 E 、 F 在边 BC 上, 顶点 H 、 G 分别在边 AB 和 AC 上, 那么这个正方形的边长等于()



A. 3

B. 2.5

C. 2.4

D. 2

【考点】LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用正方形的性质可知 $EH \parallel BC$, 再利用平行线分线段成比例定理的推论可得 $\triangle AHE \sim \triangle ACB$, 利用相似三角形的性质可得比例线段, 利用比例线段可求正方形的边长

【解答】解: $\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$\therefore EH \parallel BC, EH = EF,$

$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABC,$

又 $\because AD \perp BC$,

$\therefore AD \perp BC$, $EH=EF=MD$,

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{EH}{BC},$$

设 $EH=x$, 则 $AM=3-x$,

$$\therefore \frac{4-x-x}{4} = \frac{x}{6},$$

解得: $x=2.4$,

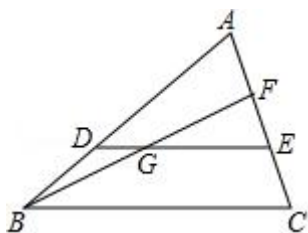
$\therefore EH=2.4$.

答: 这个正方形的边长为 2.4.

故选: C.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质、正方形的性质和平行线分线段成比例定理, 是各地中考考查相似三角形常见题型.

6. (4 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 AB、AC 上, $DE \parallel BC$, $AD:BD=2:1$, 点 F 在 AC 上, $AF:FC=1:2$, 联结 BF, 交 DE 于点 G, 那么 DG:GE 等于 ()



- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 2: 3 D. 2: 5.

【考点】 S4: 平行线分线段成比例.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 首先证明 $AF=EF=EC$, 由题意 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$, $\frac{GE}{BC} = \frac{1}{2}$, 设 $GE=m$, 求出 DG 即可解决问题;

【解答】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 2,$$

$$\therefore CE: CA = 1: 3, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AF: FC = 1: 2,$$

$$\therefore AF: AC = 1: 3,$$

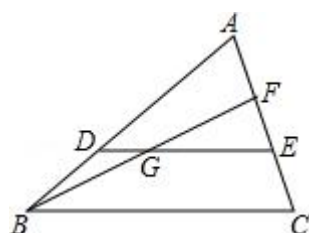
$$\therefore AF = EF = EC,$$

$$\therefore EG: BC = 1: 2, \text{ 设 } EG = m, \text{ 则 } BC = 2m,$$

$$\therefore DE = \frac{4}{3}m, \quad DG = \frac{4}{3}m - m = \frac{1}{3}m,$$

$$\therefore DG: GE = \frac{1}{3}m: m = 1: 3,$$

故选: B.



【点评】 本题考查平行线分线段成比例定理等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 学会利用参数解决问题, 属于中考常考题型.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) **【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】**

7. (4 分) 已知线段 $a=4$, $b=1$, 如果线段 c 是线段 a 、 b 的比例中项, 那么 $c=$ 2.

【考点】 S2: 比例线段.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据比例中项的定义, 列出比例式即可得出中项, 注意线段不能为负.

【解答】 解: 根据比例中项的概念结合比例的基本性质, 得: 比例中项的平方等于两条线段的乘积.

则 $c^2 = 4 \times 1$, $c = \pm 2$, (线段是正数, 负值舍去), 故 $c=2$;

故答案为 2.

【点评】此题考查了比例线段；理解比例中项的概念，这里注意线段不能是负数.

8. (4 分) 在比例尺是 1: 15000000 的地图上，测得甲乙两地的距离是 2 厘米，
那么甲乙两地的实际距离是 300 千米.

【考点】S2: 比例线段.

【专题】11: 计算题.

【分析】首先设这两地的实际距离是 x cm，然后根据比例尺的定义，即可得方

程 $\frac{2}{x} = \frac{1}{15000000}$ ，解此方程即可求得答案，注意统一单位.

【解答】解：设这两地的实际距离是 x cm，

根据题意得： $\frac{2}{x} = \frac{1}{15000000}$ ，

解得： $x = 30000000$ ，

$\therefore 30000000\text{cm} = 300\text{km}$ ，

$\therefore$ 这两地的实际距离是 300km.

故答案为： 300.

【点评】此题考查了比例线段. 此题难度不大，解题的关键是理解题意，根据比例尺的定义列方程，注意统一单位.

9. (4 分) 如果抛物线 $y = (a+2)x^2 + x - 1$ 的开口向下，那么 a 的取值范围是 $a < -2$.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】1: 常规题型.

【分析】根据抛物线 $y = (a+2)x^2 + x - 1$ 的开口向下，可得 $a+2 < 0$ ，从而可以得到 a 的取值范围.

【解答】解： $\therefore$ 抛物线 $y = (a+2)x^2 + x - 1$ 的开口向下，

$$\therefore a+2 < 0,$$

得 $a < -2$,

故答案为: $a < -2$.

【点评】 本题考查二次函数的性质和定义, 解题的关键是明确二次函数的开口向下, 则二次项系数就小于 0.

10. (4 分) 已知一个斜坡的坡度 $i=1:\sqrt{3}$, 那么该斜坡的坡角的度数是 30 度.

【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】 坡度=坡角的正切值, 据此直接解答.

【解答】 解: $\because \tan \alpha = 1: \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 坡角 $= 30^\circ$.

【点评】 此题主要考查学生对坡度及坡角的理解及掌握.

11. (4 分) 线段 $AB=10$, 点 P 是 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 则 $AP = \underline{(5\sqrt{5}-5)}$ (用根式表示).

【考点】 S3: 黄金分割.

【分析】 根据黄金分割点的定义和 $AP > BP$ 得出 $AP = AB \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 再进行计算即可.

【解答】 解: $\because$ 点 P 是 AB 的黄金分割点, $AP > BP$,

$$\therefore AP = AB \times \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\because$ 线段 $AB=10$,

$$\therefore AP = 10 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 5\sqrt{5} - 5;$$

故答案为: $5\sqrt{5} - 5$.

【点评】 此题考查了黄金分割, 关键是理解黄金分割点的概念, 要熟记黄金比的值, 计算时要注意 $AP > BP$ 的条件.

12. (4分) 已知等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=6$, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 那么

$$AG = \underline{\frac{8}{3}}.$$

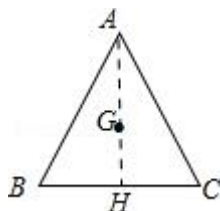
【考点】K5: 三角形的重心; KH: 等腰三角形的性质.

【专题】552: 三角形.

【分析】如图延长 AG 交 BC 于 H . 利用等腰三角形的三线合一, 可知 AH 是高,

利用勾股定理求出 AH , 根据重心的性质 $AG = \frac{2}{3}AH$ 计算即可.

【解答】解: 如图延长 AG 交 BC 于 H .



$\because G$ 是重心,

$\therefore BH=CH=3$,

$\because AB=AC=5$,

$\therefore AH \perp BC$,

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 4,$$

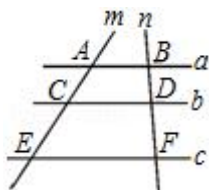
$$\therefore AG = \frac{2}{3}AH = \frac{8}{3}$$

故答案为 $\frac{8}{3}$

【点评】本题考查三角形的重心、等腰三角形的性质等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

13. (4分) 已知直线 $a \parallel b \parallel c$, 直线 m, n 与直线 a, b, c 分别交于点 $A, C,$

E, B, D, F , $AC=4$, $CE=6$, $BD=3$, 则 $BF = \underline{7.5}$.



【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例定理得到比例式，求出 DF ，结合图形计算即可.

【解答】解： $\because a \parallel b \parallel c$,

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}, \text{ 即 } \frac{4}{6} = \frac{3}{DF},$$

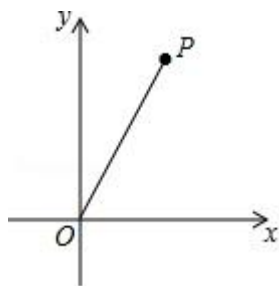
解得 $DF=4.5$,

$$\therefore BF=BD+DF=3+4.5=7.5,$$

故答案为：7.5.

【点评】本题考查的是平行线分线段成比例定理，灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键.

14. (4分) 已知平面直角坐标系 xOy 中， O 为坐标原点，点 P 的坐标为 (5, 12)，那么 OP 与 x 轴正半轴所夹角的余弦值为 $\frac{5}{13}$.

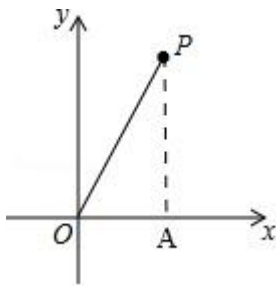


【考点】D5：坐标与图形性质；T7：解直角三角形.

【专题】55：几何图形.

【分析】根据三角函数的定义解答.

【解答】解：如图作 $PA \perp x$ 轴，垂足为 A ,



$$OP = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\cos \angle POA = \frac{5}{13},$$

故答案为 $\frac{5}{13}$

【点评】 本题考查了勾股定理和锐角三角函数的定义，利用坐标系求出三角形的边长是关键步骤.

15. (4 分) 已知抛物线 $y=f(x)$ 开口向下，对称轴是直线 $x=1$ ，那么 $f(2)$ $>$ $f(4)$. (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 根据抛物线 $y=f(x)$ 开口向下，对称轴是直线 $x=1$ ，可知在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小，然后可判断出 $f(2) > f(4)$.

【解答】 解: $\because$ 抛物线 $y=f(x)$ 开口向下，对称轴是直线 $x=1$,

$\therefore$ 在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore f(2) > f(4)$.

故答案为: $>$.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，找到二次函数的对称轴并判断出点的位置是解题的关键.

16. (4 分) 把抛物线 $y=x^2$ 向下平移，如果平移后的抛物线经过点 A (2, 3)，那么平移后的抛物线的表达式是 $y=x^2 - 1$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】 33: 函数思想.

【分析】 可设所求的函数解析式为 $y=x^2+k$, 把 A 坐标代入可得平移后的抛物线.

【解答】 解: 设所求的函数解析式为 $y=x^2+k$,

$\therefore$ 点 A (2, 3) 在抛物线上,

$$\therefore 3=2^2+k$$

解得: $k=-1$,

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式是 $y=x^2-1$.

故答案为: $y=x^2-1$.

【点评】 考查二次函数的平移问题; 用到的知识点为: 上下平移不改变二次项系数及顶点的横坐标, 只改变顶点的纵坐标, 上加下减.

17. (4 分) 我们定义: 关于 x 的函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=bx^2+ax$ (其中 $a \neq b$) 叫做互为交换函数. 如 $y=3x^2+4x$ 与 $y=4x^2+3x$ 是互为交换函数. 如果函数 $y=2x^2+bx$ 与它的交换函数图象顶点关于 x 轴对称, 那么 $b=\underline{\quad -2 \quad}$.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 根据题意可以得到交换函数, 由顶点关于 x 轴对称, 从而得到关于 b 的方程, 可以解答本题.

【解答】 解: $\therefore$ 由题意函数 $y=2x^2+bx$ 的交换函数为 $y=bx^2+2x$,

$\therefore$ 函数 $y=2x^2+bx$ 与它的交换函数图象顶点关于 x 轴对称, 两个函数的对称轴相同,

$$\therefore -\frac{b}{4} = -\frac{2}{2b},$$

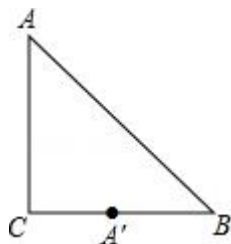
解得 $b=-2$ 或 2 ,

$\therefore$ 互为交换函数 $a \neq b$,

故答案为：-2.

【点评】 本题考查了二次函数的性质. 理解交换函数的意义是解题的关键.

18. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=4$, 将 $\triangle ABC$ 翻折, 使得点 A 落在 BC 的中点 A' 处, 折痕分别交边 AB、AC 于点 D、点 E, 那么 AD: AE 的值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



【考点】 PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】 552: 三角形; 558: 平移、旋转与对称; 55D: 图形的相似.

【分析】 连接 AA' 交 DE 于点 M, 过点 A' 作 $A'N \perp AB$ 于点 N, 根据折叠的性质、勾股定理及相似三角形的性质可分别求出 AD、AE 的长度, 将二者相比后即可得出结论.

【解答】 解: 连接 AA' 交 DE 于点 M, 过点 A' 作 $A'N \perp AB$ 于点 N, 如图所示.

$\because AC=BC=4$, $\angle C=90^\circ$, A' 为线段 BC 的中点,

$\therefore A'C=A'B=2$, $AA'=\sqrt{AC^2+A'C^2}=2\sqrt{5}$, $AB=4\sqrt{2}$,

$\therefore AM=\frac{1}{2}AA'=\sqrt{5}$, $A'N=BN=\sqrt{2}$,

$\therefore AN=AB-BN=3\sqrt{2}$.

$\because \angle EAM=\angle A'AC$, $\angle AME=\angle C$,

$\therefore \triangle AEM \sim \triangle AA'C$,

$\therefore \frac{AE}{AA'}=\frac{AM}{AC}$,

$\therefore AE=\frac{5}{2}$.

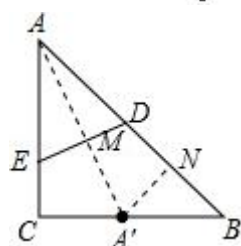
同理: $\triangle ADM \sim \triangle AA'N$,

$$\therefore \frac{AD}{AA'} = \frac{AM}{AN},$$

$$\therefore AD = \frac{5\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



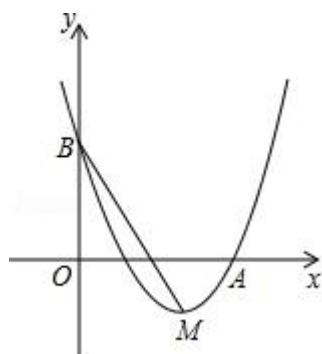
【点评】 本题考查了折叠的性质、勾股定理以及相似三角形的判定及性质，利用相似三角形的性质求出 AD、AE 的长度是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 80 分)

19. (10 分) 如图在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(3, 0)$ 、点 $B(0, 3)$, 顶点为 M .

(1) 求该二次函数的解析式;

(2) 求 $\angle OBM$ 的正切值.



【考点】 H2: 二次函数的图象; H3: 二次函数的性质; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; H8: 待定系数法求二次函数解析式; T7: 解直角三角形.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 先把 A、B 两点的坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 得到关于 b、c 的方程组,

然后解方程组求出 b 、 c 即可得到抛物线解析式；

(2) 作 $MH \perp y$ 轴于 H ，如图，先把抛物线解析式配成顶点式得到 M 点坐标，

然后根据正切的定义求 $\angle HBM$ 的正切值即可。

【解答】解：(1) 把 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$ ，

所以 $y = x^2 - 4x + 3$ ；

(2) 作 $MH \perp y$ 轴于 H ，如图，

$$\therefore y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1,$$

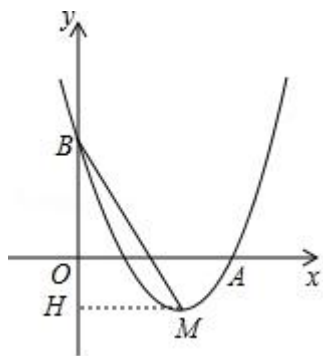
$$\therefore M(2, -1),$$

$\therefore MH \perp y$ 轴，

$$\therefore H(0, -1),$$

$$\text{在 Rt}\triangle BMH \text{ 中, } \tan \angle HBM = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

即 $\angle OBM$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$ 。



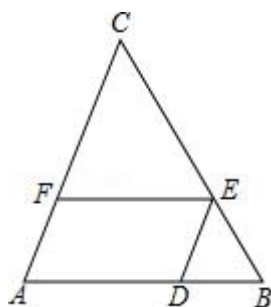
【点评】本题考查了用待定系数法求二次函数的解析式：在利用待定系数法求二次函数关系式时，要根据题目给定的条件，选择恰当的方法设出关系式，从而代入数值求解。也考查了二次函数的性质和解直角三角形。

20. (10 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 上的点，

$$\text{且 } EF \parallel AB, \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} = 2.$$

(1) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$;

(2) 如果 $\triangle ABC$ 的面积是 9, 求四边形 ADEF 的面积.



【考点】 LM: *平面向量; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 1: 常规题型; 55D: 图形的相似.

【分析】 (1) 由 $EF \parallel AB$ 知 $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$, 据此可得 $\frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = 2$, 即 $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$,

从而证 $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ 得 $\angle BDE = \angle A$, 即可知 $DE \parallel AC$ 、四边形 ADEF 是平

行四边形, 再利用 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{b}$ 及平行四边形法则可得答案;

(2) 由 $EF \parallel AB$ 、 $DE \parallel AC$ 知 $\triangle CFE \sim \triangle CAB$, $\triangle BDE \sim \triangle BAC$, 从而得 $\frac{S_{\triangle CFE}}{S_{\triangle CAB}} =$

$$\left(\frac{CF}{CA}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{BD}{BA}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \text{进一步得出 } S_{\triangle CFE} = 4, S_{\triangle BDE} = 1, \text{ 从而得}$$

出答案.

【解答】 解: (1) $\because EF \parallel AB$,

$$\therefore \frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB},$$

$$\text{又 } \therefore \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} = 2,$$

$$\therefore \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = 2,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle A,$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

则四边形 ADEF 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \vec{a}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \vec{b},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b};$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \frac{CF}{CA} = \frac{2}{3}, \quad \frac{BD}{BA} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EF \parallel AB, \quad DE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle CFE \sim \triangle CAB, \quad \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CFE}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{CF}{CA}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{BD}{BA}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle CFE} = 4, \quad S_{\triangle BDE} = 1,$$

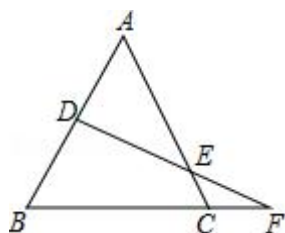
$$\text{则四边形 ADEF 的面积} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CFE} - S_{\triangle BDE} = 4.$$

【点评】 本题主要考查相似三角形的判定和性质、平面向量, 解题的关键是熟练掌握平行线分线段成比例定理、相似三角形的判定与性质及向量的计算.

21. (10 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 4$. 线段 AB 的垂直平分线 DF 分别交边 AB 、 AC 、 BC 所在的直线于点 D 、 E 、 F .

(1) 求线段 BF 的长;

(2) 求 $AE: EC$ 的值.



【考点】KG: 线段垂直平分线的性质; KH: 等腰三角形的性质; S4: 平行线分线段成比例.

【专题】11: 计算题.

【分析】(1) 作 $AH \perp BC$ 于 H , 如图, 利用等腰三角形的性质得 $BH=CH=\frac{1}{2}BC=2$, 再利用勾股定理计算出 $AH=4$, 然后证明 $Rt\triangle FBD \sim Rt\triangle ABH$, 再利用相似比计算 BF 和 DF 的长;

(2) 作 $CG \parallel AB$ 交 DF 于 G , 如图, 利用 $CG \parallel BD$ 得到 $\frac{CG}{BD} = \frac{CF}{BF} = \frac{1}{5}$, 然后由 $CG \parallel AD$, 根据平行线分线段成比例定理得到 $AE:EC$ 的值.

【解答】解: (1) 作 $AH \perp BC$ 于 H , 如图,

$$\therefore AB=AC=2\sqrt{5},$$

$$\therefore BH=CH=\frac{1}{2}BC=2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABH \text{ 中, } AH=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4,$$

$$\therefore DF \text{ 垂直平分 } AB,$$

$$\therefore BD=\sqrt{5}, \angle BDF=90^\circ$$

$$\therefore \angle ABH=\angle FBD,$$

$$\therefore Rt\triangle FBD \sim Rt\triangle ABH,$$

$$\therefore \frac{BF}{AB} = \frac{BD}{BH} = \frac{DF}{AH}, \text{ 即 } \frac{BF}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{DF}{4},$$

$$\therefore BF=5, DF=2\sqrt{5};$$

(2) 作 $CG \parallel AB$ 交 DF 于 G , 如图,

$$\therefore BF=5, BC=4,$$

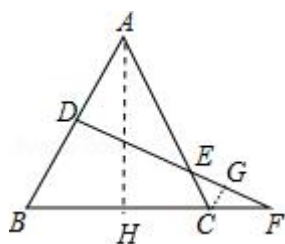
$$\therefore CF=1,$$

$$\therefore CG \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{CG}{BD} = \frac{CF}{BF} = \frac{1}{5},$$

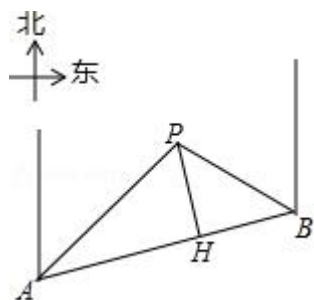
$$\therefore CG \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{CG} = \frac{BD}{CG} = 5.$$



【点评】 本题考查了平行线分线段成比例：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例．也考查了等腰三角形的性质和线段垂直平分线的性质．

22. (10 分) 某条道路上通行车辆的限速 60 千米/时，道路的 AB 段为监测区，监测点 P 到 AB 的距离 PH 为 50 米（如图）．已知点 P 在点 A 的北偏东 45° 方向上，且在点 B 的北偏西 60° 方向上，点 B 在点 A 的北偏东 75° 方向上，那么车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内，可认定为超速？（参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.7$ ， $\sqrt{2} \approx 1.4$ ）．



【考点】 TB：解直角三角形的应用－方向角问题．

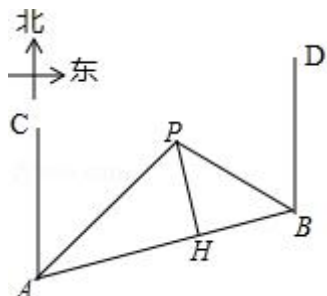
【专题】 1：常规题型；55E：解直角三角形及其应用．

【分析】 由题意知 $\angle CAB=75^\circ$ 、 $\angle CAP=45^\circ$ 、 $\angle PBD=60^\circ$ ，从而得 $\angle PAH=30^\circ$ 、

$\angle PBH = \angle ABD - \angle PBD = 45^\circ$ ，分别求出 $AH = \frac{PH}{\tan \angle PAH} = 50\sqrt{3}$ 、 $PH = BH = 50$ ，

据此求得 $AB = 50\sqrt{3} + 50$ ，用路程除以速度可得答案．

【解答】 解：如图，由题意知 $\angle CAB = 75^\circ$ 、 $\angle CAP = 45^\circ$ 、 $\angle PBD = 60^\circ$ ，



$$\therefore \angle PAH = \angle CAB - \angle CAP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PHA = \angle PHB = 90^\circ, \quad PH = 50,$$

$$\therefore AH = \frac{PH}{\tan \angle PAH} = \frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 50\sqrt{3},$$

$$\therefore AC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle CAB = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle PBH = \angle ABD - \angle PBD = 45^\circ,$$

则 $PH = BH = 50$ ，

$$\therefore AB = AH + BH = 50\sqrt{3} + 50,$$

$$\therefore 60 \text{ 千米/时} = \frac{50}{3} \text{ 米/秒},$$

$$\therefore \text{时间 } t = \frac{50\sqrt{3} + 50}{\frac{50}{3}} = 3 + 3\sqrt{3} \approx 8.1 \text{ (秒)},$$

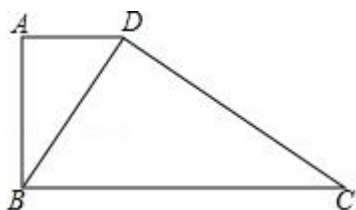
即车辆通过 AB 段的时间在 8.1 秒以内，可认定为超速．

【点评】 本题主要考查了方向角问题．根据方向角得出解题所需角的度数及三角函数的应用是解题的关键．

23. (12 分) 已知四边形 ABCD 中， $\angle BAD = \angle BDC = 90^\circ$ ， $BD^2 = AD \cdot BC$ ．

(1) 求证： $AD \parallel BC$ ；

(2) 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E. 请完善图形并求证: $CD^2 = BE \cdot BC$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 根据三角形的相似和平行线的性质可以证明结论成立;

(2) 根据三角形的相似, 对应边的比相等即可证明结论成立.

【解答】(1) 证明: $\because \angle BAD = \angle BDC = 90^\circ$, $BD^2 = AD \cdot BC$,

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

$$\text{设 } \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD} = k,$$

$$\therefore BD = kBC, \quad AD = kBD,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{1 - k^2} BD,$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{1 - k^2} BC,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{\sqrt{1 - k^2} BD}{\sqrt{1 - k^2} BC} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{AD}{DB},$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore AD \parallel BC;$$

(2) 如右图所示,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AE \parallel DC,$$

$$\therefore \text{四边形 ADEC 是平行四边形, } \angle AEB = \angle BCD,$$

$$\therefore AE=DC,$$

$$\text{又} \because \angle BAD = \angle BDC = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BDC,$$

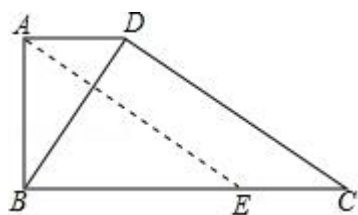
$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{BE}{DC} = \frac{AE}{BC},$$

$$\therefore AE \cdot DC = BE \cdot BC,$$

$$\therefore AE = DC,$$

$$\therefore CD^2 = BE \cdot BC.$$



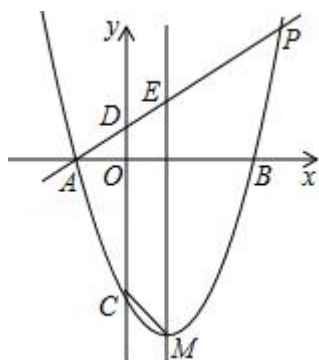
【点评】 本题考查相似三角形的判定与性质，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用相似三角形的性质与判定解答。

24. (14 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$ ，抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），且 $AB=4$ ，又 P 是抛物线上位于第一象限的点，直线 AP 与 y 轴交于点 D ，与对称轴交于点 E ，设点 P 的横坐标为 t 。

(1) 求点 A 的坐标和抛物线的表达式；

(2) 当 $AE:EP=1:2$ 时，求点 E 的坐标；

(3) 记抛物线的顶点为 M ，与 y 轴的交点为 C ，当四边形 $CDEM$ 是等腰梯形时，求 t 的值。



【考点】HF：二次函数综合题.

【专题】16：压轴题.

【分析】(1) 依据抛物线的对称性可得到 A、B 的坐标，利用抛物线的交点式可得到抛物线的解析式；

(2) 过点 P 作 $PF \parallel y$ 轴，交 x 轴与点 F，则 $\triangle AEG \sim \triangle APF$ ，从而可得到 $AF=6$ ，然后可求得 PF 的长，从而可得到 EG 的长，故此可得到点 E 的坐标；

(3) 先证明 $\angle ADO = \angle CME$ ，然后，再求得点 C 和点 M 的坐标，从而可得到 $\tan \angle ADO = 1$ ，于是可得到 $OD = AO = 1$ ，故此可得到 AP 的解析式，最后求得直线 AP 与抛物线的交点坐标即可.

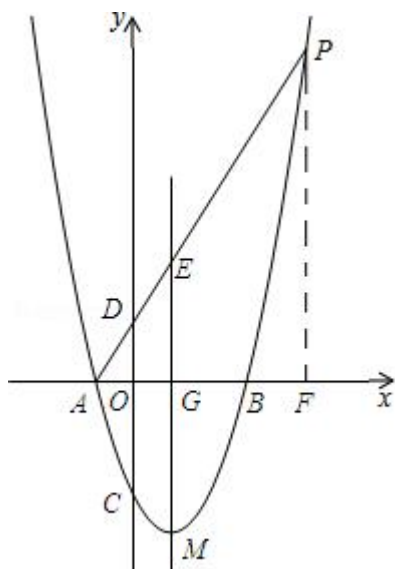
【解答】解：(1) $\because AB=4$ ，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$ ，

$\therefore$ 点 A 到对称轴的距离为 2，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$\therefore y = (x+1)(x-3)$ 整理得： $y = x^2 - 2x - 3$ ；

(2) 如下图所示：过点 P 作 $PF \perp x$ 轴，垂足为 F.



$\therefore EG \parallel PF$, $AE: EP = 1: 2$,

$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{EG}{PF} = \frac{1}{3}.$$

又 $\therefore AG = 2$,

$$\therefore AF = 6,$$

$$\therefore F(5, 0).$$

当 $x = 5$ 时, $y = 12$,

$$\therefore EG = 4,$$

$$\therefore E(1, 4).$$

(3) $\therefore CD \parallel EM$,

$$\therefore \angle ADO = \angle AEM.$$

又 $\therefore$ 四边形 CDEM 是等腰梯形,

$$\therefore \angle ADO = \angle CME.$$

$$\therefore \angle ADO = \angle CME.$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3,$$

$$\therefore C(0, -3), M(1, -4)$$

$$\therefore \tan \angle DAO = \tan \angle CME = 1.$$

$$\therefore OA = OD = 1.$$

$\therefore$ 直线 AP 的解析式为 $y = x + 1$.

把 $y = x + 1$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 得: $x + 1 = x^2 - 2x - 3$,

解得: $x = 4$ 或 $x = -1$ (舍去)

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 4, 即 $t = 4$.

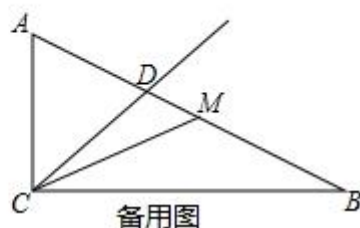
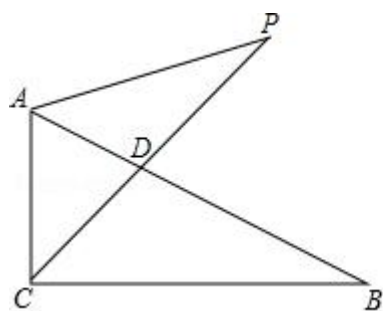
【点评】 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 解答本题主要应用了待定系数法求二次函数的解析式, 相似三角形的性质和判定、等腰梯形的性质、求得 AF 的长是解答问题 (2) 的关键; 求得 AP 的解析式是解答问题 (3) 的关键.

25. (14 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = 2$, CD 平分 $\angle ACB$ 交边 AB 与点 D, P 是射线 CD 上一点, 联结 AP.

(1) 求线段 CD 的长;

(2) 当点 P 在 CD 的延长线上, 且 $\angle PAB = 45^\circ$ 时, 求 CP 的长;

(3) 记点 M 为边 AB 的中点, 联结 CM、PM, 若 $\triangle CMP$ 是等腰三角形, 求 CP 的长.



【考点】 KY: 三角形综合题.

【专题】 152: 几何综合题.

【分析】 (1) 作辅助线, 证明四边形 ECFD 是正方形, 设 $DF = x$, 则 $CF = x$, $BF = 2$

$- x$, 由 $\triangle BDF \sim \triangle BAC$, 得 $\frac{DF}{AC} = \frac{BF}{BC}$, 可得 CD 的长;

(2) 如图 2，作辅助线，构建全等三角形，先根据 C、B、P、A 四点共圆，得 $\angle APB=90^\circ$ ，可知 $AP=BP$ ，由角平分线性质的得： $PM=PN$ ，根据 HL 证明 $\text{Rt} \triangle PMA \cong \text{Rt} \triangle PNB$ (HL)，得 $AM=BN$ ，设 $AM=x$ ，则 $PM=CM=x+1$ ， $CN=2-x$ ，由 $CM=CN$ 列方程可得 x 的值，可得 CD 的长；

(3) 存在三种情况：

①当 $PM=CM$ 时，如图 3，同理作出辅助线，根据 $\triangle PCM$ 是等腰直角三角形，可得 CP 的长；

②先根据勾股定理求 $AB=\sqrt{5}$ ，根据直角三角形斜边中线等于斜边一半可得 CP 的长；

③由 $\triangle CPN \sim \triangle CMH$ ，列比例式结合①可得 CP 的长.

【解答】 解：(1) 如图 1，过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E， $DF \perp BC$ 于 F，

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore DE=DF$ ，

$\because \angle DEC=\angle ACB=\angle CFD=90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 ECFD 是正方形，

设 $DF=x$ ，则 $CF=x$ ， $BF=2-x$ ，

$\because DF \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle BDF \sim \triangle BAC$ ，

$$\therefore \frac{DF}{AC} = \frac{BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{x}{1} = \frac{2-x}{2},$$

$$\therefore x = \frac{2}{3},$$

$\therefore \triangle CDE$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore CD = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

(2) 如图 2, $\because \angle PAB = \angle PCB = 45^\circ$,

$\therefore C、B、P、A$ 四点共圆,

$$\therefore \angle ACB + \angle APB = 180^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle APB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AP = BP,$$

过 P 作 $PM \perp AC$ 于 M , $PN \perp BC$ 于 N , 连接 PB ,

$$\because PM = PN,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle PMA \cong \text{Rt} \triangle PNB \text{ (HL)},$$

$$\therefore AM = BN,$$

由 (1) 知: 四边形 $MCNP$ 是正方形,

$$\therefore CM = CN,$$

设 $AM = x$, 则 $PM = CN = x + 1$, $CN = 2 - x$,

$$\therefore x + 1 = 2 - x,$$

$$x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore CP = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

(3) 若 $\triangle CMP$ 是等腰三角形, 存在三种情况:

①当 $PM = CM$ 时, 如图 3, 同理作出辅助线,

$$\because \angle PCN = 45^\circ,$$

∴ $\triangle PCN$ 是等腰直角三角形,

∴ $CN=PN$,

同 (2) 得 $Rt\triangle PGA \cong Rt\triangle PNB$ (HL),

∴ $AG=BN$,

设 $AG=x$, 则 $PN=CG=x+1$, $CN=2-x$,

∴ $x+1=2-x$,

$$x=\frac{1}{2},$$

$$\therefore CN=\frac{3}{2},$$

$$\therefore CP=\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

② $Rt\triangle ACB$ 中, $AC=1$, $BC=2$,

$$\therefore AB=\sqrt{5},$$

∴ M 是 AB 的中点,

$$\therefore CM=CP=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}}{2};$$

③作 CM 的中垂线交 CD 于 P , 则 $CP=PM$,

过 M 作 $MH \perp CD$ 于 H ,

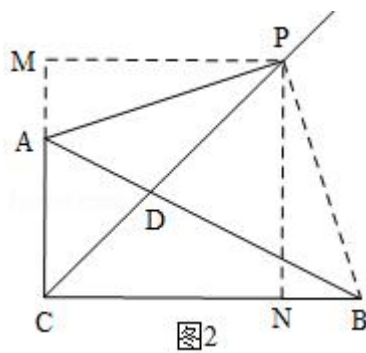
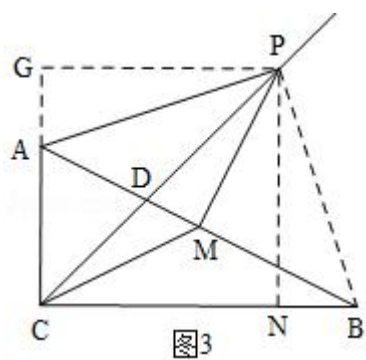
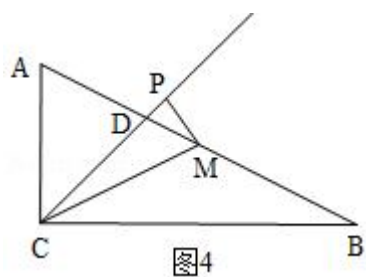
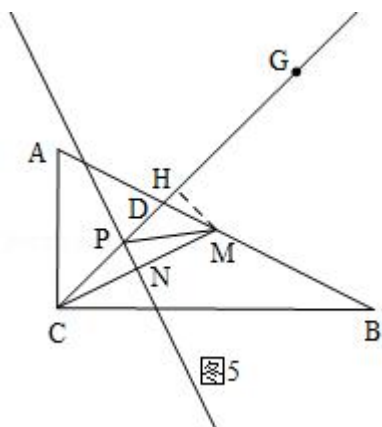
$$\text{由①知: } CG \text{ (就是 } CP=\frac{3\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad CH=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

∴ $\triangle CPN \sim \triangle CMH$,

$$\therefore \frac{CM}{CH} = \frac{CP}{CN},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}} = \frac{CP}{\frac{\sqrt{5}}{2}}, \quad CP = \frac{5}{12}\sqrt{2},$$

综上所述, CP 的长是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{2}}{12}$.



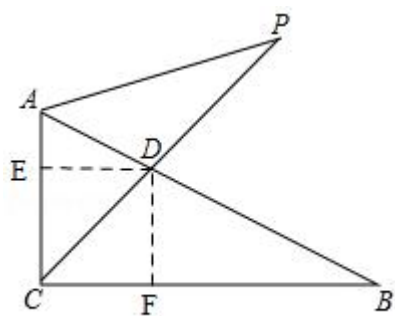


图1

【点评】 本题考查的是直角三角形的性质、三角形相似的性质和判定、正方形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质等知识，与方程相结合，设未知数，列方程解决问题.